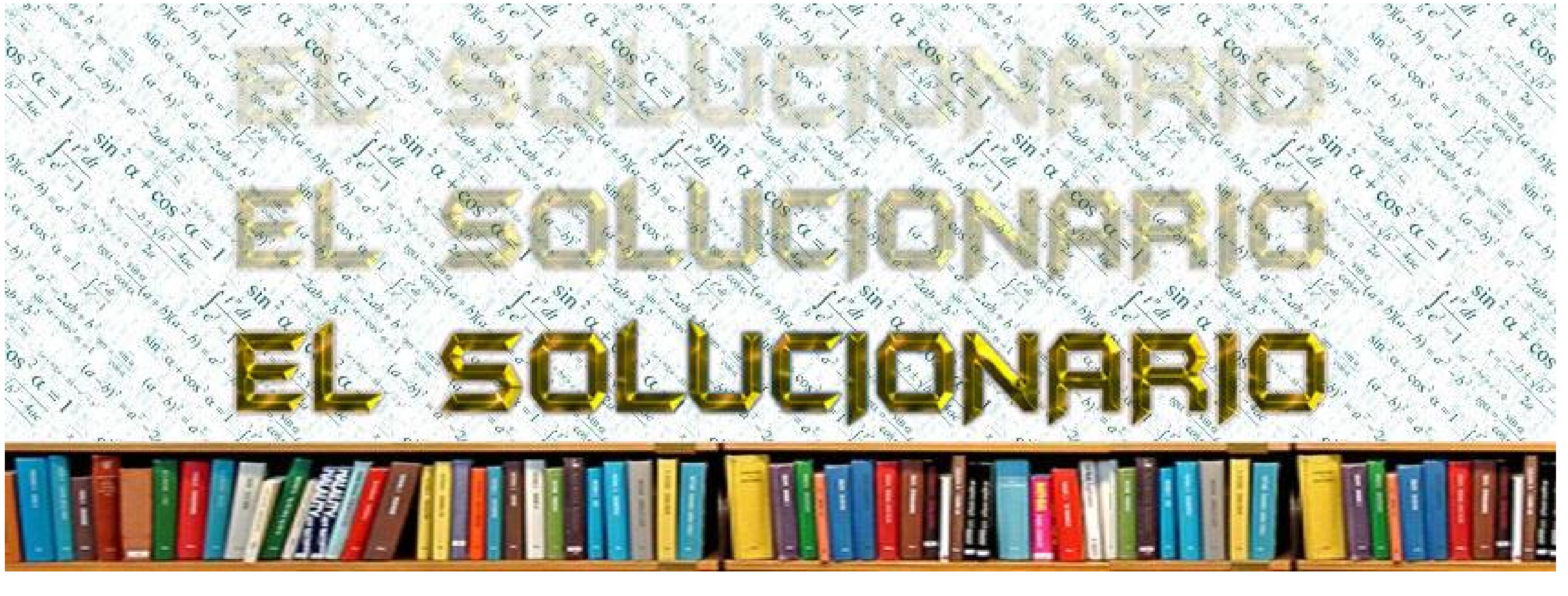
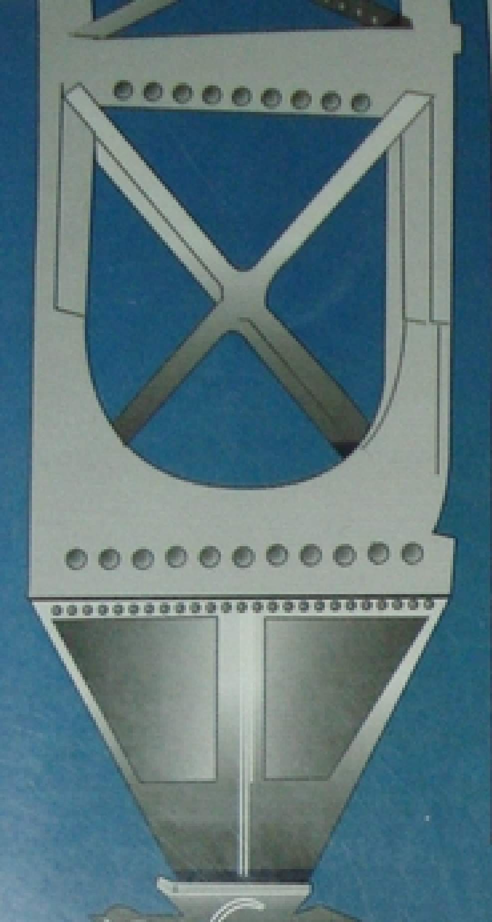
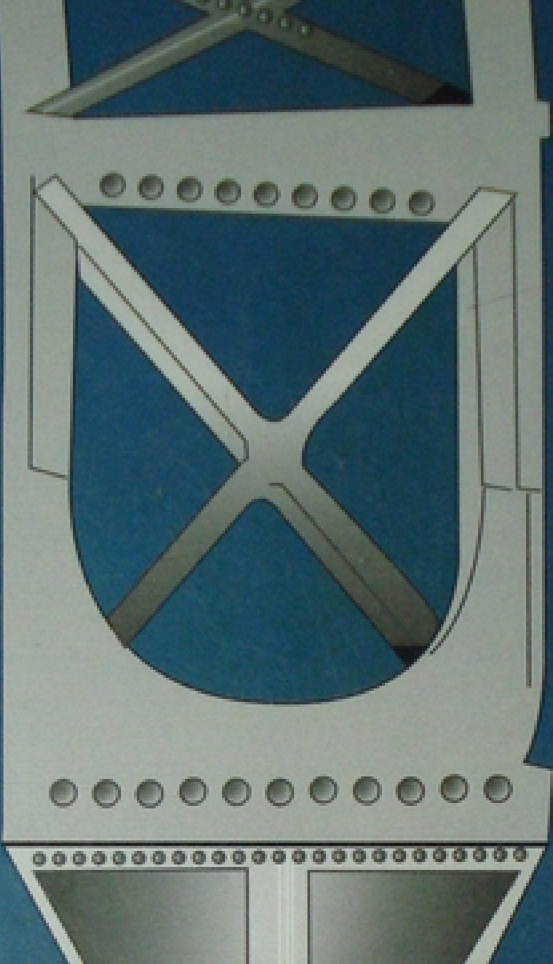

EL SOLUCIONARIO
EL SOLUCIONARIO
EL SOLUCIONARIO





González
Cuevas

# análisis estructural

LIMUSA
NORIEGA EDITORES

**Acerca del autor:**

**Óscar M. González Cuevas** es ingeniero civil egresado de la Universidad de Yucatán, con grados de maestro en Ingeniería y de doctor en Ingeniería, con especialidad en estructuras, por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Actualmente es profesor de tiempo completo en la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), Unidad Azcapotzalco. En esta institución imparte cursos de Estática, Diseño estructural, Análisis estructural y Estructuras de concreto. También realiza investigaciones en el campo de la reparación de estructuras dañadas por sismos y coordina el posgrado en Ingeniería estructural que ha iniciado actividades en el año 2001. Fue fundador de la UAM en el año de 1974 y ha ocupado diversos cargos de dirección, incluyendo el de Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería (1979-1981), Rector de la Unidad Azcapotzalco (1981-1985) y Rector general (1985-1989).

El Dr. González Cuevas es autor, con el Ing. Francisco Robles Fernández, del libro *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*, que ha venido publicando esta misma casa editorial, en tres ediciones (1974, 1985, 1995), y que se usa ampliamente como libro de texto en escuelas y facultades de Ingeniería de varios países de habla hispana. Ha escrito otros libros y artículos sobre Ingeniería estructural, y sobre planeación y administración universitaria, así como trabajos presentados en congresos nacionales e internacionales. Es miembro del Comité de Seguridad Estructural del Gobierno del Distrito Federal y en este carácter participa en la revisión y elaboración del Reglamento para las Construcciones del Distrito Federal.

Entre las principales distinciones y reconocimientos que ha recibido destacan el doctorado *Honoris Causa* de la Universidad de Yucatán (1977), Presea Guillermo Álvarez Macías de la Cooperativa de Cemento La Cruz Azul (1990), Premio "El Registro" del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto (1999), Académico Emérito de la Academia Nacional de Ingeniería (2001) y Premio a la Docencia en Ingeniería Civil 2001 de la Fundacion ICA. Ha sido Presidente de la Academia Nacional de Ingeniería (1985-1987) y de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural (1995-1997).

# Presentación

Este libro ha sido escrito con el propósito fundamental de ayudar a profesores y alumnos en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural. Esta disciplina constituye uno de los pilares de la carrera de ingeniería civil y es también importante en algunas otras licenciaturas, como ingeniería mecánica y arquitectura. Su dominio es indispensable para los profesionales que se dedican al diseño de algunas de las obras más espectaculares que construye el ser humano: rascacielos, puentes, presas, plantas industriales, plataformas marítimas, etc. El análisis estructural es, asimismo, una de las asignaturas que más contribuyen a la formación de los alumnos, a su entrenamiento en el manejo de conceptos abstractos y a la adquisición de habilidades intelectuales requeridas para el ejercicio profesional de la ingeniería. Por estas razones, ha ocupado, desde hace mucho tiempo, un lugar destacado en los planes de estudio.

Los métodos básicos del análisis estructural conducen a la formulación de sistemas de ecuaciones simultáneas que, para estructuras de regular tamaño, llegan a ser de grado elevado. Su resolución por métodos manuales consume mucho tiempo. Para solucionar este problema, se desarrollaron métodos numéricos que resultaban menos lentos, pero que seguían siendo laboriosos y propensos a que se cometiesen errores. El método de Cross es un ejemplo típico. Con el advenimiento de las computadoras, la resolución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas dejó de ser un problema, y se regresó a los métodos fundamentales, el de las fuerzas y el de las deformaciones o desplazamientos. Pero estos métodos se replantearon con un enfoque matricial más adecuado a la utilización de computadoras. Distintos libros de análisis estructural utilizan enfoques también diferentes según el desarrollo histórico mencionado.

El enfoque seguido en este libro es el siguiente. En el primer capítulo se hace una revisión del proceso general de diseño y se ubica a la etapa del análisis estructural dentro de este proceso. El capítulo 2 comprende una revisión del tema de estructuras isostáticas, estudiado generalmente en cursos previos a los de análisis estructural, llamados estática o estructuras isostáticas en las escuelas de ingeniería; el dominio de este tema es fundamental y por eso su inclusión en este libro y la recomendación de que no se continúe con los otros capítulos si éste no se ha estudiado a profundidad. La resolución de estructuras hiperestáticas, campo de estudio del análisis estructural, requiere del cálculo de deformaciones de estructuras isostáticas; en el capítulo 3 se estudia este tema en forma completa, aunque algunos métodos incluidos en el libro, no todos, se ven en cursos previos. Los capítulos 4 y 5 presentan los métodos básicos o fundamentales del análisis estructural: el de las fuerzas y el de las deformaciones, respectivamente. El método pendiente-deflexión, que es el mismo de las deformaciones en sus principios básicos, se incluye en el capítulo 6. El método de Cross, ya mencionado, se presenta en los capítulos 7, 8 y 9, tratando por separado los casos de vigas continuas, marcos sin desplazamiento lateral y marcos con desplazamiento lateral; su inclusión obedece a que todavía es utilizado con frecuencia para la resolución de estructuras sencillas y a que presenta con claridad principios básicos del análisis estructural. Finalmente en los capítulos 10 y 11 se estudia el tema de las líneas de influencia para estructuras isostáticas e hiperestáticas, respectivamente, el cual se considera importante a pesar de que ya no se incluye en algunos programas de estudio.

En todo el libro se hace énfasis en los principios básicos más que en aplicaciones específicas, ya que el autor considera que el dominio de estos principios es necesario para el estudio de métodos más avanzados o para la utilización de los excelentes programas de cómputo disponibles actualmente. Por el contrario, la utilización de programas sin dicho conocimiento no sólo es inconveniente, sino peligrosa.

El estudio del análisis estructural resulta difícil, en ocasiones, para algunos alumnos. Por esta razón, el autor ha tratado de presentar el material de la manera más clara posible, conservando desde luego el rigor de la disciplina e incluyendo el desarrollo total de las demostraciones. Se ha tenido especial cuidado de explicar con detalle aquellos conceptos que, en la experiencia del autor, son de más difícil comprensión, aun a riesgo de caer en repeticiones. Los numerosos ejemplos resueltos se presentan en forma completa e incluyen el trazado de los diagramas de acciones, ya que es conveniente que el alumno adquiera el entrenamiento de obtener estos diagramas e interpretarlos debidamente. Los ejemplos se presentan en hojas enmarcadas, en forma similar a la empleada en despachos de cálculo, acompañados de comentarios sobre su desarrollo. Este método ha sido utilizado por el autor y por el ingeniero Francisco Robles en su obra *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*. Con base en varios testimonios recibidos, se considera que facilita el entendimiento de los ejemplos.

Debido a que el contenido del libro está constituido por principios y conceptos cuya vigencia tiene una naturaleza más o menos permanente, no se hace referencia continua a libros y artículos que presenten avances sobre el tema. Sí se presenta, al final del mismo, una bibliografía con algunos textos que el autor considera de excelente calidad y que recomienda consultar siempre que sea posible. Algunos son libros clásicos, como el de Timoshenko, y otros son textos modernos con cualidades didácticas y magníficas presentaciones.

El material incluido puede constituir la base de un primer curso de análisis estructural con duración de un semestre, siempre que los alumnos tengan una buena base de estática que permita que el capítulo 2 y parte del capítulo 3 puedan estudiarse a ritmo de un repaso. Algunos profesores pueden considerar conveniente no incluir algunos temas, dependiendo del tiempo disponible y de la existencia de un segundo curso. Por ejemplo, si se incluye el capítulo 5, quizá no sea necesario el capítulo 6. O bien, que no es necesario incluir los tres capítulos del método de Cross.

El autor desea expresar su agradecimiento a las instituciones y personas que lo han apoyado para la realización de este texto. La Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, le ha permitido dedicar una buena parte de su tiempo a recopilar material, a organizarlo y a escribir el contenido del libro; le ha dado la oportunidad de enseñar la asignatura durante varios años, y le ha brindado recursos materiales indispensables. El contacto con sus alumnos, ha motivado al autor a tratar de comprender mejor la disciplina, para poderla transmitir, y lo ha impulsado a embarcarse en la empresa de escribir un libro que contribuya a facilitar su enseñanza. Julio Labastida, profesor de análisis estructural en la Universidad Veracruzana, revisó buena parte del material, especialmente de los ejemplos, y señaló al autor errores y omisiones que fueron oportunamente corregidos; los que no han sido detectados son responsabilidad exclusiva de quien escribe. Juan Casillas y José de la Cera, profesores de la UAM, hicieron valiosas sugerencias para mejorar el material. Y algunos alumnos han ayudado directamente al autor en la preparación de ejemplos y en la captura del material, entre ellos Alejandro Viveros Vázquez, Manuel Corona Loera, Julio Pineda Blancarte y Eduardo Arellano Méndez. Finalmente, se agradece al equipo de Limusa la confianza depositada en el autor.

Óscar M. González Cuevas
omgc@correo.azc.uam.mx

# Contenido

# CAPÍTULO 1

# Introducción



## 1.1 El diseño estructural[1]

Una estructura puede concebirse como un conjunto de partes o componentes que se combinan en forma ordenada para cumplir una función dada. Ésta puede ser: salvar un claro, como en los puentes; encerrar un espacio, como sucede en los distintos tipos de edificios, o contener un empuje, como en los muros de contención, tanques o silos. La estructura debe cumplir la función a que está destinada con un grado de seguridad razonable y de manera que tenga un comportamiento adecuado en las condiciones normales de servicio. Además, deben satisfacerse otros requisitos, tales como mantener el costo dentro de límites económicos y satisfacer determinadas exigencias estéticas.

Un examen de las condiciones anteriores hace patente la complejidad del diseño de sistemas estructurales. ¿Qué puede considerarse como seguridad razonable? ¿Qué requisitos debe satisfacer una estructura para considerar que su comportamiento sea satisfactorio en condiciones de servicio? ¿Qué es un costo aceptable? ¿Qué vida útil debe preverse? ¿Es estéticamente aceptable la estructura?

Éstas son algunas de las preguntas que el proyectista tiene en mente al diseñar una estructura. El problema no es sencillo y en su solución usa su intuición y experiencia, basándose en el análisis y la experimentación. Si los problemas de diseño se contemplan en toda su complejidad, puede afirmarse que no suelen tener solución única, sino solución razonable.

El procedimiento general que se sigue para el diseño y construcción de una obra se puede representar esquemáticamente como se muestra en la figura 1.1.[2] Después del planteamiento de una necesidad por satisfacer, se hacen estudios de geotecnia para conocer el tipo de terreno en el que se construirá la obra, y se realiza un proyecto arquitectónico. La importancia de cada uno de estos trabajos dependerá del tipo de obra. Si se trata de un puente, por ejemplo, los estudios de geotecnia serán muy importantes y quizá haya que complementarlos con estudios hidráulicos para conocer los niveles máximos que puede alcanzar el agua; en este ejemplo, el diseño arquitectónico puede no ser tan importante, ya que la forma del puente es resultado, por lo general, de la estructura seleccionada. En cambio, si se trata de un edificio urbano, el diseño arquitectónico resulta muchas veces determinante del tipo de estructura, aunque siempre es recomendable que desde estas etapas preliminares haya una coordinación adecuada

[1] Para un tratamiento más amplio de este tema, véase del mismo autor, "Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado", LIMUSA, México, 1994, Capítulo 1.

[2] Adaptada de "Manual para la Estructuración de Edificios", Departamento del Distrito Federal, Secretaría General de Obras, México, s/f.

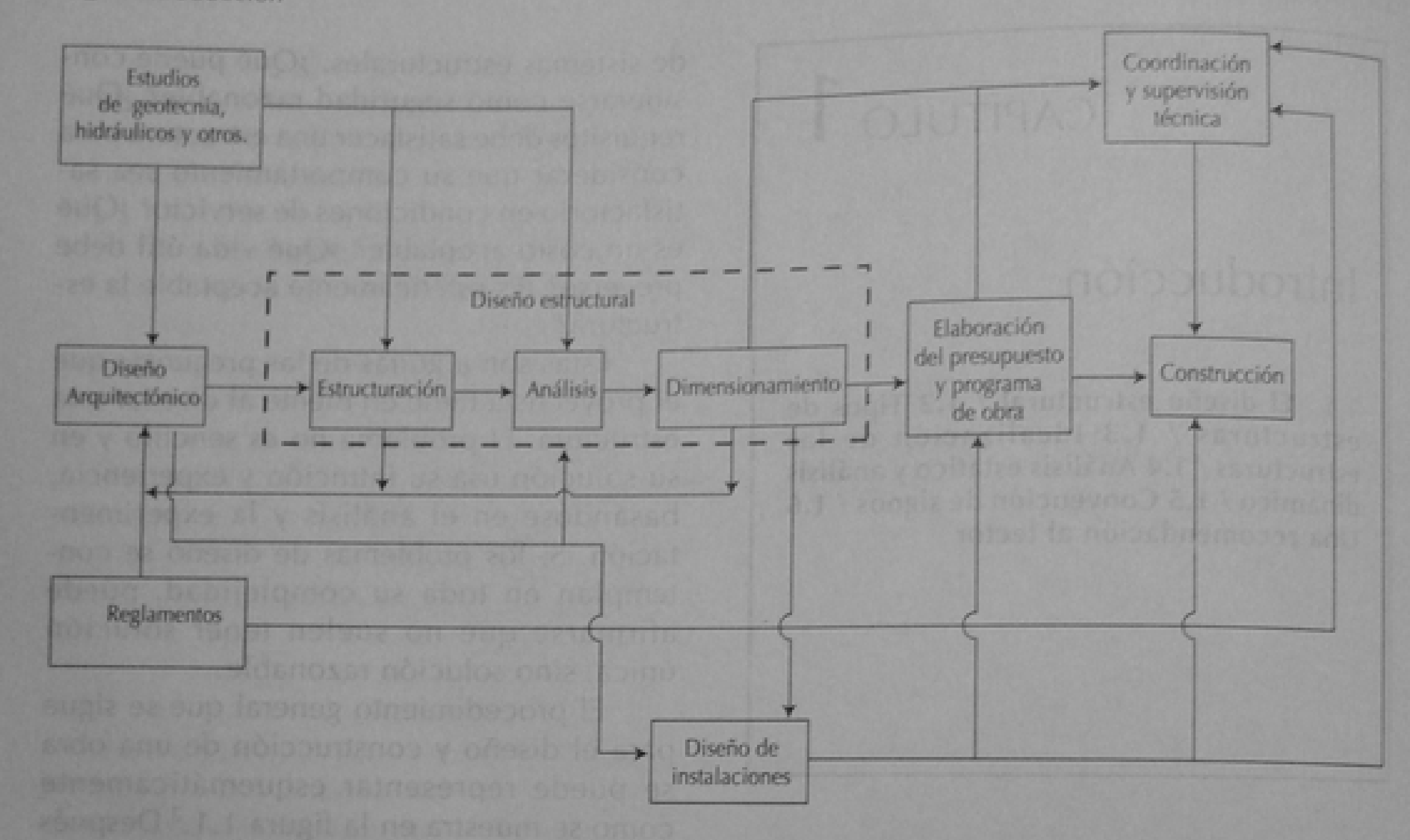



**Figura 1.1.** Procedimiento general para el diseño y construcción de obras

entre el proyecto arquitectónico y el diseño estructural y el de instalaciones. Los estudios descritos y el diseño arquitectónico se llevan a cabo siguiendo las disposiciones de los reglamentos de construcción aplicables.

A continuación, se pasa a la etapa del diseño estructural. En la figura 1.1 se indica que esta etapa puede dividirse en tres partes: estructuración, análisis y dimensionamiento. En la parte de estructuración, se establece la geometría general de la obra, respetando el diseño arquitectónico, se fijan los claros de las vigas, la separación y altura de las columnas, se seleccionan los materiales a emplear, se eligen sistemas de piso, etc. Esta parte suele llamarse "concepción de la estructura" o "configuración estructural". Es la parte más subjetiva del diseño estructural y aquella en que la experiencia, buen juicio e intuición del ingeniero juegan el papel más importante. Una estructura mal concebida presentará problemas, independientemente de qué tan bien o de con qué tanta precisión se hagan las etapas de análisis y dimensionamiento.[3] Durante esta parte, es necesario hacer algunas estimaciones preliminares del tamaño de los miembros estructurales, tanto para estimar su peso propio, que forma parte de las cargas actuantes, como para calcular sus rigideces relativas, las cuales se requieren en la parte del análisis. Estas estimaciones pueden hacerse utilizando procedimientos simplificados de análisis y dimensionamiento, o únicamente con base en la experiencia del proyectista.

Después sigue la parte del análisis de la estructura, que es el tema de este texto. La acepción más general de la palabra "análisis" es: *distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus princi-*

[3] Aunque el tema no forma parte de este texto, se recomienda a los alumnos de ingeniería estructural leer algún libro al respecto, como por ejemplo, C. Arnold y R. Reitherman, "Configuración y Diseño Sísmico de Edificios", LIMUSA, México, 1987.

*pios o elementos* (Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española). Aplicada esta idea a una estructura, lo que el análisis significa es la separación de la estructura en sus elementos constitutivos y la determinación del efecto de las cargas aplicadas a la estructura en cada elemento. Cualquier estructura es un todo continuo, pero para fines de análisis se puede dividir en distintos miembros, como serían las barras en una armadura, o las vigas , columnas y losas en una estructura de edificio, o las pilas, estribos, sistemas de piso y cables, en un puente colgante. Una vez dividida la estructura en sus distintos miembros, la determinación del efecto de las cargas en cada miembro se lleva a cabo calculando las acciones internas producidas por esas cargas, o sea, las fuerzas axiales, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes y los momentos torsionantes en cada miembro, así como las deformaciones de cada elemento y de la estructura completa. Este cálculo es la esencia del *análisis estructural* y el objetivo de este libro es presentar distintos métodos para realizarlo.

Aunque el proceso completo de diseño estructural es en buena medida subjetivo y no tiene soluciones únicas, como ya se ha comentado, la parte del análisis estructural es completamente rigurosa y conduce a soluciones únicas. Una vez planteada una estructura, las cargas que sobre ella actúan y los elementos estructurales en los que se ha dividido, las acciones internas en cada miembro tienen un valor correcto único. Las fuerzas axiales, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes y los momentos torsionantes en cada miembro deben ser los mismos, cualquiera que sea el método empleado para calcularlos. Si se usan métodos aproximados de análisis, se obtendrán acciones internas parecidas a las de las soluciones completas, que pueden aceptarse según su grado de aproximación. Sin embargo, el que las soluciones teóricas sean únicas, no significa que en la estructura real se tengan acciones exactamente iguales a las calculadas, ya que de todas maneras se hacen hipótesis sobre la forma ideal de la estructura, del comportamiento de los materiales, de la distribución de las cargas y de otros factores similares que implican trabajar sobre una representación de la estructura que no coincide totalmente con la estructura real. Por esta razón, no se justifica realizar los cálculos con una precisión excesiva, aunque la solución teórica sea única.

La tercera parte de la etapa del diseño estructural se refiere al dimensionamiento de los miembros estructurales. A partir de las acciones internas calculadas en el análisis estructural, se dimensionan miembros que puedan resistir dichas acciones dentro de condiciones de servicio aceptables. Por ejemplo, si se trata de una estructura de concreto, será necesario determinar el tamaño de los elementos estructurales, el acero longitudinal y transversal, detallar anclajes y traslapes, revisar deflexiones y agrietamientos, etc. En esta parte se recurre más que en la anterior a fórmulas empíricas y a disposiciones reglamentarias. El proyectista tiene más libertad de acción y las soluciones correctas pueden variar según su criterio o los reglamentos que use. Por ejemplo, si está dimensionando una viga de acero, puede encontrar diversos perfiles que resistan el momento flexionante calculado en el análisis de la estructura. O si la viga es de concreto, puede usar distintas relaciones entre su altura y su ancho. En los programas de ingeniería civil, generalmente se ofrecen cursos de dimensionamiento de distintos materiales, concreto, acero o madera, posteriores a los cursos de análisis estructural, para seguir la secuencia del proceso de diseño.

Puede suceder que una vez terminada la parte de dimensionamiento, los miembros de la estructura resulten de un tamaño diferente al supuesto en la parte de estructuración. Esto suele pasar cuando no se tiene mucha experiencia. Si se presenta esta situación,

puede ser necesario hacer un nuevo ciclo de la etapa de diseño estructural, ya que las cargas muertas y las rigideces relativas de los miembros estructurales han cambiado. La decisión de hacer un nuevo ciclo, o los que sean necesarios, dependerá de la diferencia entre los resultados del dimensionamiento y los valores supuestos, y de algunos otros factores. Por ejemplo, si las cargas vivas son mucho mayores que las muertas, el peso propio tendrá una menor importancia en la carga total; si se subestimaron los tamaños de todos los miembros, sus rigideces relativas, que son las que importan en el análisis, cambiarán poco, aunque sí cambien las rigideces absolutas. El buen juicio del proyectista, nuevamente jugará un papel determinante en la decisión correspondiente.

Este libro de texto tiene como alcance la parte de análisis estructural únicamente. En todos los problemas se plantea la idealización de una estructura real y de las cargas que sobre ella actúan.[4] Sin embargo, el lector deberá estar consciente de la ubicación del análisis estructural en el proceso de diseño, así como de su antecedente, la estructuración, y de su consecuente, el dimensionamiento. De otra manera, se corre el riesgo de no otorgarle su justa importancia al contenido del curso o de considerarlo como un ejercicio académico desvinculado de la realidad.

En la figura 1.1 se incluyen otras etapas del procedimiento general de diseño y construcción. Simultáneamente con el diseño estructural, se puede realizar el diseño de las instalaciones, cuya importancia varía según el tipo de obra. Aunque ambos diseños se hagan simultáneamente, no deben hacerse independientemente, ya que la ubicación de las instalaciones puede afectar el diseño estructural. Por ejemplo, pueden requerirse ductos que obliguen a detalles estructurales especiales para no debilitar la estructura. Una vez realizados el dimensionamiento y el diseño de instalaciones, y plasmados sus resultados en planos ejecutivos y especificaciones de construcción, se elabora el presupuesto de la obra y el programa de construcción. Después se ejecuta la obra, con una coordinación y supervisión técnica adecuada. Estas etapas no se comentan mayormente en este texto, no por ser menos importantes, sino por no estar directamente vinculadas al tema del análisis estructural.

## 1.2 Tipos de estructuras

En la práctica de la ingeniería se pueden encontrar muchos tipos de estructuras. Por ejemplo, existen puentes de distinto tipo, como apoyados sobre vigas longitudinales, apoyados sobre una retícula de vigas, colgantes, atirantados, con armaduras, etc. Existen bóvedas de diversas características, cilíndricas, con anillo central de compresión, con tirantes. Cascarones cilíndricos o en forma de paraboloide. Arcos de distintas formas. Vigas de un claro o continuas. Marcos rígidos. Muros con cargas normales a su plano, como los de contención, o muros con cargas en su plano, como los utilizados en edificios altos. Estructuras a base de cables colgantes. A veces se combinan dos o más de estos diversos tipos, como en edificios altos con marcos rígidos y muros.

En este texto se tratan únicamente tres tipos de estructuras: vigas de un solo claro o de varios claros, armaduras y marcos rígidos. Puede parecer que es un número muy limitado de casos en comparación con la gran variedad existente en la realidad. Sin embargo, el objetivo principal del libro es mostrar los principios fundamentales del análisis estructural, y esto puede hacerse a partir de estos tres casos.

[4] La determinación de las cargas que actúan sobre los miembros de una estructura se estudia generalmente en otros cursos de la carrera de ingeniería civil.

Prácticamente todas las estructuras reales son tridimensionales. Algunas lo son claramente, como una bóveda o un cascarón. Otras parecen planas, pero están ligadas a otras estructuras o a otros miembros perpendiculares a ellas, de tal manera que trabajan en realidad en forma tridimensional. Por ejemplo, los edificios suelen tener dos sistemas de marcos rígidos perpendiculares entre sí, ligados por el sistema de piso. Sin embargo, en muchas ocasiones las estructuras pueden dividirse, para fines de análisis, en estructuras más sencillas que pueden considerarse contenidas en un plano, o sea, estructuras planas. Por ejemplo, los distintos marcos que constituyen un edificio, pueden separarse y analizar cada uno por separado, lo cual resulta más sencillo. Las herramientas de cómputo disponibles en la actualidad permiten analizar muchas estructuras en forma tridimensional, lo cual se dificultaba notablemente cuando no se disponía de ellas. Pero también se ha considerado que los principios fundamentales del análisis estructural se pueden enseñar mejor en estructuras planas, razón por la cual son las únicas incluidas en este texto.

Con estas limitaciones en el tipo de estructuras incluidas y con el acotamiento a estructuras planas únicamente, los tres casos que se tratan en los capítulos posteriores son los mostrados en la figura 1.2. El autor considera que el dominio en la aplicación del análisis estructural a estos casos permitirá al estudiante profundizar en otros métodos para abordar estructuras más complicadas.

## 1.3 Idealización de las estructuras

Además de la transformación de las estructuras reales tridimensionales en estructuras planas, se hacen otras idealizaciones para fines de su análisis. Una de ellas es la ilustrada en la figura 1.3. Un marco cuyas vigas y columnas tienen dos dimensiones después de haberlo transformado en plano, se representa por líneas unidimensionales, normalmente coincidentes con los ejes geométricos de los miembros. Los claros de las vigas y las alturas de las columnas son las distancias entre los cruces de las líneas que representan a los miembros. Idealizaciones semejantes se hacen para los casos

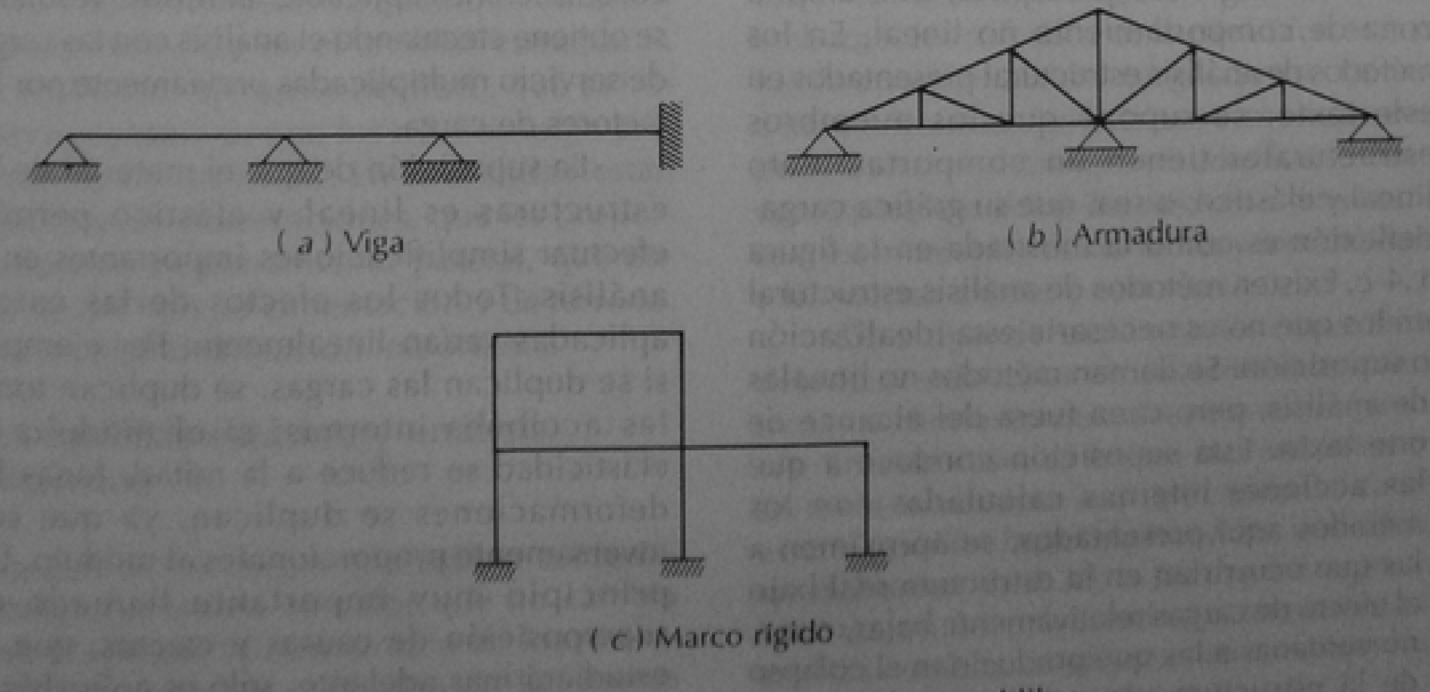



**Figura 1.2.** Tipos de estructuras incluidas en el libro

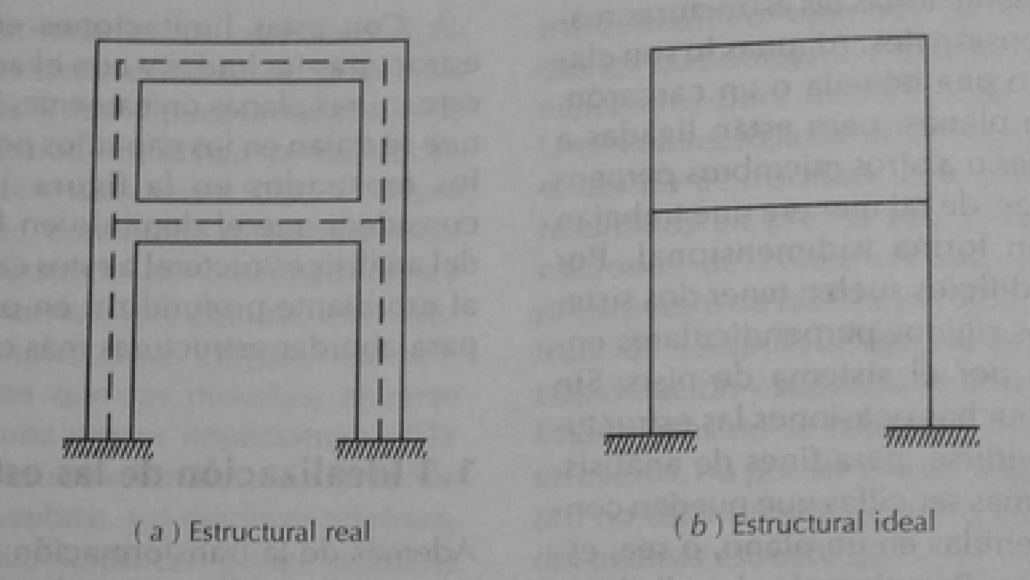



**Figura 1.3.** Idealización de una estructura

de vigas y armaduras. Por lo tanto, las estructuras de la figura 1.2 ya son idealizaciones de estructuras planas.

Otra idealización importante se refiere al material de las estructuras. Los miembros de concreto reforzado y de acero estructural, los materiales más usados en estructuras, tiene gráficas carga-deflexión como las de las figuras 1.4-*a* y *b*, respectivamente. Ambas tienen una zona aproximadamente lineal al inicio de la gráfica y después, una amplia zona de comportamiento no lineal. En los métodos de análisis estructural presentados en este texto, se supone que los miembros estructurales tienen un comportamiento lineal y elástico, o sea, que su gráfica carga-deflexión es como la mostrada en la figura 1.4-*c*. Existen métodos de análisis estructural en los que no es necesaria esta idealización o suposición. Se llaman métodos no lineales de análisis, pero caen fuera del alcance de este texto. Esta suposición conduce a que las acciones internas calculadas con los métodos aquí presentados, se aproximen a las que ocurrirían en la estructura real bajo el efecto de cargas relativamente bajas, o sea, no cercanas a las que producirían el colapso de la estructura, sino a las que producen esfuerzos dentro de la zona de comportamiento lineal de los materiales o de los miembros estructurales. Estas cargas son las llamadas cargas de servicio y, por lo tanto, el análisis se debe llevar a cabo con ellas. Si la tercera parte de la etapa de diseño estructural, el dimensionamiento, se hace con criterios de resistencia última, las acciones obtenidas en el análisis deben multiplicarse por los factores de carga especificados en el reglamento de construcciones aplicable. El mismo resultado se obtiene efectuando el análisis con las cargas de servicio multiplicadas previamente por los factores de carga.

La suposición de que el material de las estructuras es lineal y elástico permite efectuar simplificaciones importantes en el análisis. Todos los efectos de las cargas aplicadas varían linealmente. Por ejemplo, si se duplican las cargas, se duplican todas las acciones internas; si el módulo de elasticidad se reduce a la mitad, todas las deformaciones se duplican, ya que son inversamente proporcionales al módulo. Un principio muy importante llamado de superposición de causas y efectos, que se estudiará mas adelante, sólo es aplicable si el material es lineal y elástico.

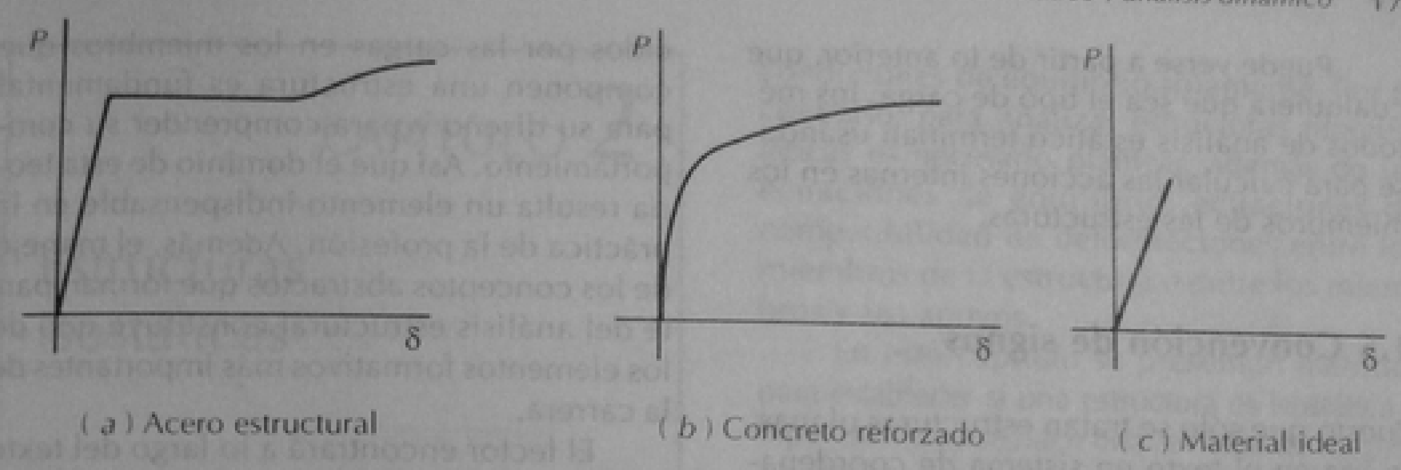



**Figura 1.4.** Gráficas carga-deflexión (P-δ) de miembros estructurales con distintos materiales

Una tercera idealización se refiere al tamaño y comportamiento de los apoyos de las estructuras y de las intersecciones de sus miembros. Los apoyos ideales, que se comentan con detalle en el capítulo 2, representan puntos en los que no hay fricciones que restrinjan el desplazamiento o las rotaciones de los miembros, o bien, que les proporcionen un empotramiento perfecto. En los apoyos reales no se presenta esta situación ideal; tienen dimensiones apreciables y siempre hay fricciones o empotramientos que no son perfectos. Lo mismo sucede con las intersecciones de miembros estructurales. Tienen dimensiones considerables y deformaciones dentro de la intersección que no se consideran normalmente en el análisis estructural. Se verá en los ejemplos del libro, que es frecuente considerar que los marcos están empotrados en sus bases. En la realidad están ligados a las cimentaciones, que les proporcionan un empotramiento parcial, que depende del tipo de cimentación y de terreno. Ésta es otra idealización importante.

## 1.4 Análisis estático y análisis dinámico

Algunas de las cargas que actúan sobre las estructuras tienen un valor que no cambia con el tiempo. El peso propio de los miembros estructurales o el peso de los muros divisorios en un edificio de oficinas son ejemplos de este tipo de cargas. Otras cargas, como las cargas vivas, aunque cambian con el tiempo, lo hacen en periodos largos, y pueden considerarse como constantes, con un valor parecido al máximo que alcancen, para fines de análisis. Cuando el análisis estructural se efectúa con cargas permanentes, como las anteriores, se denomina análisis estático. Este tipo de análisis es el estudiado en este libro.

Las estructuras pueden estar sujetas a acciones externas cuya magnitud varía rápidamente con el tiempo, como los sismos o el viento. Los efectos de estas acciones se estudian en los cursos de dinámica estructural y no están incluidos en este texto. Sin embargo, los métodos de la dinámica estructural permiten calcular cargas que se aplican a las estructuras, las cuales se analizan después con los métodos estudiados en este curso para encontrar las acciones internas, o sea, los momentos flexionantes y torsionantes, y las fuerzas axiales y cortantes.

Otro tipo de acciones externas es el debido a vehículos en movimiento, como trenes o camiones que circulen sobre puentes. En este caso, el efecto del movimiento se toma en cuenta multiplicando la carga estática por un factor de impacto, que suele ser del orden de 1.30, o sea, se incrementa la carga en 30 por ciento. La estructura se analiza con esta carga incrementada con los métodos de análisis estático.

Puede verse a partir de lo anterior, que cualquiera que sea el tipo de carga, los métodos de análisis estático terminan usándose para calcular las acciones internas en los miembros de las estructuras.

## 1.5 Convención de signos

Puesto que sólo se tratan estructuras planas, se usa en el texto un sistema de coordenadas *x*, *y*. El eje *x* coincide con el eje longitudinal de los miembros, y el eje *y*, con el transversal. La convención de signos para cada una de las acciones internas, para las deflexiones y para las rotaciones se presenta al introducir cada tema. Esta convención es congruente a lo largo de todo el texto. Se ha usado la convención más usual en los libros de texto de análisis estructural, pero el lector debe estar prevenido de que no es la única empleada en este tipo de textos. Al consultar otros libros, lo cual es altamente recomendable, debe observarse cuál es la convención de signos usada. También es posible que al usar programas de cómputo para análisis estructural se encuentren convenciones de signos diferentes. Esto sucede con frecuencia en los programas tridimensionales, en los cuales se emplea el llamado sistema coordenado derecho.[5] Cuando se tiene una comprensión clara de los conceptos fundamentales de análisis estructural, el cambio en la convención de signos no debe acarrear problemas mayores.

## 1.6 Una recomendación al lector

La teoría del análisis estructural es uno de los pilares fundamentales de la ingeniería civil. El conocimiento de los efectos producidos por las cargas en los miembros que componen una estructura es fundamental para su diseño y para comprender su comportamiento. Así que el dominio de esta teoría resulta un elemento indispensable en la práctica de la profesión. Además, el manejo de los conceptos abstractos que forman parte del análisis estructural constituye uno de los elementos formativos más importantes de la carrera.

El lector encontrará a lo largo del texto una serie de conceptos, cada uno de los cuales está sustentado en los anteriores. Es prácticamente imposible abordar el contenido de un capítulo o de un tema, si no se tiene un conocimiento sólido de los anteriores. Se recomienda, por lo tanto, de manera enfática, no abandonar el estudio de un tema si no se ha comprendido totalmente y si no se ha practicado mediante la resolución de varios ejercicios. Esta práctica es indispensable para alcanzar un conocimiento pleno de la teoría.

Algunos conceptos incluidos en cursos anteriores también resultan necesarios para el estudio del análisis estructural. Se recomienda al lector repasar las ideas fundamentales de los cursos de estática, principalmente la obtención de diagramas de acciones internas: momentos flexionantes, fuerzas cortantes, fuerzas axiales y momentos torsionantes. Son temas recurrentes a lo largo del curso. No se requieren conocimientos de matemáticas avanzadas, pero sí un dominio de los conceptos básicos de cálculo diferencial e integral, así como de matrices.

El autor está seguro de que los lectores encontrarán un reto intelectual muy interesante en el estudio del análisis estructural, y espera que vean recompensados el esfuerzo y la dedicación que pongan en el mismo al ejercer la práctica profesional con la confianza que proporciona el dominio de este tema.

[5] Véase, por ejemplo, A. Bedford y W. Fowler, "Mecánica para Ingeniería – Estática". Addison Wesley Latinoamericana, México, 1996, p. 38.

# CAPÍTULO 2

# Estructuras isostáticas



## 2.1 Introducción

Las estructuras se dividen, desde el punto de vista de los métodos de análisis, en isostáticas o estáticamente determinadas, y en hiperestáticas o estáticamente indeterminadas. Las primeras son aquellas que pueden analizarse utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio de la estática. Es decir, que pueden encontrarse las fuerzas cortantes, momentos flexionantes, fuerzas normales y momentos torsionantes, a partir de condiciones de equilibrio solamente. Por el contrario, para analizar estructuras hiperestáticas es necesario plantear, además de las ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad de deformaciones entre los miembros de la estructura o entre los miembros y los apoyos.

En este capítulo se presentan métodos para establecer si una estructura es isostática o hiperestática y se hace una revisión de los procedimientos para resolver estructuras isostáticas, los cuales han sido estudiados con mayor detalle en los cursos de estática o de mecánica de materiales que suelen preceder a los cursos de análisis estructural.

## 2.2 Reacciones en los apoyos

Uno de los pasos necesarios para establecer si una estructura es isostática o hiperestática consiste en calcular el número de reacciones que se desarrollan en los apoyos de la estructura. Por lo tanto, es necesario determinar las reacciones que ocurren en los diversos tipos de apoyo que se encuentran en la práctica.

Los tres tipos básicos de apoyo se muestran esquemáticamente en la figura 2.1. El apoyo simple restringe a la estructura contra desplazamientos verticales, pero permite desplazamientos horizontales y rotaciones o giros. En estos apoyos se desarrolla una

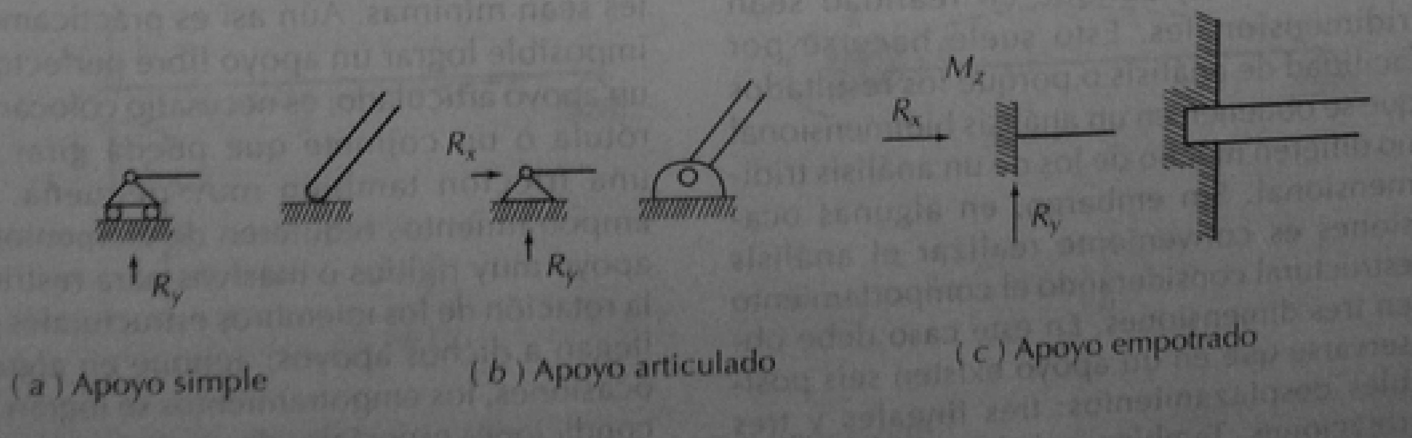



**Figura 2.1.** Tipos de apoyos básicos

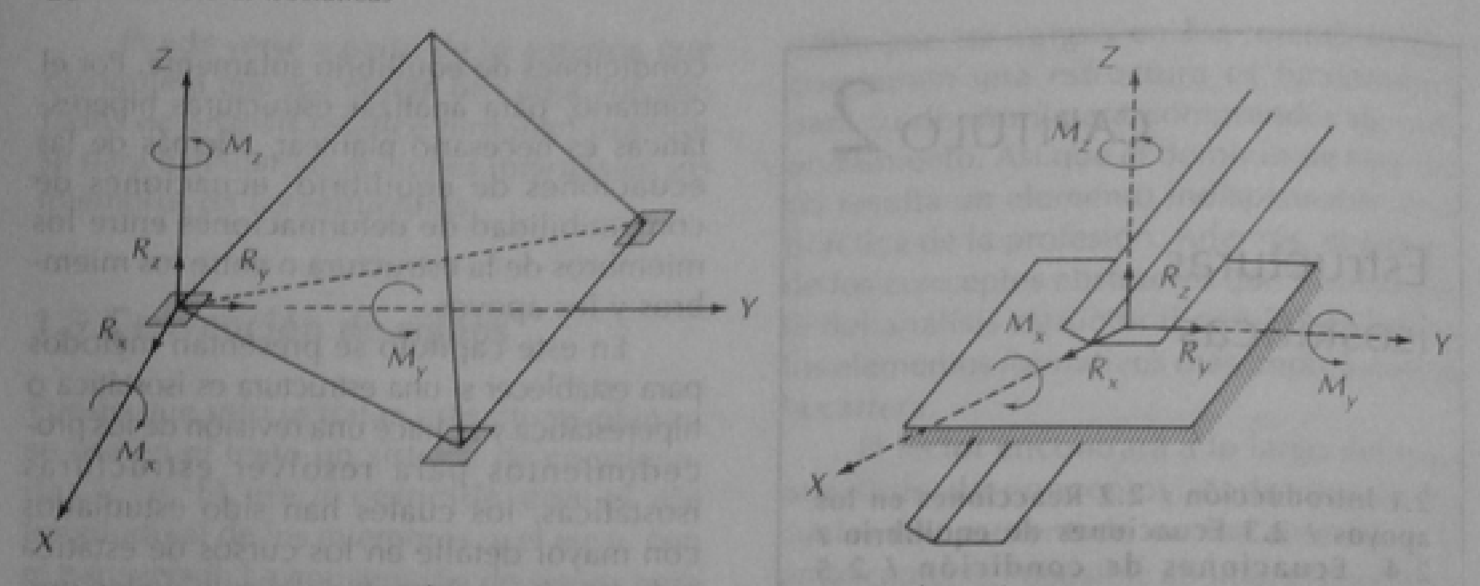



**Figura 2.2.** Empotramiento en tres direcciones

reacción vertical, $R_y$, pero la reacción horizontal, $R_x$, y el momento, $M_z$, son nulos. Por lo tanto sólo existe una reacción de apoyo.

El apoyo articulado restringe los desplazamientos verticales y horizontales, pero permite la rotación. Existen por lo tanto dos reacciones de apoyo, $R_x$ y $R_y$, y el momento, $M_z$, es nulo.

El apoyo empotrado restringe los tres movimientos que pueden ocurrir en el plano: los desplazamientos verticales y horizontales y la rotación. En estos apoyos se desarrollan tres reacciones, $R_x$, $R_y$ y $M_z$.

Los casos mostrados en la figura 2.1 representan apoyos de estructuras contenidas en un plano, o sea, estructuras bidimensionales. Muchas estructuras reales pueden idealizarse o representarse en forma bidimensional, aunque en realidad sean tridimensionales. Esto suele hacerse por facilidad de análisis o porque los resultados que se obtienen en un análisis bidimensional no difieren mucho de los de un análisis tridimensional. Sin embargo, en algunas ocasiones es conveniente realizar el análisis estructural considerando el comportamiento en tres dimensiones. En este caso debe observarse que en un apoyo existen seis posibles desplazamientos: tres lineales y tres rotaciones. También existirán por lo tanto seis posibles reacciones de apoyo, $R_x$, $R_y$, $R_z$, $M_x$, $M_y$ y $M_z$. Las tres primeras restringen los posibles desplazamientos lineales y las otras tres, las posibles rotaciones. Nótese que la reacción $M_z$ restringe la rotación del elemento estructural en un plano paralelo a su sección transversal, ocasionando una torsión en el elemento. En la figura 2.2 se muestra el caso de un empotramiento en tres dimensiones en el que se desarrollan las seis reacciones de apoyo.

Todos los casos mostrados corresponden a apoyos ideales que son difíciles de lograr totalmente en estructuras reales. Para obtener, por ejemplo, un apoyo libre deben colocarse rodillos entre dos placas rígidas y reducirse al máximo la fricción entre rodillos y placas para que las fuerzas horizontales sean mínimas. Aún así es prácticamente imposible lograr un apoyo libre perfecto. En un apoyo articulado, es necesario colocar una rótula o un cojinete que pueda girar con una fricción también muy pequeña. Los empotramientos requieren de elementos de apoyo muy rígidos o masivos para restringir la rotación de los miembros estructurales que llegan a dichos apoyos; aunque en algunas ocasiones, los empotramientos se logran por condiciones especiales de simetría, como en el caso mostrado en la figura 2.3. La viga

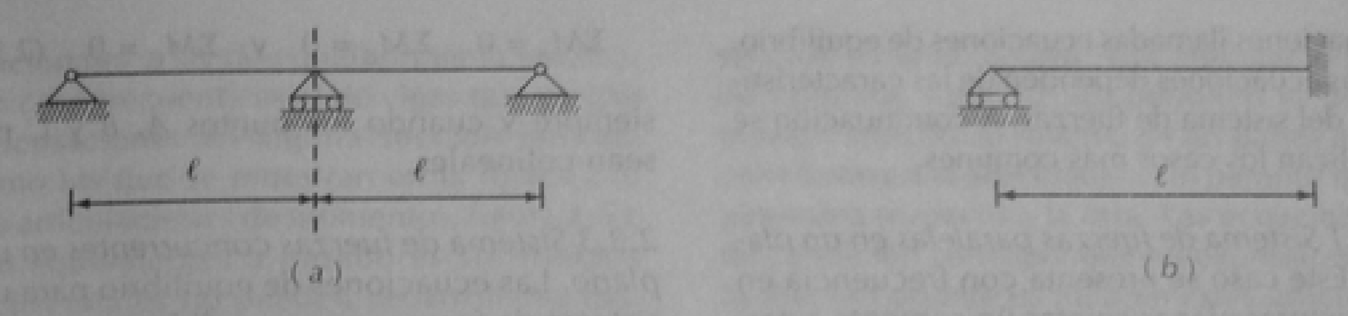



**Figura 2.3.** Empotramiento por simetría

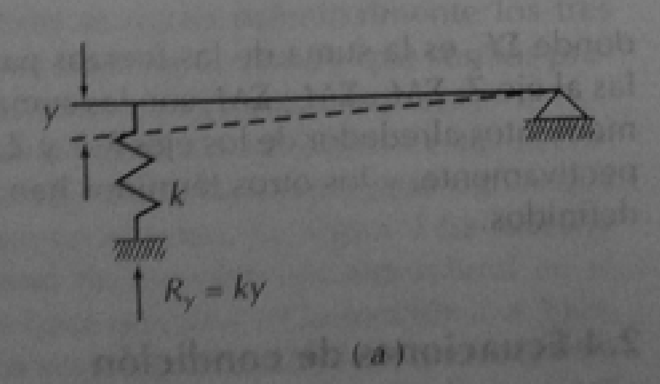
simétrica de dos claros de la figura 2.3*a* es equivalente a una viga con un extremo empotrado y otro articulado, figura 2.3*b*, ya que precisamente por la simetría no puede haber rotación de la viga en el apoyo central si las cargas son simétricas.

Las condiciones reales de una estructura hacen aconsejable en algunos casos plantear apoyos que difieren de los casos ideales de la figura 2.1. Por ejemplo, en una estructura apoyada sobre un terreno muy compresible, puede ser más representativo usar un apoyo de tipo resorte, como el mostrado en la figura 2.4*a*, que cede parcialmente a la fuerza vertical. El valor de la reacción vertical sería en este caso $ky$, donde $k$ es la constante del resorte y $y$ es el desplazamiento vertical del apoyo. También pueden plantearse empotramientos semirrígidos, que se idealizan como se muestra en la figura 2.4*b*. En este caso, el valor del momento que se desarrolla en el apoyo es $k\theta$, donde $k$ es nuevamente la constante del resorte y $\theta$ es la rotación del elemento que llega al empotramiento.

## 2.3 Ecuaciones de equilibrio

Un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio estático cuando su resultante es nula. Si un cuerpo sólido se encuentra sujeto a un sistema de fuerzas en equilibrio estático permanece en reposo, pero si el sistema de fuerzas no está en equilibrio estático, el cuerpo se mueve. Un cuerpo que se mueve puede estar en equilibrio dinámico, si las fuerzas que se le aplican y la fuerza de inercia producida por el movimiento tienen una resultante nula. En este texto, cuando se hable de equilibrio se entenderá siempre que se trata de equilibrio estático.

Para determinar si un sistema de fuerzas está en equilibrio, o sea, si su resultante es nula, se debe revisar que se cumplan ciertas



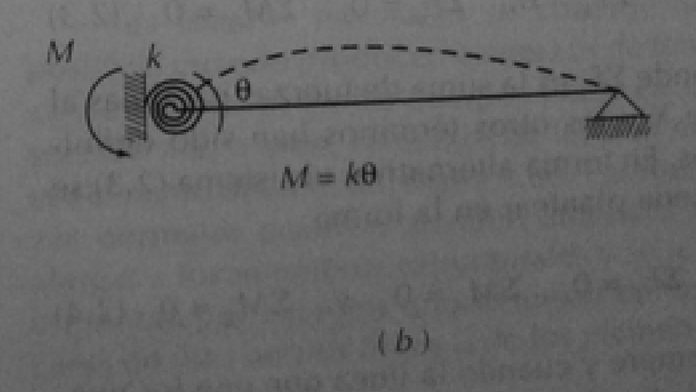




**Figura 2.4.** Apoyo tipo resorte

ecuaciones llamadas ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones dependen de las características del sistema de fuerzas. A continuación se analizan los casos más comunes.

*2.3.1 Sistema de fuerzas paralelas en un plano.* Este caso se presenta con frecuencia en estructuras planas sujetas únicamente a cargas por gravedad. Las cargas y las reacciones de apoyo son todas verticales y por lo tanto, paralelas. Las ecuaciones de equilibrio son dos:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_o = 0 \qquad (2.1)$$

donde $\Sigma F_y$ representa la suma de las cargas verticales, o sea, paralelas al eje *Y*, y $\Sigma M_o$ representa la suma de momentos alrededor de cualquier punto situado en el plano en que están contenidas las fuerzas. En forma alternativa se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio que expresen la suma de momentos alrededor de dos puntos distintos *A* y *B*, pero el número de ecuaciones no se altera:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_B = 0 \qquad (2.2)$$

*2.3.2 Sistema de fuerzas no paralelas en un plano.* Cuando en una estructura plana actúan cargas en distintas direcciones, estas fuerzas y las reacciones de apoyo constituyen un sistema de fuerzas no paralelas. Se tienen en este caso tres ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_o = 0 \qquad (2.3)$$

donde $\Sigma F_x$ es la suma de fuerzas paralelas al eje *X* y los otros términos han sido definidos. En forma alternativa, el sistema (2.3) se puede plantear en la forma

$$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_A = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_B = 0 \qquad (2.4)$$

siempre y cuando la línea que une los puntos *A* y *B* no sea perpendicular al eje *Y*, o bien, en la forma

$$\Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_C = 0 \qquad (2.5)$$

siempre y cuando los puntos *A*, *B* y *C* no sean colineales.

*2.3.3 Sistema de fuerzas concurrentes en un plano.* Las ecuaciones de equilibrio para un sistema de fuerzas comprendidas en un plano y que además concurren en un punto, puede expresarse de las tres maneras siguientes:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \qquad (2.6)$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_A = 0 \qquad (2.7)$$

siempre y cuando el punto *A* no esté situado sobre la recta perpendicular al eje *Y* que pasa por el punto de concurrencia, y

$$\Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0 \qquad (2.8)$$

siempre y cuando la recta que une los puntos *A* y *B* no pase por el punto de concurrencia de las fuerzas.

*2.3.4 Sistema de fuerzas en el espacio.* Este es el caso más general y se presenta en estructuras tridimensionales con cargas no paralelas. Se tienen seis ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0,$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0 \qquad (2.9)$$

donde $\Sigma F_z$ es la suma de las fuerzas paralelas al eje *Z*, $\Sigma M_x$, $\Sigma M_y$, $\Sigma M_z$ son las sumas de momentos alrededor de los ejes *X*, *Y* y *Z*, respectivamente, y los otros términos han sido definidos.

## 2.4 Ecuaciones de condición

Algunas estructuras poseen características especiales que permiten plantear ecuaciones

adicionales a las de equilibrio de la estática. Un caso frecuente es el de vigas que tengan articulaciones en alguna sección interior, como las que se muestran en la figura 2.5. Las articulaciones de momentos, figura 2.5*a*, son equivalentes a pasadores sin fricción en los cuales no pueden desarrollarse momentos flexionantes porque permiten el giro libre de los miembros estructurales que concurren en la articulación. Por lo tanto, en cada articulación de momento puede plantearse una ecuación de condición que exprese que el momento flexionante en esa sección es igual a cero. Las articulaciones de cortante, figura 2.5*b*, permiten el desplazamiento lineal relativo de las partes que concurren en la articulación sin permitir que giren una respecto a la otra. Las ecuaciones de condición correspondientes expresan que la fuerza cortante es nula en estas articulaciones. Obsérvese que en las articulaciones de momento, aunque el momento flexionante sea nulo, existe fuerza cortante, mientras que en las articulaciones de cortante, no hay fuerza cortante pero sí hay momento flexionante.

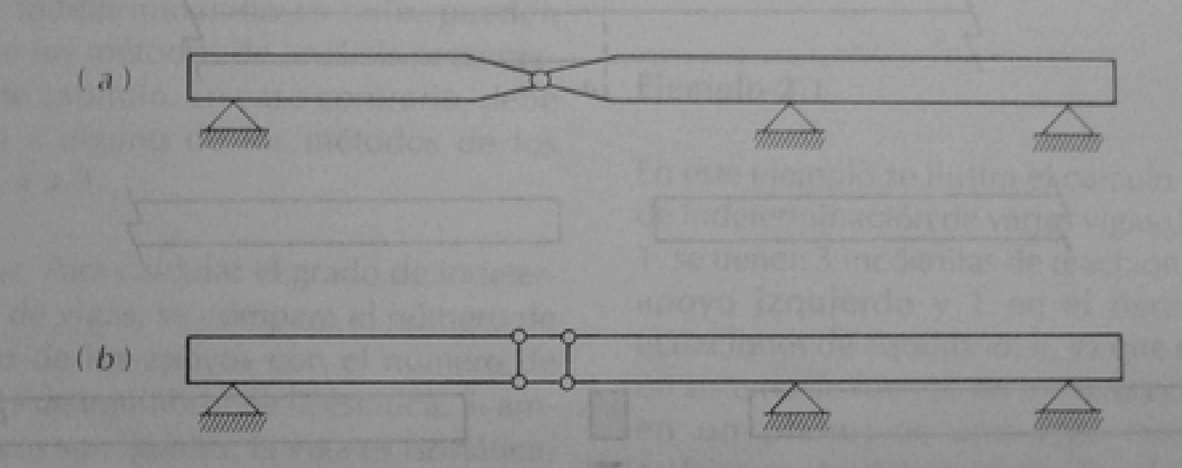



**Figura 2.5.** Vigas articuladas

## 2.5 Acciones internas

En el interior de los miembros estructurales se desarrollan acciones que pueden ser fuerzas normales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momentos torsionantes. En este texto se tratan principalmente los tres primeros tipos de acciones, que son los predominantes en estructuras planas.

En la figura 2.6 se indican estas acciones interiores y la convención de signos que se sigue en el texto. La figura 2.6*a* muestra un tramo de un miembro estructural en el que se hace un corte en la sección *a-a*. Existen dos maneras de analizar lo que sucede a ambos lados de este corte. En la primera manera, simplemente se separan los dos cuerpos libres y se analizan las fuerzas internas en las caras adyacentes al corte, figura 2.6*b*. En la segunda manera, se considera que entre los dos cuerpos libres queda un elemento de longitud diferencial y se analizan las fuerzas internas que actúan en este elemento diferencial, figura 2.6*c*.

Las fuerzas normales se consideran positivas cuando producen esfuerzos de tensión en las caras de los cuerpos libres en la sección *a-a*, o bien, esfuerzos de tensión en el elemento diferencial, figura 2.6*d*. Las fuerzas normales positivas tienden entonces a alargar a los miembros estructurales y se representan por vectores que se alejan de las caras de los cuerpos libres o de los elementos diferenciales.

En la figura 2.6*e* se muestra la convención de signos para fuerza cortante. Es posi-

tiva cuando actúa hacia abajo en el cuerpo libre de la izquierda y hacia arriba en el cuerpo libre de la derecha, o lo que es equivalente, hacia arriba en la cara izquierda del elemento diferencial y hacia abajo en la cara derecha. Una fuerza cortante positiva tiende a desplazar hacia abajo el cuerpo libre de la derecha respecto al cuerpo libre de la izquierda.

La convención de signos para momento flexionante se indica en la figura 2.6*f*. Un momento positivo produce esfuerzos de compresión en las fibras superiores de los miembros o del elemento diferencial y de tensión en las fibras inferiores. Por lo tanto, un miembro estructural sujeto a momento flexionante positivo se deforma de tal manera que tiende a ser cóncavo hacia arriba.

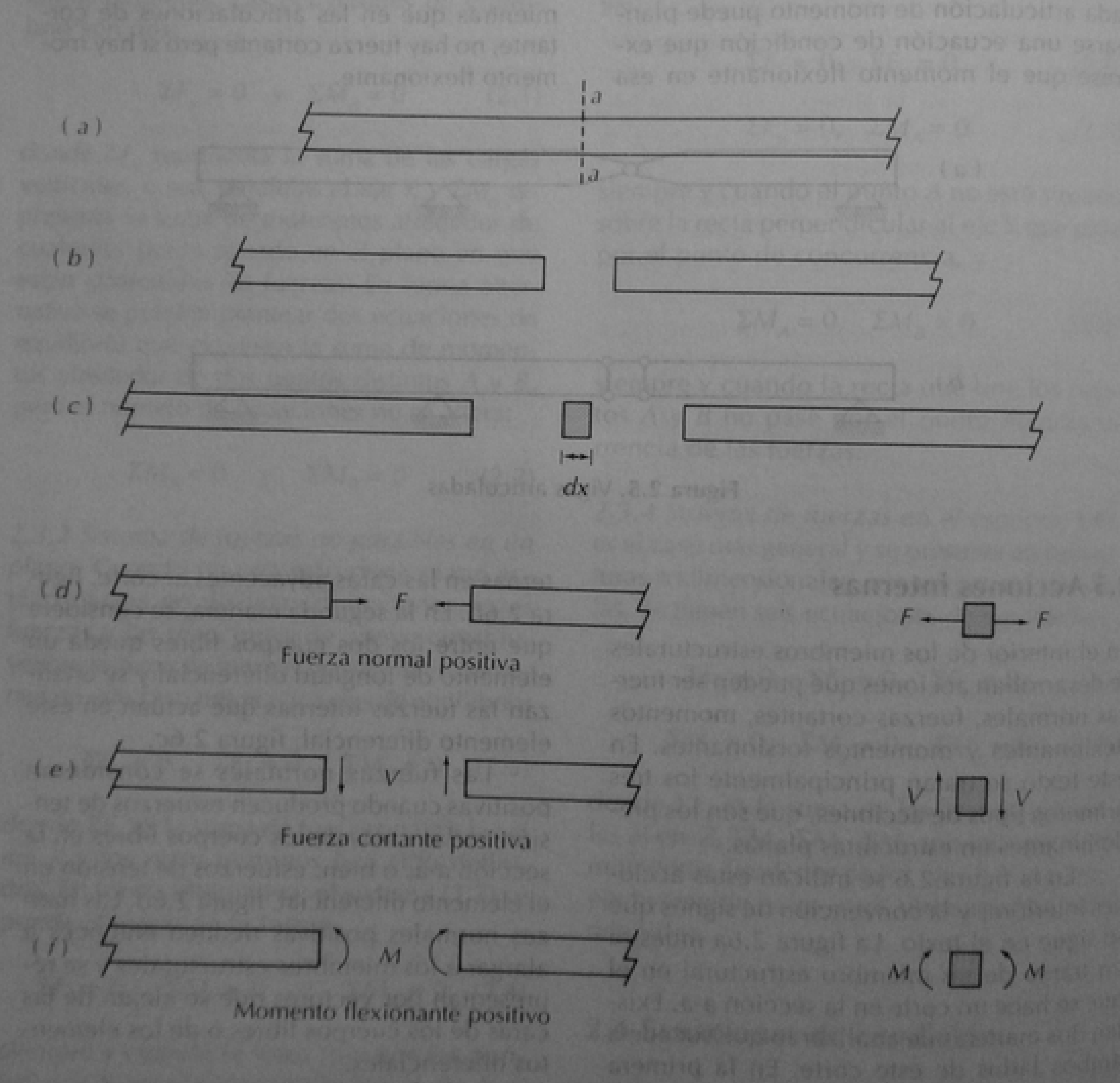



**Figura 2.6.** Convención de signos para las acciones internas

## 2.6 Cálculo del grado de indeterminación

Cuando una estructura es isostática, su grado de indeterminación es cero, ya que es estáticamente determinada. Las estructuras hiperestáticas pueden tener distintos grados de indeterminación. Por cada grado se requiere una ecuación adicional de compatibilidad de deformaciones. A continuación se indica la manera de calcular el grado de indeterminación de distintos tipos de estructuras: vigas, armaduras y marcos. Cuando el grado de indeterminación es nulo, pueden emplearse los métodos de análisis presentados en este capítulo. En caso contrario, debe recurrirse a alguno de los métodos de los capítulos 4 a 9.

*2.6.1 Vigas*. Para calcular el grado de indeterminación de vigas, se compara el número de reacciones de los apoyos con el número de ecuaciones de equilibrio de la estática. Si ambos números son iguales, la viga es isostática, o sea, su grado de indeterminación es nulo. Si el número de reacciones de los apoyos es mayor que el de ecuaciones de equilibrio, la viga es hiperestática de grado $x$, siendo $x$ la diferencia entre ambos números. Si el número de reacciones de los apoyos es menor que el número de ecuaciones de equilibrio, la viga no puede mantenerse en equilibrio. Se dice que es inestable. Cuando la viga tiene ecuaciones de condición, el número de estas ecuaciones debe sumarse al de ecuaciones de equilibrio y comparar el resultado con el número de reacciones de los apoyos.

Si se denomina por $n$ al número de ecuaciones de equilibrio, por $c$ al número de ecuaciones de condición y por $r$ al número de reacciones de apoyo, se pueden plantear, de acuerdo a lo anterior, las siguientes condiciones:

Si $r = n + c$
la viga es estáticamente determinada

Si $r > (n + c)$,
la viga es estáticamente indeterminada

Si $r < (n + c)$,
la viga es inestable (2.10)

Bajo condiciones especiales, puede haber vigas que sean inestables aun cuando se cumplan las condiciones $r = (n + c)$, o, $r > (n + c)$. En la sección 2.6.4 se estudian estos casos. Por esta razón, las condiciones mencionadas son necesarias pero no suficientes para la estabilidad de las vigas.

**Ejemplo 2.1**

En este ejemplo se ilustra el cálculo del grado de indeterminación de varias vigas. En el caso 1, se tienen 3 incógnitas de reacción, $r$, 2 en el apoyo izquierdo y 1 en el derecho, y 3 ecuaciones de equilibrio, $n$, ya que se trata de un sistema de fuerzas no paralelas contenidas en un plano; es una viga isostática o estáticamente determinada. En el caso 2, la viga es hiperestática o estáticamente indeterminada, ya que $r > n$ y $c = 0$. La viga del caso 3 es inestable, porque solo hay 2 reacciones de apoyo y 3 ecuaciones de equilibrio, así que $r < n$; obsérvese que si las cargas que actúan sobre la viga fuesen todas verticales, la viga sería estable ya que únicamente habría 2 ecuaciones de equilibrio por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas en un plano; puede verse que si hay cargas inclinadas, la viga se desplaza horizontalmente, mientras que si todas las cargas son verticales, permanece estable. Los casos 4, 5 y 6 no presentan mayor dificultad para su resolución. En la viga del caso 7 existe una ecuación de condición, ya que en la articulación interior el momento flexionante vale 0. Por consiguiente $r = n + c$. En el caso 8 existen 2 ecuaciones de condición. En el último caso, hay 5 reacciones de apoyo, 3 ecuaciones de equilibrio y 2 de condición; la viga es isostática; obsérverse que en este

caso, si las cargas fuesen todas verticales, habría 3 reacciones de apoyo, 2 ecuaciones de equilibrio y una sola ecuación de condición, porque al estar situadas las dos articulaciones en un eje vertical sólo podría plantearse una ecuación de suma de momentos igual a cero.

## EJEMPLO 2.1. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN EN VARIAS VIGAS

| Caso | Viga | Número de incógnitas de reacción ($r$) | Número de ecuaciones de equilibrio ($n$) | Número de ecuaciones de condición ($c$) | Condición estática |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 3 | 3 | 0 | Estáticamente determinada (viga simple) |
| 2 | | 5 | 3 | 0 | Estáticamente indeterminada (viga continua) |
| 3 | | 2 | 3 | 0 | Inestable |
| 4 | | 3 | 3 | 0 | Estáticamente determinada (viga en voladizo) |
| 5 | | 6 | 3 | 0 | Estáticamente indeterminada de grado 3 (viga doblemente empotrada) |
| 6 | | 4 | 3 | 0 | Estáticamente indeterminada de grado 1 (viga apuntalada) |
| 7 | | 4 | 3 | 1 | Estáticamente determinada |
| 8 | | 5 | 3 | 2 | Estáticamente determinada |
| 9 | | 5 | 3 | 2 | Estáticamente determinada |

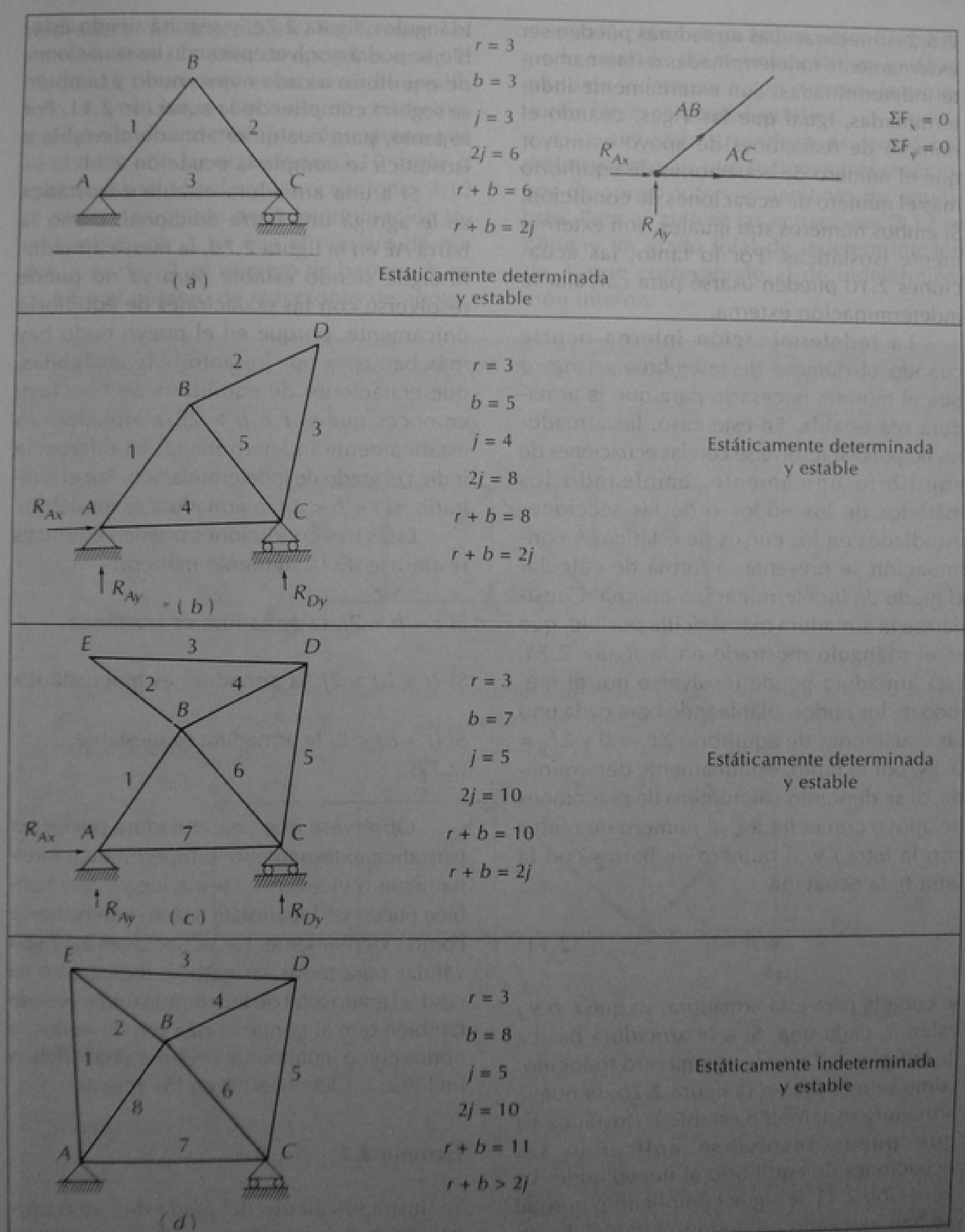



**Figura 2.7.** Relación entre el número de incógnitas de reacción, nudos y miembros en armaduras

*2.6.2 Armaduras*. Las armaduras pueden ser externamente indeterminadas o internamente indeterminadas. Son externamente indeterminadas, igual que las vigas, cuando el número de reacciones de apoyo es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio más el número de ecuaciones de condición. Si ambos números son iguales, son externamente isostáticas. Por lo tanto, las ecuaciones 2.10 pueden usarse para calcular la indeterminación externa.

La indeterminación interna ocurre cuando el número de miembros es mayor que el mínimo necesario para que la armadura sea estable. En este caso, las armaduras no pueden resolverse con las ecuaciones de equilibrio únicamente, empleando los métodos de los nudos o de las secciones estudiados en los cursos de estática. A continuación se presenta la forma de calcular el grado de indeterminación interna. Considérese la armadura más sencilla posible, que es el triángulo mostrado en la figura 2.7*a*. Esta armadura puede resolverse por el método de los nudos, planteando para cada uno las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Es, por lo tanto, estáticamente determinada. Si se denomina al número de reacciones de apoyo con la letra $r$, al número de nudos con la letra $j$ y al número de barras con la letra $b$, la ecuación

$$r + b = 2j \qquad (2.11)$$

se cumple para esta armadura, ya que $r$, $b$ y $j$ valen 3, cada una. Si a la armadura básica de la figura 2.7*a*, se le agrega otro triángulo, como se muestra en la figura 2.7*b*, la nueva armadura es también estable e isostática ya que puede resolverse aplicando las ecuaciones de equilibrio al nuevo nudo. La ecuación 2.11 se sigue cumpliendo, porque se han agregado un nudo y 2 barras. La armadura puede ampliarse agregando más triángulos, figura 2.7*c*, y seguirá siendo estable, se podrá resolver aplicando las ecuaciones de equilibrio a cada nuevo nudo y también se seguirá cumpliendo la ecuación 2.11. Por lo tanto, para cualquier armadura estable e isostática se cumple la ecuación 2.11.

Si a una armadura estable e isostática se le agrega una barra adicional, como la barra *AE* en la figura 2.7*d*, la nueva armadura sigue siendo estable pero ya no puede resolverse con las ecuaciones de equilibrio únicamente, porque en el nuevo nudo hay más barras, y por lo tanto más incógnitas, que ecuaciones de equilibrio. Se concluye entonces que si $r + b > 2j$ la armadura es estáticamente indeterminada. La diferencia indica el grado de indeterminación. Por el contrario, si $r + b < 2j$, la armadura es inestable.

Estas tres condiciones pueden entonces resumirse de la siguiente manera:

Si $r + b = 2j$, la armadura es isostática

Si $(r + b) > 2j$, la armadura es hiperestática

Si $(r + b) < 2j$ la armadura es inestable.
(2.12)

Obsérvese que una armadura puede ser isostática externamente e hiperestática internamente o viceversa. Desde luego, que también puede ser hiperestática tanto internamente como externamente. Las ecuaciones 2.12 son válidas para todos los casos e indican, en su caso, el grado total de indeterminación. Nótese también que al contar el número de nudos, o nodos como igualmente se denominan, deben incluirse los localizados en los apoyos.

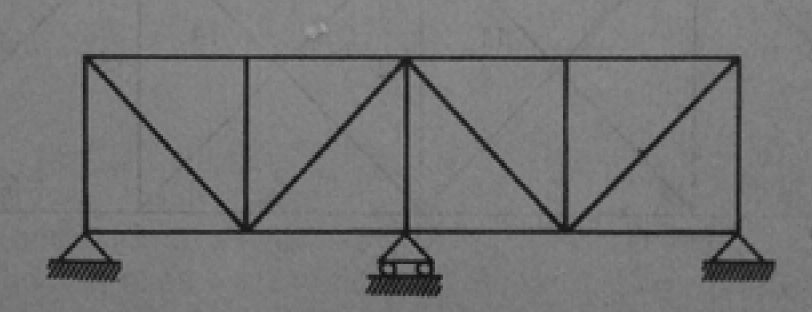
**Ejemplo 2.2**

Se ilustra el cálculo del grado de indeterminación de dos armaduras. La primera, es una armadura con tres apoyos: uno libremente

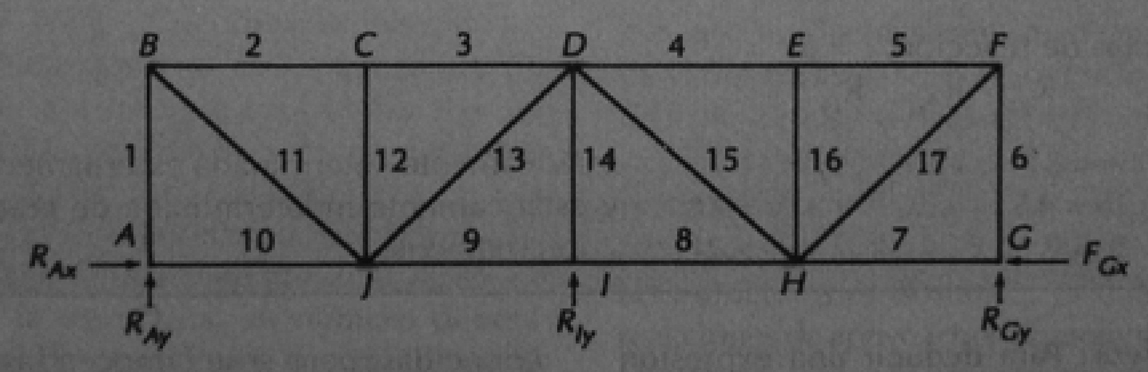
apoyado y dos articulados. Por lo tanto, el número de reacciones de apoyo, *r*, es de 5. Ya que se tienen tres ecuaciones de equilibrio, *n*, y no hay ecuaciones de condición, *c*, el grado de indeterminación externa que se obtiene con las ecuaciones 2.10 es de 2. Por otra parte, al aplicar las ecuaciones 2.12 se obtiene un grado de indeterminación total también de 2, ya que el número de nudos, *j*, es de 10, el número de barrras, *b*, es de 17 y el número de reacciones de apoyo, *r*, es de 5 como ya se había visto. Como el grado total de indeterminación es igual al grado de indeterminación externa, la armadura es internamente isostática.

La segunda armadura es isostática externamente, ya que se tienen tres reacciones de apoyo y tres ecuaciones de equilibrio. Pero al aplicar las ecuaciones 2.12 se obtiene un grado total de indeterminación de 2, que corresponde al de indeterminación interna.

## EJEMPLO 2.2. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN DE ARMADURAS



*Solución:* primeramente se identifica el número de reacciones, el número de nodos y el número de barras. Enseguida se determina su condición estática tanto interna como externamente.




Ecuaciones de equilibrio, $n = 3$:

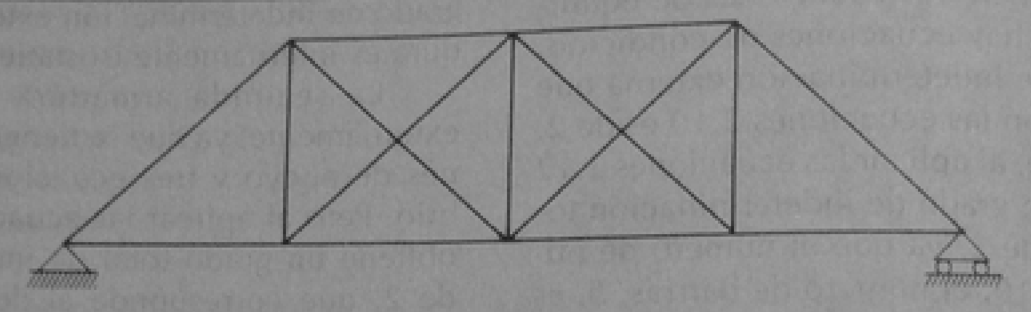
$$\Sigma F_x = 0; \;\; \Sigma F_y = 0; \;\; \Sigma M = 0$$

Incógnitas de reacción = 5:

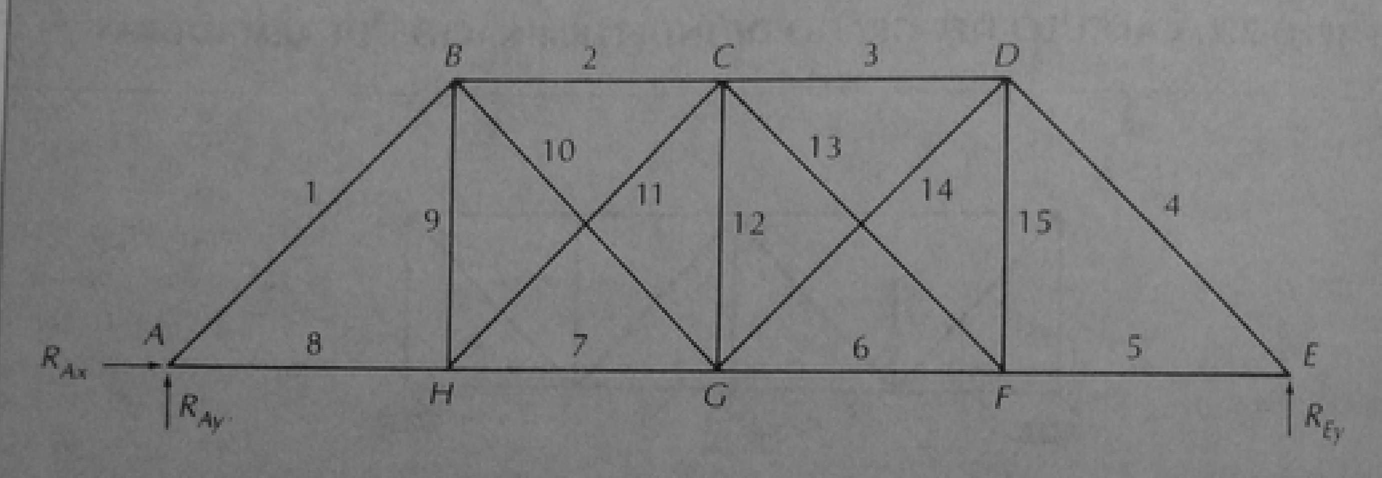
$$R_{Ax}, \;\; R_{Ay}, \;\; R_{Iy}, \;\; R_{Gx}, \;\; R_{Gy}$$

| | | |
|---|---|---|
| $j = 10$ | $2j = 20$ | Estáticamente indeterminada externamente |
| $b = 17$ | $r + b = 22$ | de grado 2 y estáticamente determinada |
| $r = 5$ | $r + b > 2j$ | internamente |

## EJEMPLO 2.2 *(continuación)*



*Solución:* primeramente se identifican las reacciones, el número de nudos y el número de barras, enseguida se determina su condición estática




Ecuaciones de equilibrio, $n = 3$:

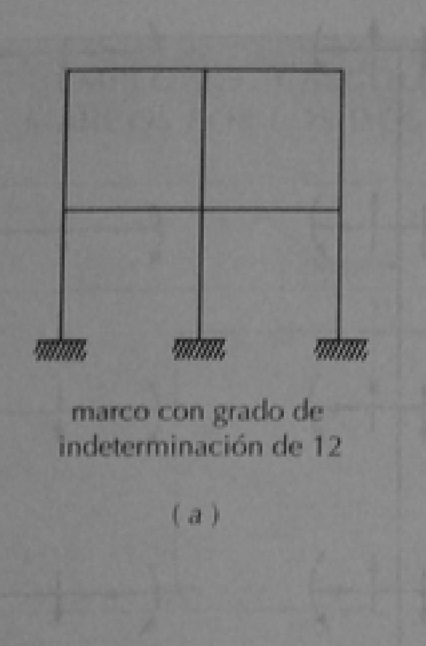
$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma M = 0$$

Incógnitas de reacción, $r = 3$:

$$R_{Ax}, \quad R_{Ay}, \quad R_{Ey}$$

| | | |
|---|---|---|
| $j = 8$ | $2j = 16$ | Estáticamente determinada externamente |
| $b = 15$ | $r + b = 18$ | y estáticamente indeterminada de grado |
| $r = 3$ | $r + b > 2j$ | 2 internamente |

*2.6.3 Marcos.* Para deducir una expresión que permita calcular el grado de indeterminación de marcos, considérese la estructura mostrada en la figura *2.8a*. Si se hacen secciones en los miembros del marco, de tal manera que cada nudo sea un cuerpo libre, como se indica en la figura *2.8b*, en cada sección de cada miembro hay tres incógnitas: una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante. Entonces en cada miembro existen seis fuerzas internas desconocidas; pero si se conocen las tres fuerzas de una sección, pueden determinarse las tres fuerzas de la otra sección del mismo miembro. Por consiguiente, en cada miembro hay tres fuerzas internas desconocidas independientes. Si $m$ es el número de miembros del marco, el número total de incógnitas en los miembros será $3m$. Denominando $r$ al número de incógnitas de reacción en la estructura considerada, el número total de incógnitas será $r + 3m$.



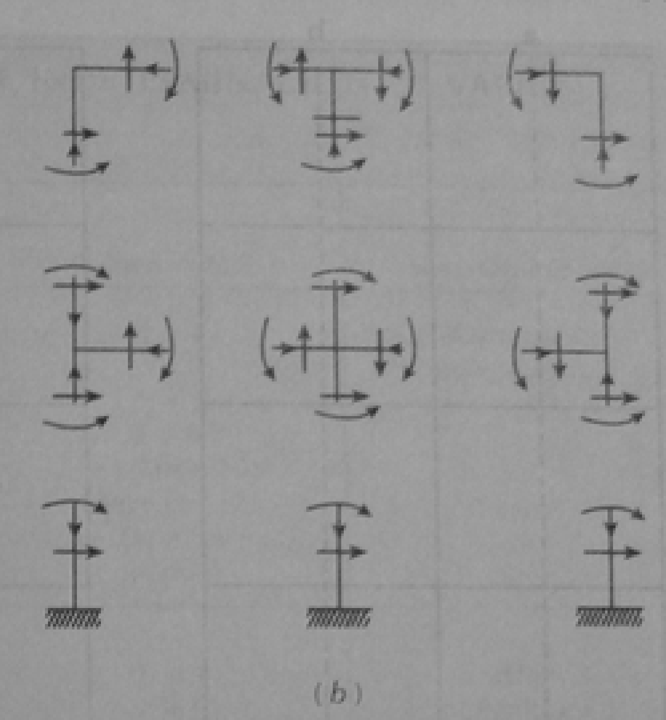




**Figura 2.8.** Cálculo del grado de indeterminación en marcos

Si ahora se consideran los diagramas de cuerpo libre de los nudos de la estructura, figura 2.8*b*, se puede ver que en cada nudo, incluyendo los apoyos, se pueden plantear tres ecuaciones independientes de equilibrio. Considerando que la estructura tiene $n$ nudos, el número total de ecuaciones de equilibrio será $3n$. Cuando el número de incógnitas sea igual al de ecuaciones de equilibrio, la estructura será estáticamente determinada, si es mayor, será indeterminada y si es menor, será inestable.

Cuando existan ecuaciones de condición, como en el caso de articulaciones internas en la estructura, su número deberá añadirse al de ecuaciones de equilibrio. Si se denomina con la letra $c$ al número de ecuaciones de condición, pueden plantearse las siguientes ecuaciones para establecer el grado de indeterminación de marcos:

Si $r + 3m = 3n + c$,
el marco es estáticamente determinado.

Si $r + 3m > 3n + c$,
el marco es estáticamente indeterminado.

Si $r + 3m < 3n + c$,

el marco es inestable (2.13)

En la figura 2.9 se ilustra otra manera de obtener el grado de indeterminación de marcos, que resulta más conveniente para marcos de varios niveles. Supóngase que en el marco de la figura 2.9*a* se hacen cortes en las secciones *a-a* y *b-b* de tal manera que la estructura original se transforma en las tres estructuras mostradas en la figura 2.9*b*. Cada una de estas estructuras es isostática, ya que tiene tres reacciones de apoyo y tres ecuaciones de equilibrio, pero en cada sección de corte existen tres incógnitas: la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante. Se puede ver entonces que el número total de incógnitas redundantes, o sea el grado de indeterminación, es igual a tres veces el número de secciones de corte en las vigas, ya que las fuerzas internas a un lado de la sección de corte son iguales a las del otro lado. En el ejemplo de la figura 2.9 este número de cortes es de 10.

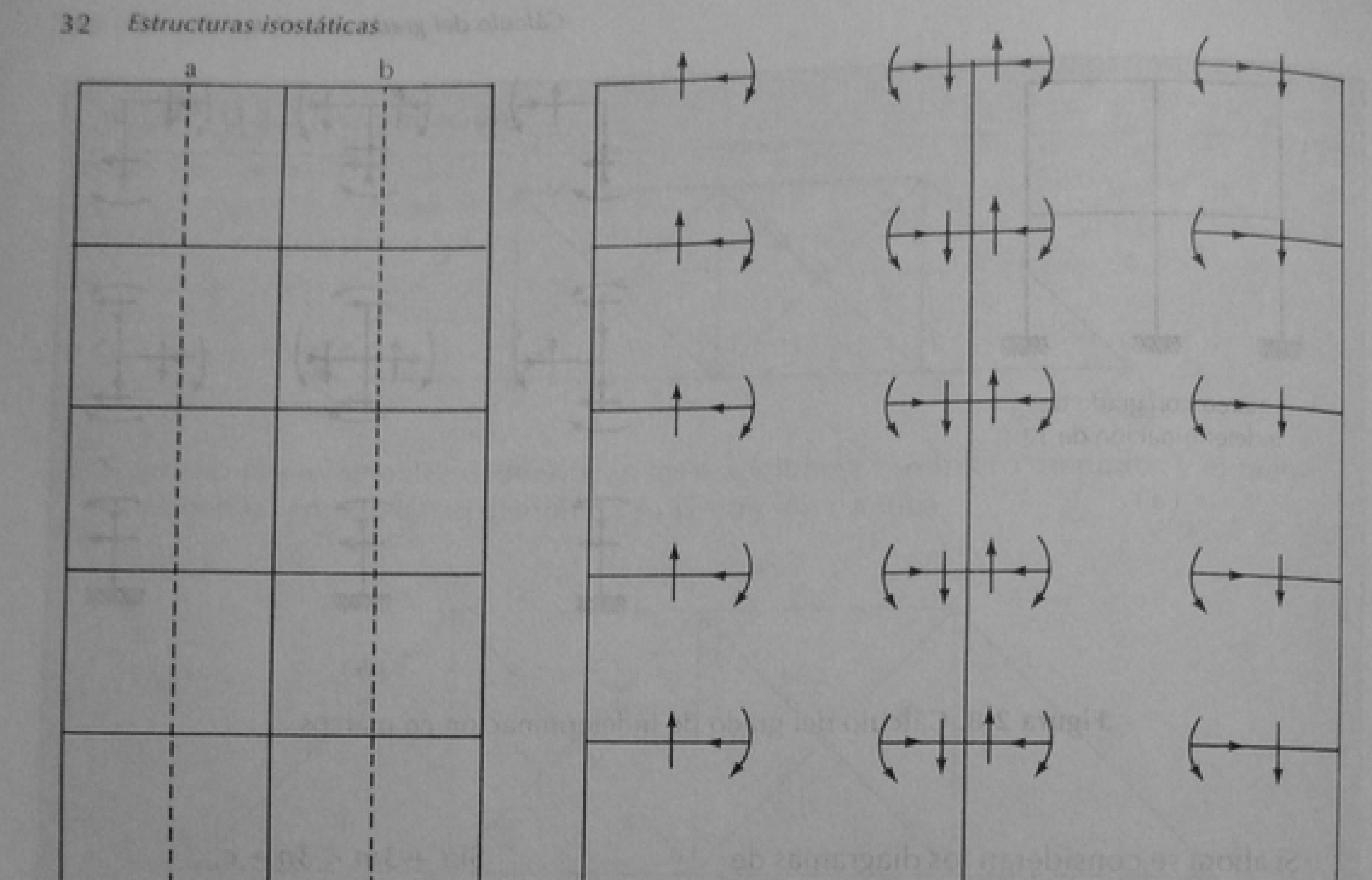



Figura 2.9. Método alternativo para el cálculo del grado de indeterminación en marcos

## Ejemplo 2.3

En este ejemplo se ilustra el cálculo del grado de indeterminación de varios marcos. En el primero, se tienen 4 nudos, *n*, dos que corresponden a la unión de columna y viga y dos que corresponden a los apoyos; se tienen 3 miembros, *m*, y 6 reacciones de apoyo, *r*, 3 en cada empotramiento. De acuerdo con las ecuaciones 2.13 el marco es indeterminado de tercer grado. Con el segundo método expuesto, se haría un corte en la sección 1-1, en la cual aparecerían 3 acciones internas desconocidas que indicarían el grado de indeterminación.

En el segundo marco se tienen 4 nudos, *n*, uno interior y 3 apoyos; 3 miembros, *m*, y 9 reacciones de apoyo, *r*, 3 en cada empotramiento. Según las ecuaciones 2.13 el grado de indeterminación es de 6. Por el segundo método, hay que hacer los dos cortes señalados para que queden tres estructuras isostáticas. En cada uno de estos dos cortes quedarían tres acciones internas desconocidas.

El tercer ejemplo puede resolverse de manera semejante a los anteriores, obteniéndose un grado de indeterminación de 9.

En el último ejemplo se ilustra el caso de que existan ecuaciones de condición. En las dos articulaciones el momento flexionante vale 0. Obsérvese que en este ejemplo, al aplicar el segundo método, resulta conveniente hacer los cortes justamente en las articulaciones, porque en cada una hay solamente dos acciones internas desconocidas: la fuerza cortante y la fuerza normal, ya que el momento flexionante es nulo.

## EJEMPLO 2.3. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN DE VARIOS MARCOS POR LOS DOS MÉTODOS

| Marco | Primer método | Segundo método |
|---|---|---|
| | $n = 4$<br>$c = 0$<br>$m = 3$<br>$r = 6$<br>$r + 3m = 15$<br>$3n + c = 12$<br>$r + 3m > 3n + c$<br>grado 3 | Cortes = 1<br>Incógnitas = 3<br>grado = 3(1) = 3 |
| | $n = 4$<br>$c = 0$<br>$m = 3$<br>$r = 9$<br>$r + 3m = 18$<br>$3n + c = 12$<br>$r + 3m > 3n + c$<br>grado 6 | Cortes = 2<br>Incógnitas = 3<br>grado = 3(2) = 6 |
| | $n = 8$<br>$c = 0$<br>$m = 7$<br>$r = 12$<br>$3n + c = 24$<br>$r + 3m = 33$<br>$r + 3m > 3n + c$<br>grado 9 | Cortes = 3<br>Incógnitas = 3<br>grado = 3(3) = 9 |
| | $n = 6$<br>$c = 2$<br>$m = 6$<br>$r = 6$<br>$r + 3m = 24$<br>$3n + c = 20$<br>$r + 3m > 3n + c$<br>grado 4 | Cortes = 2<br>Incógnitas = 2<br>grado = 2(2) = 4 |

*2.6.4 Inestabilidad geométrica*. Existen algunas estructuras que son inestables a pesar de que al aplicar los criterios anteriores resulten estáticamente determinadas o aun indeterminadas. La inestabilidad se deriva de un número insuficiente o de una disposición inadecuada de los apoyos, o bien, de un arreglo inadecuado de partes de la estructura. En el primer caso se dice que la estructura tiene una inestabilidad geométrica externa y en el segundo caso, una inestabilidad geométrica interna.

Considérese, por ejemplo, la viga continua de la figura 2.10. Al aplicar los criterios de la sección 2.6.1, se encuentra que el número de reacciones de apoyo es tres, igual al número de ecuaciones de equilibrio. Se diría entonces que la viga es estáticamente determinada. Sin embargo, bajo la acción de las cargas indicadas, la viga se desplazaría horizontalmente hacia la derecha ya que en ninguno de los apoyos se puede desarrollar una reacción horizontal que lo impida. Se trata de un caso de inestabilidad geométrica externa.

En la figura 2.11 se ilustra un caso de inestabilidad geométrica interna. El marco mostrado tiene 12 nudos, $n$, 3 ecuaciones de condición, $c$, (una por cada articulación interna) y 15 miembros, $m$. Por lo tanto, según las ecuaciones 2.13 sería estáticamente indeterminado. Sin embargo, la viga 3-7 no podría resistir las cargas aplicadas porque se deformaría como se indica con línea punteada. Habría una falla local en esta viga.

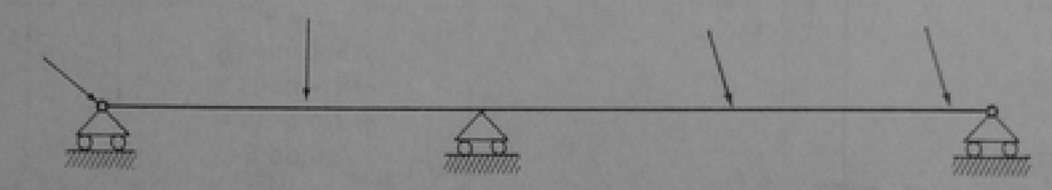


**Figura 2.10.** Ejemplo de inestabilidad geométrica externa en vigas

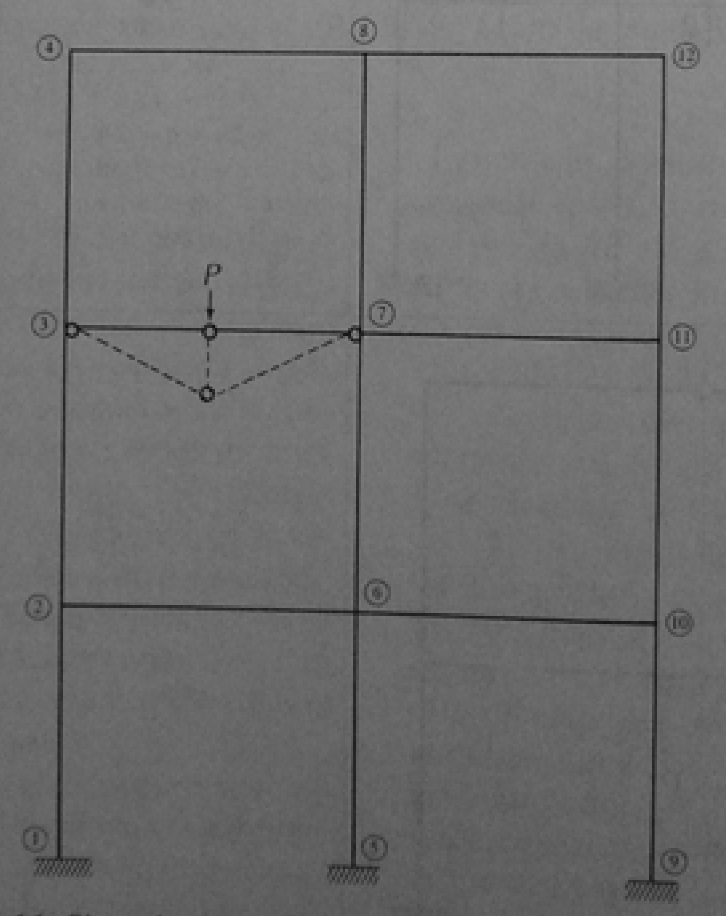



**Figura 2.11.** Ejemplo de inestabilidad geométrica interna en marco

Estos ejemplos señalan la necesidad de revisar mediante una inspección cuidadosa si no se presentan disposiciones inadecuadas en los apoyos o entre los miembros de la estructura analizada que puedan conducir a casos de inestabilidad.

## 2.7 Análisis de vigas isostáticas

La resolución de vigas isostáticas comprende normalmente los siguientes pasos.

*a)* Determinación de las reacciones en los apoyos.
*b)* Determinación del diagrama de fuerza cortante.
*c)* Determinación del diagrama de momento flexionante.
*d)* Determinación de las deformaciones[1] (giros y deflexiones)

En algunos casos se determinan también los diagramas de momento torsionante y de fuerza normal. No se incluyen en este texto tales casos, aunque en algunos ejemplos de marcos se determinan los diagramas de fuerza normal.

*2.7.1 Determinación de las reacciones en los apoyos.* Estas reacciones se determinan planteando las ecuaciones de equilibrio y, en su caso, las ecuaciones de condición. Si la viga es isostática, el número de estas ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas de reacción, por lo que se obtiene un sistema de ecuaciones con dicho número de incógnitas.

*2.7.2 Determinación del diagrama de fuerza cortante.* Para determinar este diagrama se calcula el valor de la fuerza cortante en distintas secciones de la viga, se trazan estos valores como ordenadas a lo largo del eje de la viga y se unen los puntos obtenidos para definir el diagrama. Debe recordarse que la fuerza cortante en una sección de la viga es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección, o bien, a la suma de todas las fuerzas que actúan a la derecha de la sección con signo cambiado. Los valores de la fuerza cortante pueden calcularse sección por sección, o sea en forma discreta, o puede establecerse una ecuación que permita calcular el valor en cualquier sección, o sea en forma continua.

La convención de signos usada en este texto es tal que si la suma de fuerzas a la izquierda de una sección tiene sentido hacia arriba, la fuerza cortante es positiva. El diagrama correspondiente se dibuja por arriba del eje de la viga. Esta convención es congruente con la establecida en la sección 2.5 y en la figura 2.6, ya que una fuerza cortante positiva produce una acción interna también positiva.

La fuerza cortante también puede calcularse a partir de la relación matemática entre carga, $w$, y fuerza cortante, $V$, que se demuestra en Mecánica de Materiales:

$$w = \frac{dV}{dx} \tag{2.14}$$

Por integración, el valor de la fuerza cortante será:

$$V = \int w \, dx + C \tag{2.15}$$

En donde $C$ es una constante de integración que se determina a partir de condiciones de frontera, por ejemplo, secciones en las que se sepa que la fuerza cortante es nula, como en los ejes de simetría.

*2.7.3 Determinación del diagrama de momento flexionante.* Se calcula el momento flexionante en forma discreta o continua, se trazan las ordenadas en distintas secciones y se obtiene el diagrama correspondiente. Debe recordarse que el momento flexionante en una sección es igual a la suma algebraica de los momentos de primer orden de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección, respecto al eje centroidal de la sección, o bien, a la suma de los momentos

[1] En algunos textos los giros y las deflexiones se denominan desplazamientos y el término deformaciones se reserva para las deformaciones internas de los miembros estructurados.

de todas las fuerzas que actúan a la derecha de la sección con signo cambiado.

Otra manera de calcular los momentos flexionantes se basa en la relación matemática que existe entre la fuerza cortante y el momento flexionante. En los cursos de Mecánica de Materiales se demuestra que la fuerza cortante es la derivada del momento flexionante:

$$V = dM/dx \quad (2.16)$$

De aquí se deduce que el momento flexionante puede obtenerse integrando el diagrama de fuerza cortante:

$$M = \int V\,dx + C \quad (2.17)$$

Ya que $\int V\,dx$ es el área bajo el diagrama de fuerza cortante, el momento flexionante puede obtenerse sumando las áreas del diagrama de fuerza cortante. La constante de integración se determina a partir de condiciones conocidas en la viga, por ejemplo, secciones en que se sepa que el momento flexionante es nulo.

La convención de signos usada consiste en considerar que el momento flexionante en una sección es positivo cuando las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección producen un momento de primer orden que tenga el sentido del movimiento de las agujas del reloj, denominado sentido horario en este texto, y negativo en caso contrario. Obsérvese que un momento flexionante positivo produce esfuerzos de tensión en la cara inferior de la viga y de compresión en la cara superior, por lo que esta convención de signos es congruente con la de la sección 2.5. Los diagramas de momentos se trazan siempre de tal manera que quedan en la cara de la viga donde existen esfuerzos de compresión.

**Ejemplo 2.4**

En este ejemplo se determinan las reacciones, y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en una viga libremente apoyada. En el apoyo de la izquierda existen dos reacciones de apoyo $R_{Ax}$ y $R_{Ay}$ por ser una articulación, mientras que en el apoyo libre de la derecha sólo existe $R_{By}$. Estas tres reacciones desconocidas se calcularon con las ecuaciones 2.3, tomando primero suma de momentos alrededor del apoyo $A$ con lo que se obtuvo $R_{By}$; después con $\Sigma F_y = 0$ se obtuvo $R_{Ay}$; y finalmente con $\Sigma F_x = 0$ se obtuvo que $R_{Ax} = 0$. Con fines de ilustrar el procedimiento completo, se muestran en el ejemplo todos los cálculos, pero por simetría puede deducirse que las reacciones verticales son iguales entre sí y valen la mitad de la carga total.

Después se calcularon las fuerzas cortantes en las secciones 2, 3 y 4, o sea, en los puntos de aplicación de cargas. Puesto que justamente en las secciones hay un cambio brusco en el valor de la fuerza cortante, es necesario calcular dicho valor inmediatamente a la izquierda e inmediatamente a la derecha de cada sección. Por ejemplo, en la sección 3 izquierda, las fuerzas que quedan a la izquierda de la sección son la reacción $R_{Ay}$ que vale +105 kN y la fuerza aplicada en la sección 2 que vale –60 kN. El valor de la fuerza cortante resulta entonces de +45 kN. En cambio, a la derecha de la sección 3, hay que adicionar la fuerza de –90 kN que actúa en la propia sección.

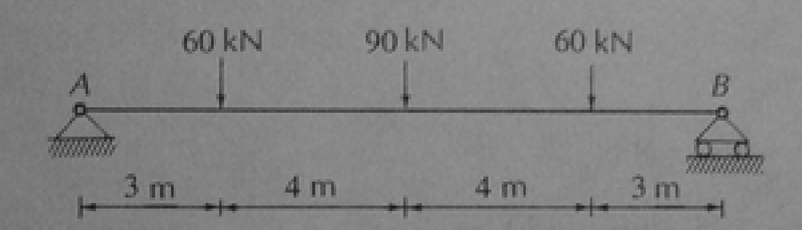
A continuación se calcularon los momentos flexionantes con la definición establecida anteriormente. Por ejemplo, en la misma sección 3 las fuerzas que quedan a la izquierda, $R_{Ay}$ y la fuerza de –60 kN, tienen brazos del par de 7m y de 4m, respectivamente, respecto a la sección; la primera produce un momento horario, y por lo tanto positivo, mientras que la segunda produce un momento antihorario y por lo tanto negativo. Los momentos flexionantes también pudieron calcularse sumando las áreas del diagrama de fuerza cortante. Como se sabe que el momento en el apoyo $A$ es 0, el momento en la sección 2 sería igual a 0 más el área del diagrama de cortante entre el apoyo $A$ y la sección 2, o sea, $0 + 105 \times 3 =$ 315 kN.m. En la sección 3 sería el valor ya obtenido para la sección 2 más el área del diagrama de cortante entre las secciones 2 y 3, o sea, $315 + 45 \times 4 = 495$ kN.m.

Finalmente, se han trazado en el ejemplo los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. En el primero, la fuerza cortante es constante entre cargas consecutivas. Por eso el diagrama está formado por líneas horizontales entre las cargas. El momento flexionante varía linealmente entre cargas consecutivas, ya que si se plantea la ecuación de momento para una sección cualquiera situada a una distancia $x$ del origen, esta ecuación resulta de primer grado.

En vigas con cargas concentradas, como la de este ejemplo, suele resultar más conveniente calcular las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en las secciones de aplicación de cargas, que plantear ecuaciones que sólo serían válidas entre cargas consecutivas. Es decir, un procedimiento discreto resulta mejor que uno continuo.

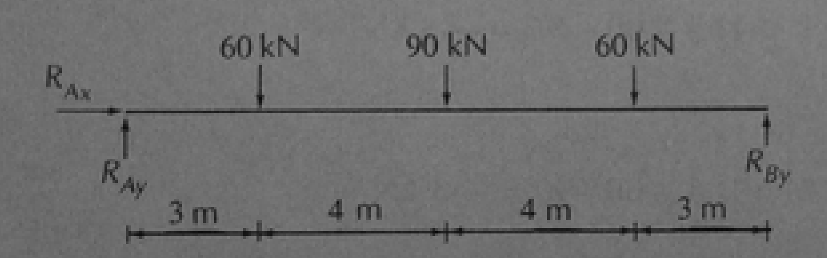
## EJEMPLO 2.4. DETERMINACIÓN DE REACCIONES, DIAGRAMAS DE V, M Y N

DATOS:




SOLUCIÓN:

1) Cálculo de las reacciones.




$+\circlearrowleft \ \Sigma M_A = 0$

$$60\,(3) + 90\,(7) + 60\,(11) - R_{By}\,(14) = 0$$

$$R_{By} = \frac{1470}{14} = 105 \text{ kN}$$

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0$

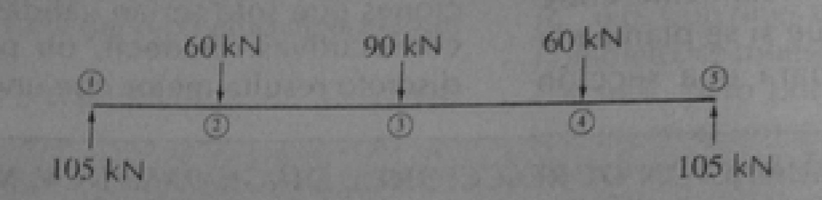
$$R_{Ay} - 60 - 90 - 60 + 105 = 0$$
$$R_{Ay} = 210 - 105 = 105 \text{ kN}$$

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$R_{Ax} = 0$$

**EJEMPLO 2.4 (continuación)**

2) Cálculo de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes




a) ($V$)

Sección 2 a la izq.: $V = 105$ kN

Sección 2 a la der.: $V = 105 - 60 = 45$ kN

Sección 3 a la izq.: $V = 105 - 60 = 45$ kN

Sección 3 a la der.: $V = 105 - 60 - 90 = -45$ kN

Sección 4 a la izq.: $V = 105 - 60 - 90 = -45$ kN

Sección 4 a la der.: $V = 105 - 60 - 90 - 60 = 105 - 210 = -105$ kN

b) ($M$)

$+\circlearrowleft \Sigma M$

Sección 2: $M_2 = 105(3) = 315$ kN · m

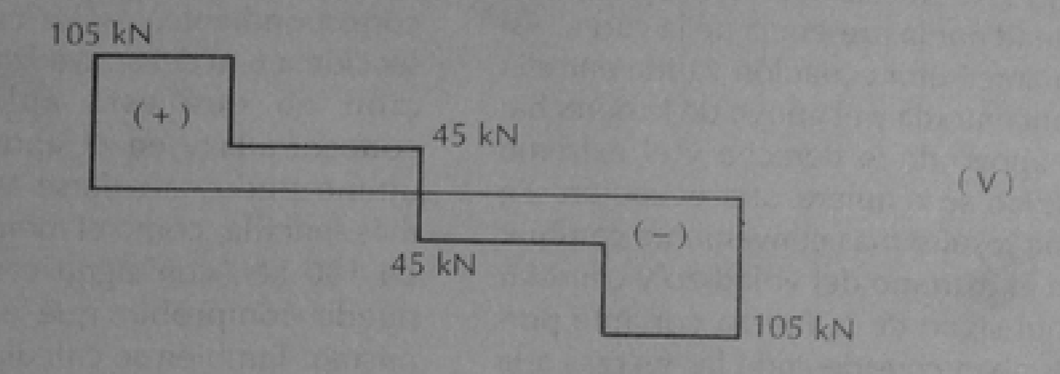
Sección 3: $M_3 = 105(7) - 60(4) = 735 - 240 = 495$ kN · m

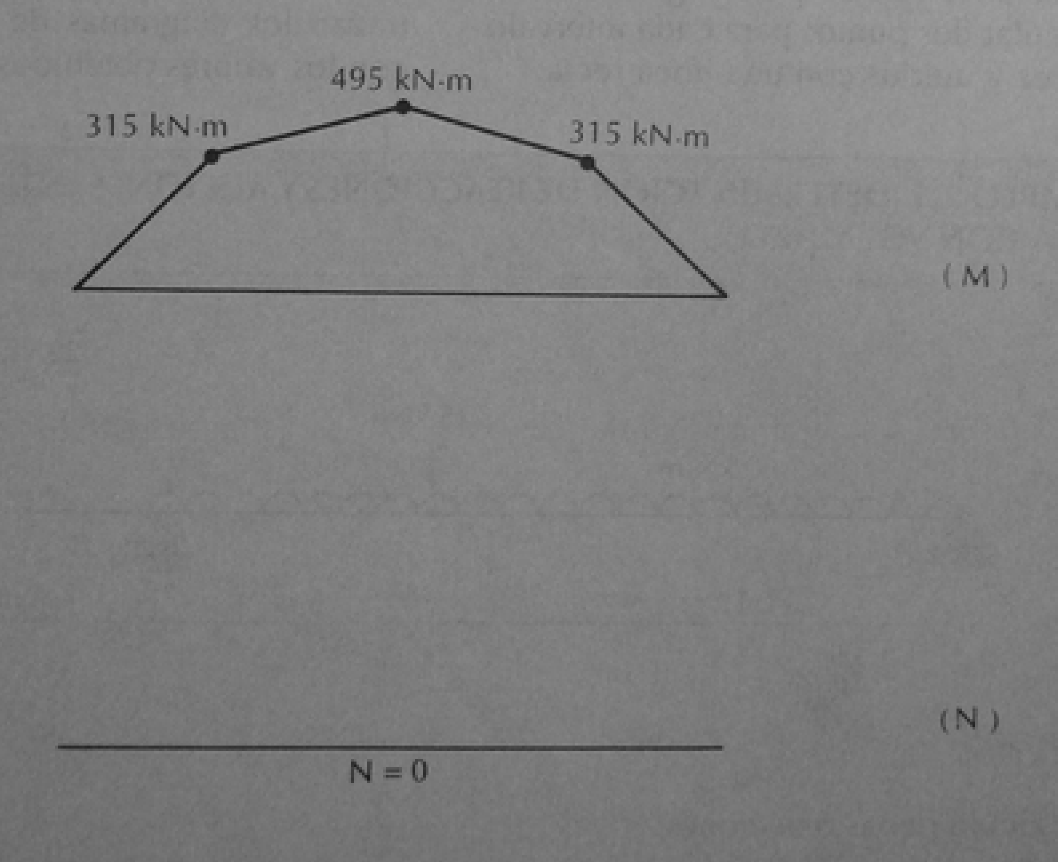
Sección 4: $M_4 = 105(11) - 60(8) - 90(4) = 1155 - 480 - 360 = 315$ kN · m

En los apoyos el momento es cero, por ser articulaciones.

**EJEMPLO 2.4** ***(continuación)***

3) Diagramas de fuerza cortante, momento flexionante y fuerza normal




## Ejemplo 2.5

Se trata de una viga con un extremo en voladizo y con diversos tipos de carga. Se puede verificar fácilmente que es isostática porque tiene 3 reacciones de apoyo y existen también 3 ecuaciones de equilibrio. Las reacciones de apoyo se calcularon, como en el ejemplo anterior, con las ecuaciones 2.3. En este caso, por existir una carga inclinada y una carga horizontal, la reacción $R_x$ es diferente de cero.

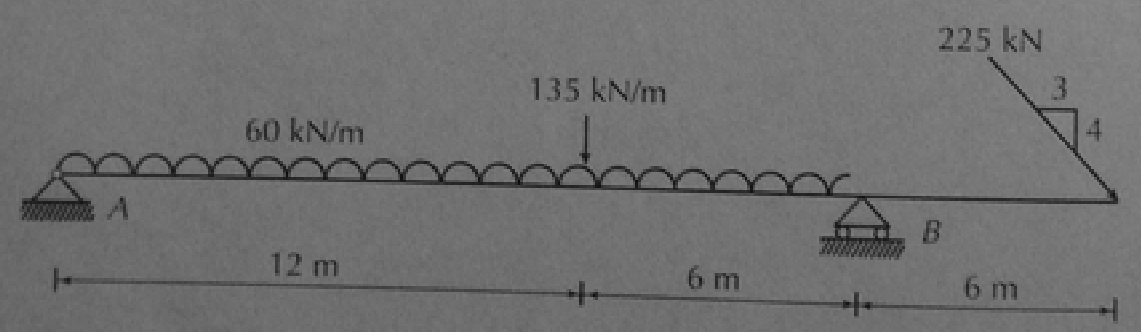
El cálculo de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes se hizo en este

ejemplo planteando las ecuaciones correspondientes. Para la fuerza cortante, se tiene una ecuación continua entre el apoyo de la izquierda y el punto de aplicación de la carga de 135 kN. En esta sección hay una discontinuidad por la presencia de la carga. Así que se planteó otra ecuación válida entre la carga concentrada y el apoyo de la derecha. Entre el apoyo de la derecha y el extremo del voladizo se requiere otra ecuación. En este tramo resultó más conveniente cambiar el origen al extremo del voladizo y cambiar también el signo de la fuerza cortante porque se estaban considerando las fuerzas a la derecha de cada sección. Teniendo las ecuaciones, puede calcularse el valor de la fuerza cortante en cualquier sección. Como las ecuaciones son de primer grado, basta con calcular dos puntos para cada intervalo de validez y unirlos con una línea recta.

En forma similar se calcularon los momentos flexionantes. Se determinaron en varias secciones como la suma de los momentos de primer orden de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección correspondiente. Así se calcularon en una sección a 6 m del apoyo izquierdo, en la sección en que está aplicada la carga concentrada y en el apoyo derecho. Este último pudo calcularse también en forma más sencilla, como el momento de la fuerza de 180 kN, con signo cambiado. El lector puede comprobar que el resultado es el mismo. También se calcula en el ejemplo el momento máximo, que ocurre en la sección de fuerza cortante nula, según indica la ecuación 2.16, y la sección en que el momento flexionante es nulo. Finalmente se trazan los diagramas de acciones internas con los valores obtenidos.

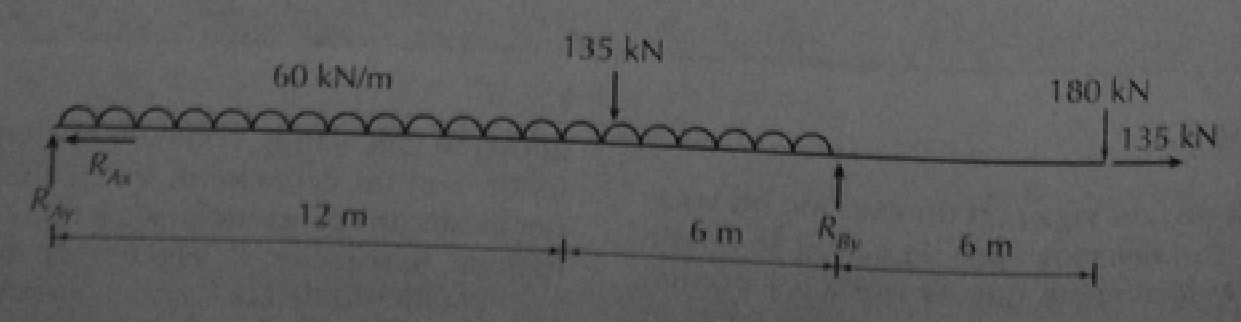
## EJEMPLO 2.5. DETERMINACIÓN DE REACCIONES Y ACCIONES INTERNAS EN UNA VIGA CON VOLADIZO

DATOS:




SOLUCIÓN:

1) Cálculo de las reacciones.



**EJEMPLO 2.5** ***(continuación)***

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$$+60\ (18)\ (9) + 135\ (12) - R_{By}\ (18) + 180\ (24) = 0$$

$$R_{By} = \frac{15660}{18}$$

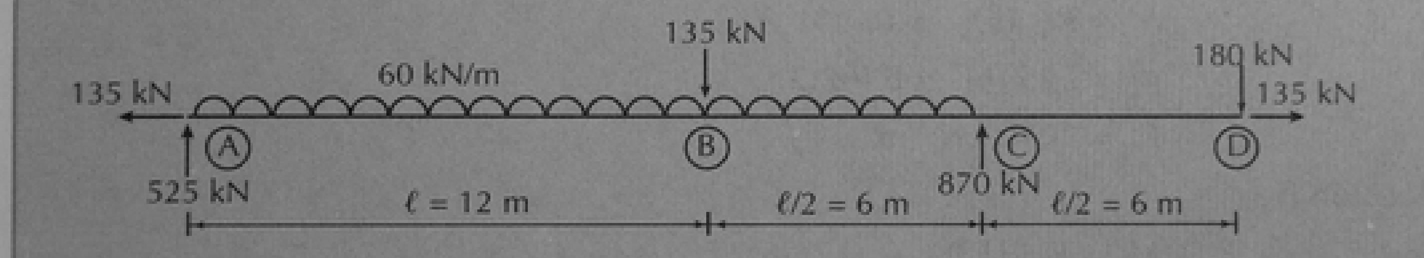
$$R_{By} = 870 \text{ kN} \uparrow$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$R_{Ay} - 60\ (18) - 135 - 180 + 870 = 0$$
$$R_{Ay} = 1395 - 870$$
$$R_{Ay} = 525 \text{ kN} \uparrow$$

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$-R_{Ax} + 135 = 0$$
$$R_{Ax} = 135 \leftarrow$$




2) Cálculo de la fuerza cortante, normal y momento flexionante.

NORMAL

Sección B $\Sigma F_x = 0$ $\quad -135 + N = 0$

$$N = 135 \text{ kN}$$

La fuerza normal es constante a todo lo largo de la viga y es de tensión.

CORTANTE

Sección A $V = R_{Ay} = 525$ kN

Sección B

A la izquierda $\quad V_B = -w\,(\ell) + R_{Ay} = -60\ (12) + 525$

$$V_B = -195 \text{ kN}$$

**EJEMPLO 2.5 *(continuación)***

A la derecha $V_B = R_{Ay} - w(\ell) - 135 = 525 - 60\,(12) - 135$

$V_B = -330$ kN

Sección C

A la izquierda $V_C = R_{Ay} - w\,(3/2\ \ell) - 135 = 525 - 60\,(18) - 135$

$V_C = -690$ kN

A la derecha $V_C = R_{Ay} - w\,(3/2\ \ell) - 135 + 870 = 525 - 60\,(18) - 135 + 870$

$V_C = 180$ kN

MOMENTOS

Sección a 6 m del apoyo

$$M_i = R_{Ay}\,(6) - w\,(6)\,(3)$$
$$M_i = 525\,(6) - 60\,(6)\,(3)$$
$$M_i = 2070 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección B

$$M_B = R_{Ay}\,(12) - w\,(12)\,(6)$$
$$M_B = 525\,(12) - 60\,(12)\,(6)$$
$$M_B = 1980 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección C

$$M_C = R_{Ay}\,(18) - w\,(18)\,(9) - 135\,(6)$$
$$M_C = 525\,(18) - 60\,(18)\,(9) - 135\,(6)$$
$$M_C = -1080 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección de momento máximo

El momento es máximo donde la fuerza cortante es igual a 0 (ver diagrama de fuerza cortante):

$$V = 525 - 60x_1 = 0; \quad x_1 = \frac{525}{60} = 8.75 \text{ m}$$

$$M_{max} = 525 \times 8.75 - \frac{60 \times 8.75^2}{2} = 2296.8 \text{ kN . m}$$

**EJEMPLO 2.5 *(continuación)***

Sección de momento nulo

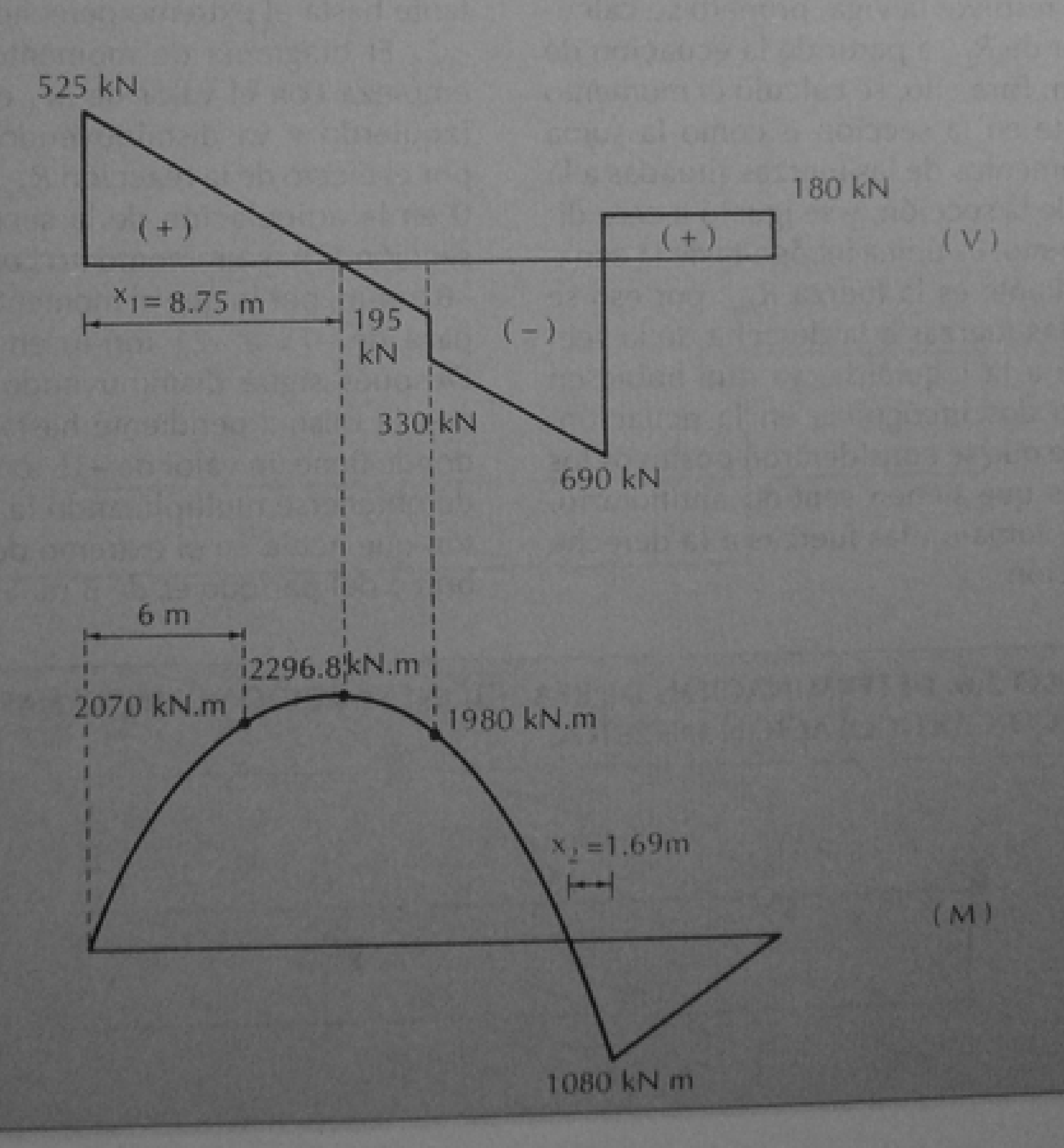
Ecuación de momentos entre las secciones *B* y *C*:

$$M = 525x - \frac{60x^2}{2} - 135\,(x - 12) = 0$$

$x = 16.31$ m (desde *A*)

$x_2 = 18.00 - 16.31 = 1.69$ m (desde *C*)

3) Diagramas de N, V y M



**Ejemplo 2.6**

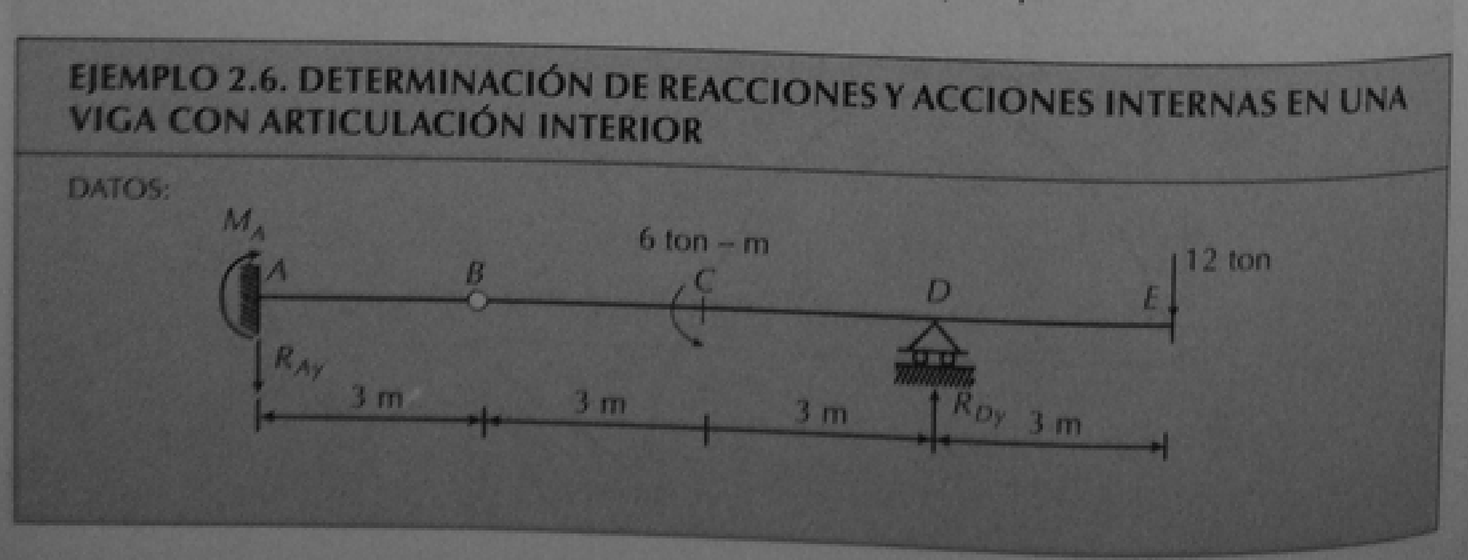
La viga de este ejemplo tiene tres reacciones de apoyo, $R_{Ay}$, $R_{Dy}$ y $M_A$, y existen dos ecuaciones de equilibrio por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas. También se hubiese podido considerar que existían cuatro reacciones de apoyo, incluyendo $R_{Ax}$, y tres ecuaciones de equilibrio porque ya sería un sistema de fuerzas no paralelas. De cualquier manera, el número de reacciones de apoyo, $r$, es mayor que el de ecuaciones de equilibrio, $n$, en una unidad. Sin embargo, existe también una ecuación de condición, $c$, ya que el momento flexionante en la articulación de la sección $B$ tiene que ser nulo. Por lo tanto $n + c = r$ y la viga es estáticamente determinada.

Para resolver la viga, primero se calculó el valor de $R_{Dy}$ a partir de la ecuación de condición. Para ello, se calculó el momento flexionante en la sección $B$ como la suma de los momentos de las fuerzas situadas a la derecha de la sección, y se igualó a cero dicho momento. La única incógnita de la ecuación resultante es la fuerza $R_{Dy}$; por eso se tomaron las fuerzas a la derecha de la sección y no a la izquierda, ya que hubiesen aparecido dos incógnitas en la ecuación. Obsérvese que se consideraron positivos los momentos que tienen sentido antihorario, porque se tomaron las fuerzas a la derecha de la sección.

Ya habiendo calculado $R_{Dy}$, se obtuvo el valor de $R_{Ay}$ a partir de la ecuación de equilibrio $\Sigma F_y = 0$. Y la tercera incógnita de reacción $M_A$ se obtuvo calculando nuevamente el momento flexionante en la sección $B$, pero tomando las fuerzas situadas a la izquierda de la sección ya que, conocida $R_{Ay}$, sólo quedaba una incógnita.

El diagrama de fuerza cortante se trazó tomando las fuerzas de izquierda a derecha. En la sección $A$ actúa la reacción $R_{Ay}$ que produce una fuerza cortante negativa, hacia abajo, de 5 ton. Esta fuerza se mantiene constante hasta la sección $D$, ya que no actúa ninguna fuerza entre las secciones $A$ y $D$. En la sección $D$ actúa la fuerza $R_{Dy}$ de 17 ton hacia arriba, por lo que la fueza cortante pasa a ser de +12 ton y se mantiene constante hasta el extremo derecho de la viga.

El diagrama de momento flexionante empieza con el valor de $M_A$ en el extremo izquierdo y va disminuyendo linealmente por el efecto de la reacción $R_{Ay}$, pasando por 0 en la articulación de la sección $B$. En la sección $C$ hay un momento concentrado de –6 ton-m, por lo que el momento flexionante pasa de –15 a –21 ton-m en esa sección. Después sigue disminuyendo linealmente con la misma pendiente hasta el apoyo $D$, donde tiene un valor de –36 ton-m, que puede obtenerse multiplicando la fuerza de 12 ton que actúa en el extremo derecho por el brazo del par que es de 3 m.



**EJEMPLO 2.6 *(continuación)***

SOLUCIÓN:

$+\circlearrowright \Sigma M_{B\ DER} = 0$

$$-12\ (9) + R_{Dy}\ (6) + 6 = 0$$
$$R_{Dy} = 17 \text{ ton}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$-R_{Ay} + 17 - 12 = 0$$
$$R_{Ay} = 5 \text{ ton}$$

$+\circlearrowleft \Sigma M_{B\ IZQ} = 0$

$$M_A - 3\ (5) = 0$$
$$M_A = 15 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE

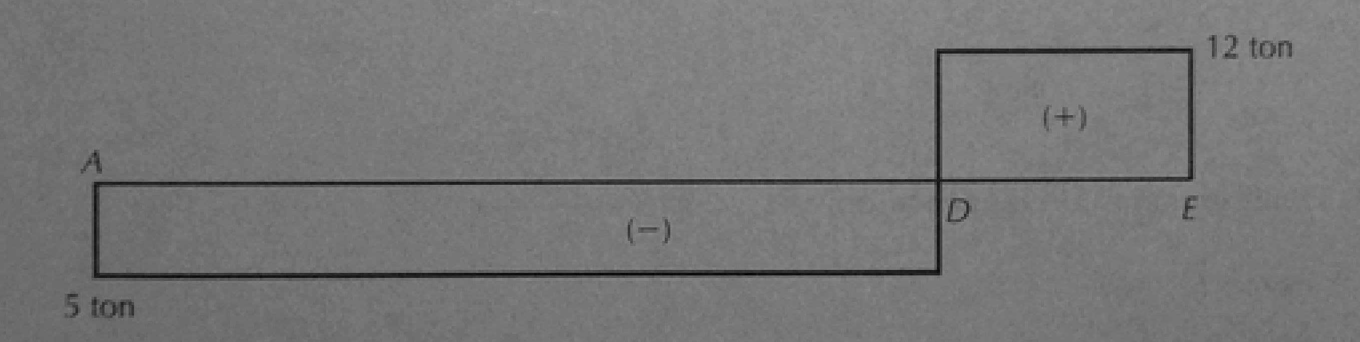
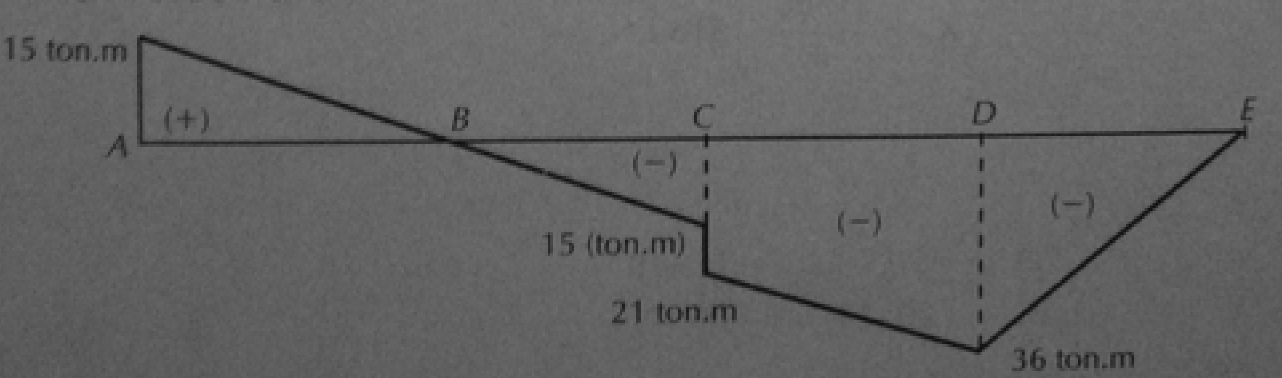



DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE



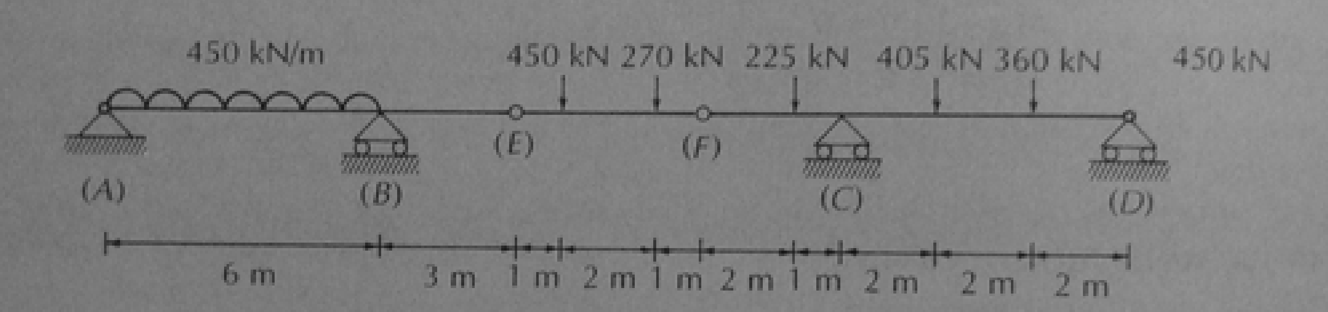
**Ejemplo 2.7**

Se ilustra la resolución de una viga que tiene dos articulaciones de momento interiores. En este ejemplo, primero se resolvió el tramo *EF* comprendido entre las dos articulaciones. Este tramo puede tratarse como si fuera una viga libremente apoyada, cuyas reacciones de apoyo son las fuerzas cortantes en los puntos *E* y *F*. Así, la reacción $R_{Ey}$ que resulta de 405 kN, es la fuerza que luego se aplica, con signo cambiado, en el punto *E* del tramo *AE*, el cual ya resulta isostático. De la misma manera, la reacción $R_{Fy}$ del tramo *EF* se aplica, con signo cambiado, en el punto *F* del tramo *FD*.

Como los tramos *EF* y *FD* ya resultan isostáticos, pueden calcularse las 4 reacciones de apoyo. Una vez obtenidas estas reacciones, ya se pueden calcular las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes como en los ejemplos anteriores.

El procedimiento seguido en este ejemplo es diferente al del ejemplo anterior, pero lo que es importante observar es que si la viga cumple con la condición $n + c = r$ es isostática y es resoluble con ecuaciones de equilibrio únicamente.

**EJEMPLO 2.7. OBTENER LOS DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE PARA LA ESTRUCTURA MOSTRADA**




SOLUCIÓN:

1) Determinación de las reacciones

Tramo $\overline{EF}$

450 kN 270 kN
E F
$R_{Ey}$ $R_{Fy}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0$

$$450\,(1) + 270\,(3) - R_{Fy}\,(4) = 0$$

$$R_{Fy} = \frac{1260}{4} = 315 \text{ kN}$$

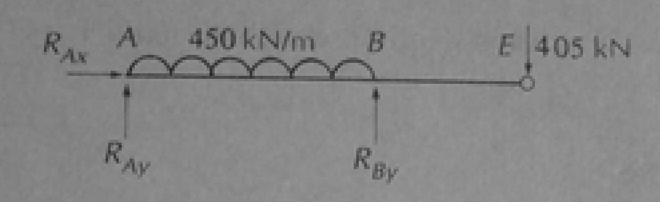
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$315 - 450 - 270 + R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} = 720 - 315 = 405 \text{ kN}$$

**EJEMPLO 2.7 *(continuación)***

Tramo $\overline{AE}$




$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$ $\quad 450\,(6)\,(3) - R_{By}\,(6) + 405\,(9) = 0$

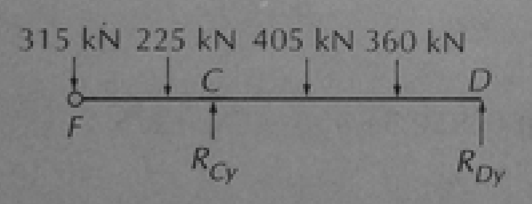
$$R_{By} = \frac{11745}{6} = 1957.5 \text{ kN}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$ $\quad -(450)\,(6) - 405 + 1957.5 + R_{Ay} = 0$

$$R_{Ay} = 3105 - 1957.5 = 1147.5 \text{ kN}$$

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$ $\quad R_{Ax} = 0$

Tramo $\overline{FD}$

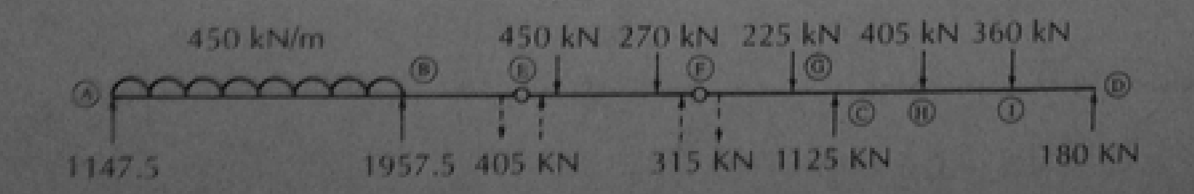



$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$ $\quad -315(9) - 225(7) + R_{cy}(6) - 405(4) - 360\,(2) = 0$

$$R_{Cy} = 1125 \text{ kN}$$

$+\uparrow \Sigma F_Y = 0$ $\quad -315 - 225 + 1125 - 405 - 360 + R_{Dy} = 0$

$$R_{Dy} = 1305 - 1125 = 180 \text{ kN}$$



**EJEMPLO 2.7 *(continuación)***

2) Cálculo de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes

(V)

Sección $B$ a la izquierda:

$$V_B = 1147.5 - 450(6) = -1552.5 \text{ kN} \ (\downarrow)$$

Sección B a la derecha:

$$V_B = 1147.5 - 450(6) + 1957.5 = 1957.5 - 1552.5 = 405 \text{ kN} \ (\uparrow)$$

Sección a la derecha de la carga de 450 kN:

$$V = 1147.5 - 450(6) + 1957.5 - 450 = 405 - 450 = -45 \text{ kN} \ (\downarrow)$$

Sección a la derecha de la carga de 270 kN:

$$V = 1147.5 - 450(6) + 1957.5 - 450 - 270$$
$$V = -45 - 270 = -315 \text{ kN}$$

Sección G a la derecha:

$$V_G = 1147.5 - 450(6) + 1957.5 - 450 - 270 - 225$$
$$V_G = -315 - 225 = -540 \text{ kN}$$

ANÁLISIS DE DERECHA A IZQUIERDA (CON SIGNO CAMBIADO)

Sección I a la izquierda:

$$V_I = -180 + 360$$
$$V_I = +180 \text{ kN}$$

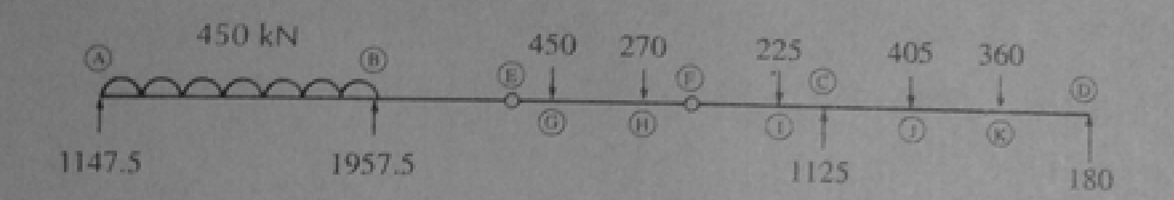
Sección H a la izquierda:

$$V_H = -180 + 360 + 405$$
$$V_H = +585 \text{ kN}$$

Sección C a la izquierda:

$$V_C = -180 + 360 + 405 - 1125$$
$$V_C = -540 \text{ kN}$$

**EJEMPLO 2.7 *(continuación)***




(M)

Sección a 3m de *A*:

$$M_3 = 1147.5(3) - (450)(3)(1.5)$$

$$M_3 = 1417.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección *B*:

$$M_B = 1147.5(6) - (450)(6)(3)$$

$$M_B = -1215 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Articulación E:

$$M_{art} = 1147.5(9) - 450(6)(6) + (1957.5)(3) = 0$$

Sección *G*:

$$1147.5(10) - (450)(6)(7) + (1957.5)(4)$$

$$M_G = 405 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección *H*:

$$1147.5(12) - (450)(6)(9) + (1957.5)(6) - (450)(2)$$

$$M_H = 315 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Articulación *F*:

$$M_{art} = 1147.5(13) - 450(6)(10) + (1957.5)(7) - (450)(3) - 270(1) = 0$$

Sección I:

$$M_I = 1147.5(15) - 450(6)(12) + (1957.5)(9) - (450)(5) - 270(3)$$

$$M_I = -630 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**EJEMPLO 2.7 *(continuación)***

Sección $C$:

$$M_C = 1147.5(16) - 450(6)(13) + (1957.5)(10) - 450(6) - 270(4) - 225(1)$$

$$M_C = -1170 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ANÁLISIS DE DERECHA A IZQUIERDA (CON SIGNOS CAMBIADOS)

Sección $K$:

$$M_K = 180(2)$$

$$M_K = 360 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sección $J$:

$$M_J = 180(4) - 360(2)$$

$$M_J = 0$$

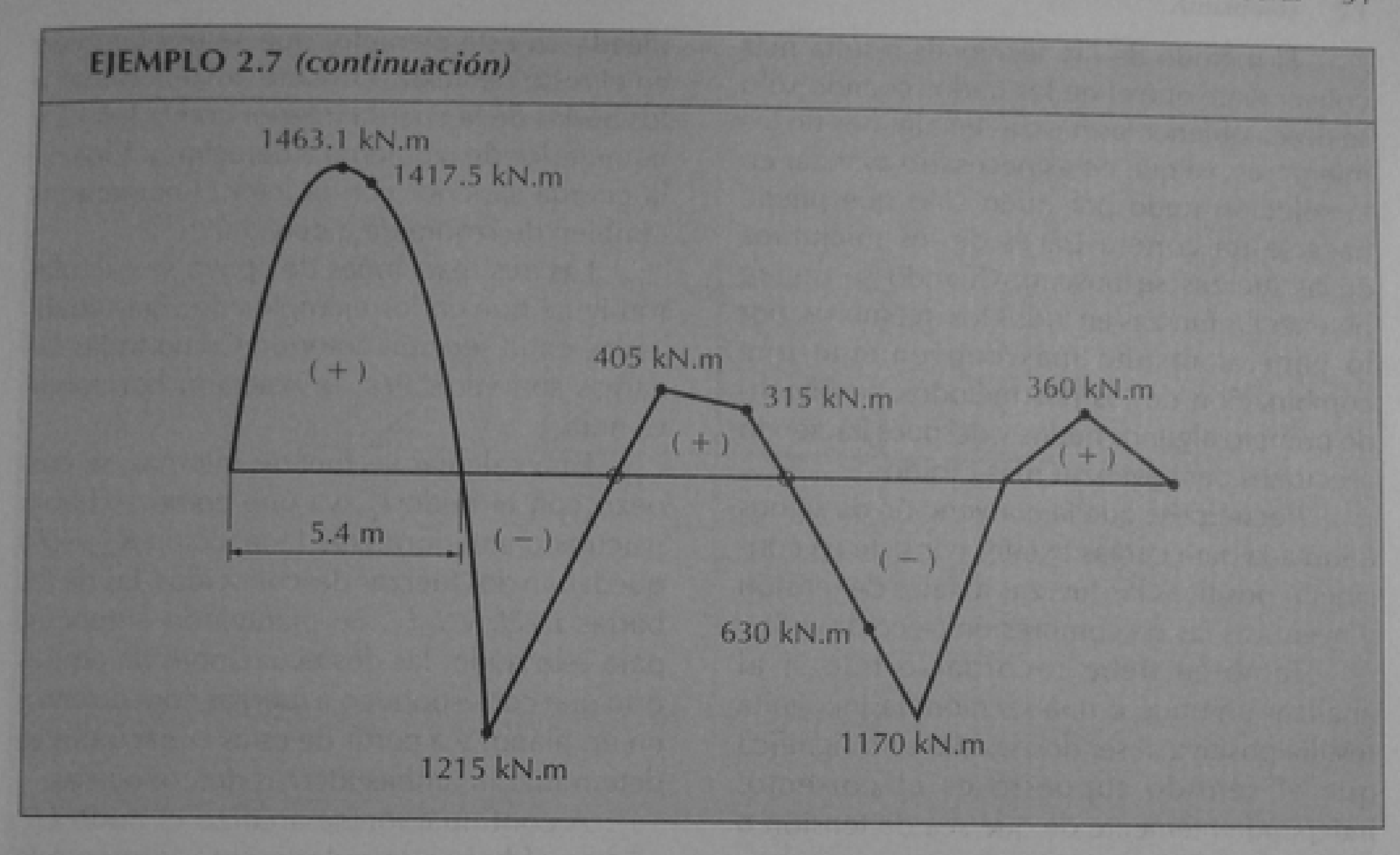
Sección $C$:

$$M_C = 180(6) - 360(4) - 405(2)$$

$$M_C = -1170 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3) Diagramas de $V$ y $M$

**EJEMPLO 2.7 *(continuación)***




## 2.8 Armaduras

Los miembros de una armadura, por encontrarse articulados en sus extremos, trabajan únicamente a tensión o a compresión axial. Entonces, la resolución de una armadura consiste en determinar las reacciones en los apoyos y las fuerzas axiales en cada uno de sus miembros.

*2.8.1 Determinación de las reacciones.* Se determinan de la misma manera que en vigas, o sea, planteando las ecuaciones de equilibrio y, en su caso, las ecuaciones de condición, en función de las reacciones de apoyo, y despejando su valor del sistema de ecuaciones que resulta.

*2.8.2 Determinación de las fuerzas axiales.* Una vez obtenidas las reacciones, las fuerzas axiales en los miembros pueden calcularse por el método de los nudos o por el método de las secciones. El primero consiste en plantear un diagrama de cuerpo libre de cada nudo cuidando que sólo aparezcan dos incógnitas. Después se plantean las dos ecuaciones de equilibrio que corresponden a un sistema de fuerzas concurrentes, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Resolviendo el sistema de dos ecuaciones se obtienen los valores de las dos incógnitas. Se debe empezar con un nudo en el que sólo existan dos incógnitas; conforme se avanza en la solución, las fuerzas ya calculadas permiten resolver nudos en los que concurran varios miembros. Cuando se trata de armaduras en el espacio, en vez de dos ecuaciones de equilibrio por nudo, se tienen tres ecuaciones.

En el método de las secciones, se trazan diagramas de cuerpo libre de partes de la armadura, haciendo secciones o cortes que intersecten a varios miembros. Después se plantean las ecuaciones de equilibrio del cuerpo libre. Para armaduras planas resultan tres ecuaciones, correspondientes a un sistema de fuerzas planas no concurrentes, y para armaduras en el espacio, seis ecuaciones, correspondientes al caso general de fuerzas en el espacio.

El método de las secciones resulta más conveniente que el de los nudos cuando sólo se desea obtener las fuerzas en algunos de los miembros, ya que no es necesario avanzar en la solución nudo por nudo sino que puede hacerse un corte a través de los miembros cuyas fuerzas se buscan. Cuando se quiere obtener las fuerzas en todos los miembros, por lo general resulta más conveniente una combinación de los dos métodos, resolviendo primero algunos nudos y después haciendo secciones para avanzar más rápido.

Recuérdese que la convención de signos adoptada para cargas axiales consiste en considerar positivas las fuerzas axiales de tensión y negativas las de compresión (sección 2.5).

También debe recordarse que si al analizar un nudo o una sección, la incógnita resulta positiva al ser despejada, esto significa que el sentido supuesto es el correcto, independientemente de que sea de tensión o de compresión.

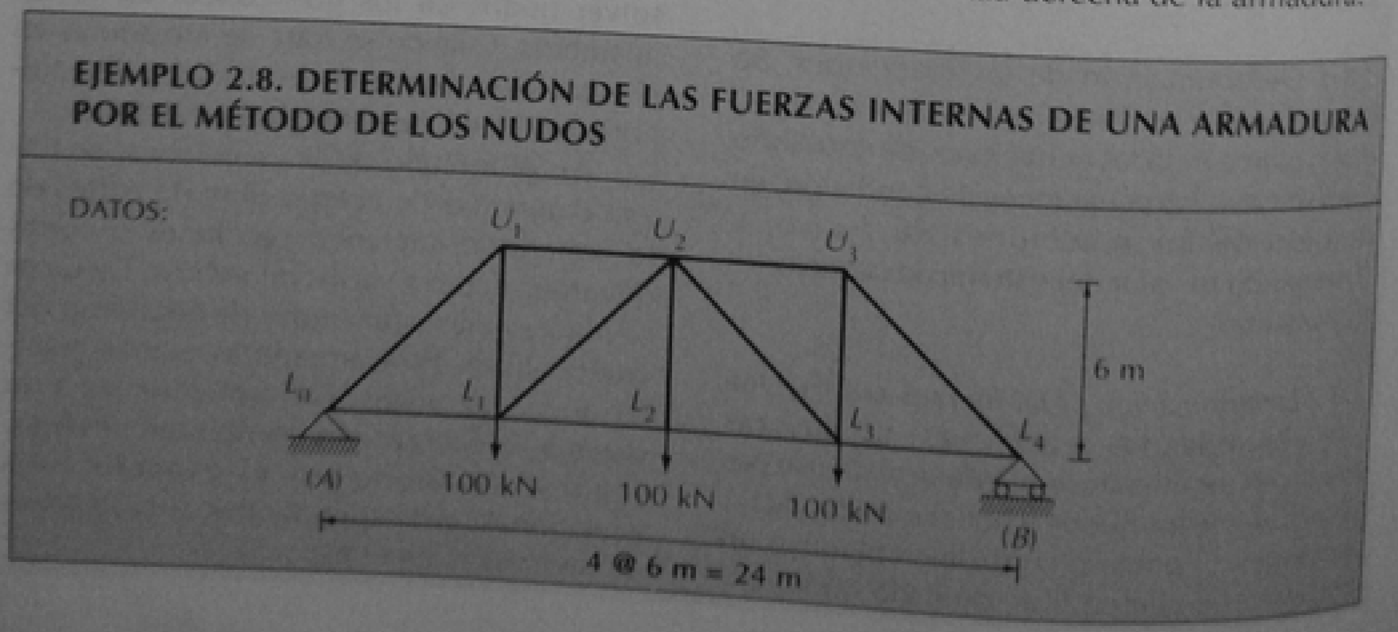
**Ejemplo 2.8**

La armadura de este ejemplo es isostática externamente porque se tienen tres reacciones de apoyo y tres ecuaciones de equilibrio, y también es isostática internamente ya que $r + b = 2j$ (ecuación 2.12). La notación empleada en este ejemplo, que se usa también en el resto del texto, consiste en denominar a los nudos de la cuerda inferior con la letra $L$ y numerarlos de izquierda a derecha, y a los de la cuerda superior con la letra $U$ numerados también de izquierda a derecha.

Las tres reacciones de apoyo se calcularon igual que en los ejemplos de vigas analizados en la sección anterior. Como todas las cargas son verticales, la reacción horizontal es nula.

Para calcular las fuerzas internas, se empezó con el nudo $L_0$, ya que como se había calculado anteriormente la reacción $R_{Ay}$, sólo quedaban dos fuerzas desconocidas, las de las barras $L_0U_1$ y $L_0L_1$. Se plantearon entonces, para este nudo, las dos ecuaciones de equilibrio que corresponden a fuerzas concurrentes en un plano, y a partir de estas ecuaciones se determinaron ambas fuerzas desconocidas.

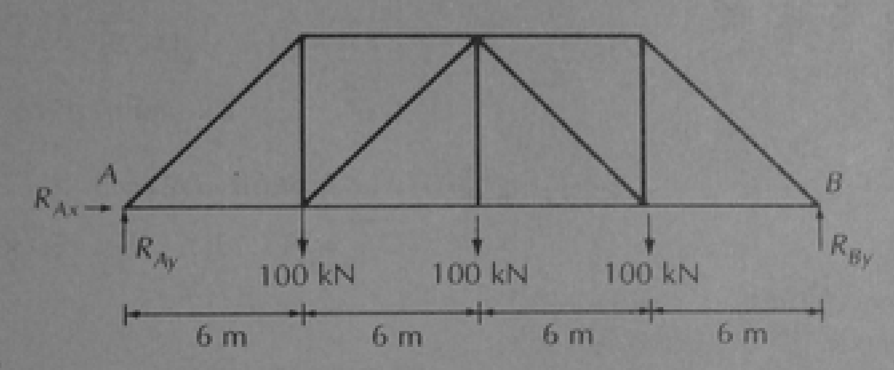
A continuación se analizó el nudo $U_1$, ya que al haber calculado anteriormente la fuerza $L_0U_1$, sólo quedaban dos incógnitas en este nudo. Este análisis se hizo también con las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas concurrentes en un plano. Después se pasó al nudo $L_1$, en el cual quedaban ya dos fuerzas desconocidas. De esta manera se continuó hasta el nudo $U_2$ ya que por simetría no era necesario analizar los nudos de la mitad derecha de la armadura.



**EJEMPLO 2.8** ***(continuación)***

SOLUCIÓN:

1) Cálculo de las reacciones




$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$$100(6) + (100)(12) + (100)(18) - R_{By}(24) = 0$$

$$R_{By} = \frac{3600}{24} = 150 \text{ kN}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$R_{Ay} - 100 - 100 - 100 + 150 = 0$$

$$R_{Ay} = 300 - 150 = 150 \text{ kN}$$

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$R_{Ax} = 0$$

2) Cálculo de las fuerzas internas

Nudo *Lo*

$\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{2}$

$\cos\theta = 1/\sqrt{2}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$150 - \overline{L_0 U_1} \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$150 - \overline{L_0 U_1}\left(1/\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\overline{L_0 U_1} = 150\left(\sqrt{2}\right) = 212.13 \text{ kN compresión}$$

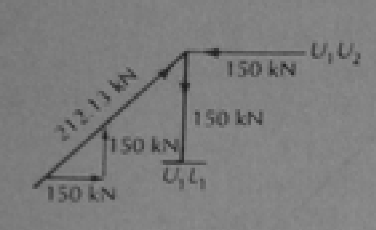
$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$-212.13\left(1/\sqrt{2}\right) + \overline{LoL_1} = 0$$

$$\overline{LoL_1} = 150 \text{ kN tensión}$$

**EJEMPLO 2.8 *(continuación)***

Nudo $U_1$




$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad 212.13\cos\theta - \overline{U_1U_2} = 0$

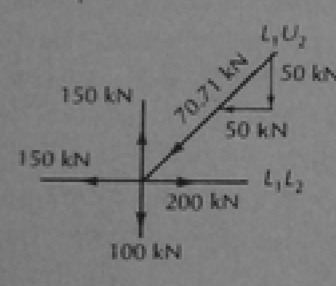
$\overline{U_1U_2} = 212.13\left(1/\sqrt{2}\right)$

$\overline{U_1U_2} = 150$ kN compresión

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 212.13\operatorname{sen}\theta - \overline{U_1L_1} = 0$

$\overline{U_1L_1} = 212.13\left(1/\sqrt{2}\right) = 150$ kN tensión

Nudo $L_1$




$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 150 - 100 - \overline{L_1U_2}\operatorname{sen}\theta = 0$

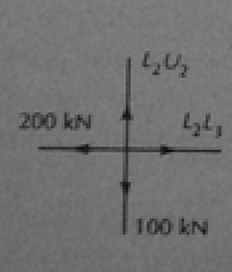
$\overline{L_1U_2} = 50\left(\sqrt{2}\right) = 70.71$ kN compresión

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad -150 - 70.71\cos\theta + \overline{L_1L_2} = 0$

$\overline{L_1L_2} = 150 + 70.71\left(1/\sqrt{2}\right)$

$\overline{L_1L_2} = 200$ kN tensión

Nudo $L_2$



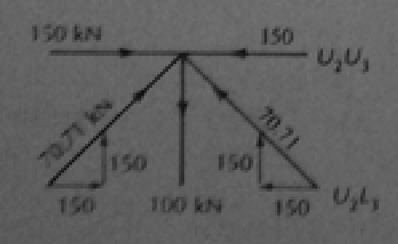

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad -200 + \overline{L_2L_3} = 0$

$\overline{L_2L_3} = 200$ kN tensión

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad -100 + \overline{L_2U_2} = 0$

$\overline{L_2U_2} = 100$ kN tensión

Nudo $U_2$




$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 70.71\operatorname{sen}\theta - 100 + \overline{U_2L_3}\operatorname{sen}\theta = 0$

$70.71\left(1/\sqrt{2}\right) - 100 + \overline{U_2L_3}\left(1/\sqrt{2}\right) = 0$

$\overline{U_2L_3} = (100 - 50)\sqrt{2} = 70.71$ kN compresión

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad 150 + 70.71\cos\theta - 70.71\cos\theta - \overline{U_2U_3} = 0$

$\overline{U_2U_3} = 150$ kN compresión

**EJEMPLO 2.8 *(continuación)***

Por la simetría de la armadura tenemos que las fuerzas

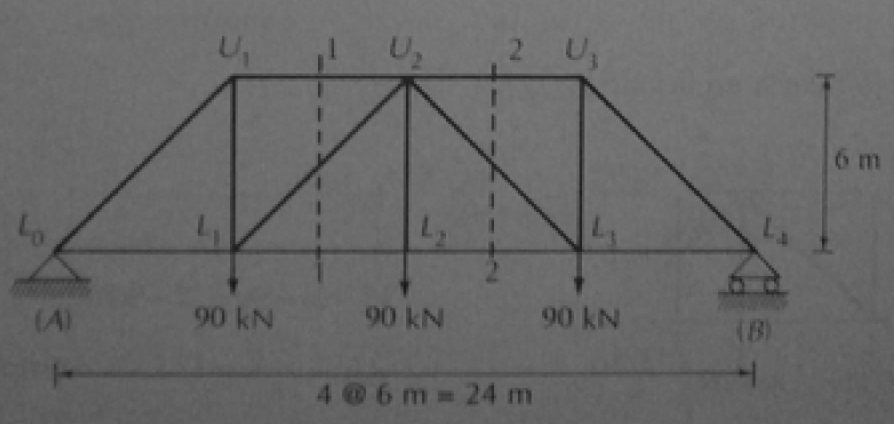
$\overline{L_2L_3} = \overline{L_1L_2}$
$\overline{L_3L_4} = \overline{L_0L_1}$
$\overline{U_3L_4} = \overline{U_1L_0}$
$\overline{U_3L_3} = \overline{U_1L_1}$

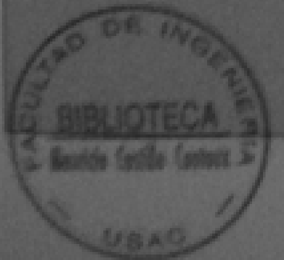
**Ejemplo 2.9**

Se ilustra en este ejemplo el método de las secciones. Obsérvese que únicamente se pide encontrar las fuerzas en dos barras de la armadura, la $L_1L_2$ y la $U_2U_3$. Las reacciones de apoyo se obtuvieron como se ha visto en los ejemplos anteriores. Una vez obtenidas estas reacciones, la fuerza en la barra $L_1L_2$ puede calcularse haciendo un corte en la sección 1-1 y tomando momentos alrededor del nudo $U_2$. Obsérvese que la sección corta la barra cuya fuerza se desea calcular, y que las otras dos barras cortadas concurren en el nudo alrededor del cual se toman los momentos. De esta manera, la única incógnita que aparece en la ecuación de momentos es la fuerza buscada. De forma similar se calculó la fuerza en la barra $U_2U_3$.

**EJEMPLO 2.9. DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS INTERNAS EN LAS BARRAS DE $\overline{L_1L_2}$ Y $\overline{U_2U_3}$ DE LA SIGUIENTE ARMADURA**

DATOS:

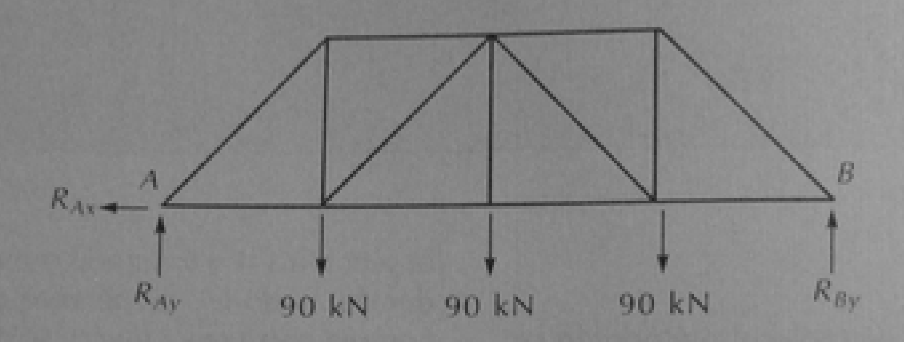


**EJEMPLO 2.9 *(continuación)***

SOLUCIÓN:

1) Determinación de las reacciones




$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$$90(6) + 90(12) + 90(18) - R_{By}(24) = 0$$

$$R_{By} = \frac{3240}{24} = 135 \text{ kN}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

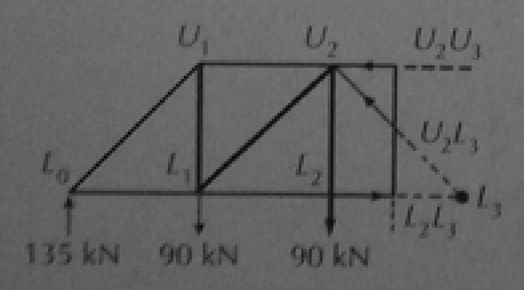
$$R_{Ay} - 90 - 90 - 90 + 135 = 0$$

$$R_{Ay} = 270 - 135 = 135 \text{ kN}$$

$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$R_{Ax} = 0$$

2) Cálculo de la fuerza en la barra $\overline{U_2U_3}$



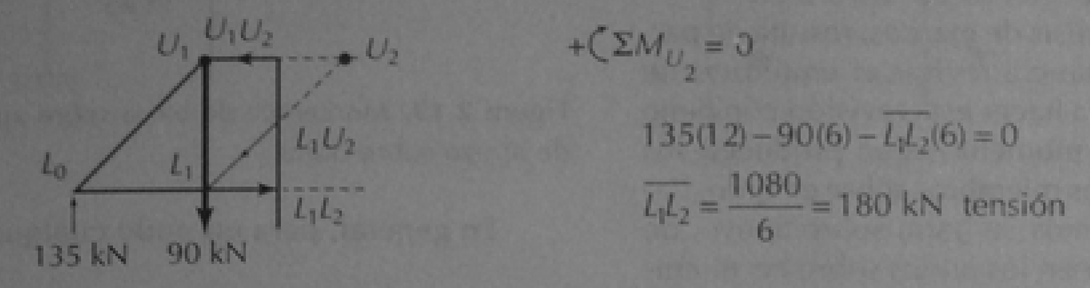

$+\circlearrowleft \Sigma M_{L_3} = 0$

$$135(18) - 90(12) - 90(6) - \overline{U_2U_3}(6) = 0$$

$$\overline{U_2U_3} = \frac{810}{6} = 135 \text{ kN compresión}$$

**EJEMPLO 2.9** ***(continuación)***

3) Cálculo de la fuerza en la barra $\overline{L_1L_2}$




$$+\circlearrowleft \Sigma M_{U_2} = 0$$

$$135(12) - 90(6) - \overline{L_1L_2}(6) = 0$$

$$\overline{L_1L_2} = \frac{1080}{6} = 180 \text{ kN tensión}$$

## 2.9 Marcos

Los marcos son estructuras constituidas por columnas y vigas cuyas uniones son nudos rígidos, es decir, que no permiten la rotación relativa entre los miembros que concurren en el nudo, figura 2.12. Así, los miembros *AB*, *BC* y *BD* que concurren en el nudo *B* deben conservar los mismos ángulos que formaban entre sí después de que se deforme el marco. Esto se ilustra en la figura 2.12*b*, en la que se ve que el nudo ha girado, pero los ángulos que forman los tres miembros que concurren en el nudo siguen siendo rectos. Las vigas y columnas están sujetas a momentos flexionantes y fuerzas cortantes, y la fuerza normal suele ser importante especialmente en las columnas. La resolución de marcos comprende, por lo tanto, la determinación de las reacciones de apoyo y de los diagramas de fuerza cortante, momento flexionante y fuerza normal. En ocasiones, este último sólo se determina para las columnas.

*2.9.1 Determinación de las reacciones.* Se calculan igual que en vigas y en armaduras a partir de las ecuaciones de equilibrio de la estática y, en su caso, de las ecuaciones de condición.

*2.9.2 Determinación de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.* También se determinan igual que en vigas, calculando los valores de la fuerza cortante y del momento

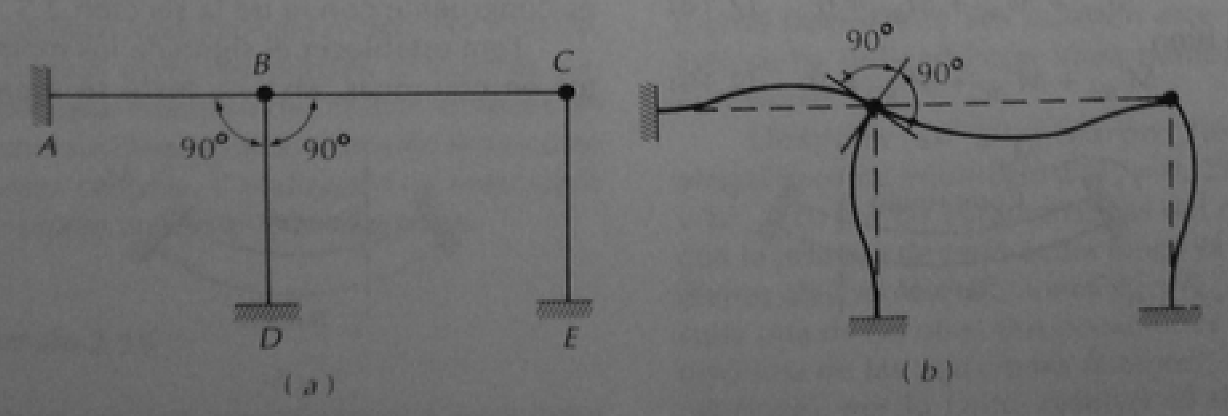



**Figura 2.12.** Deformación de marcos rígidos

flexionante en varias secciones de cada uno de los miembros del marco. Para hacer este cálculo se aplican las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante presentadas en las secciones 2.7.2 y 2.7.3.

En el análisis de marcos, resulta de particular importancia revisar el equilibrio de los nudos. Para hacer esta revisión conviene distinguir los momentos que producen los extremos de los miembros sobre el nudo, llamados momentos de barra sobre apoyo, de los que producen los nudos sobre los miembros, llamados de apoyo sobre barra o momentos en los extremos. En la figura 2.13 se muestra nuevamente el nudo *B* del marco de la figura 2.12. Los momentos $M_{BA}$, $M_{BC}$ y $M_{BD}$ son momentos de barra sobre apoyo, mientras que los momentos $M'_{BA}$, $M'_{BC}$ y $M'_{BD}$ son momentos de apoyo sobre barra. Cada uno de los momentos de apoyo sobre barra es igual y de signo contrario al correspondiente momento de barra sobre apoyo. Así, los momentos $M_{BA}$ y $M'_{BA}$ son iguales y de signo contrario. En todos los nudos de un marco la suma de los momentos de barra sobre apoyo, o de los momentos de apoyo sobre barra, debe ser cero para que el nudo esté en equilibrio. Esta circunstancia permite que una vez calculados los momentos en un miembro, se pueda proseguir con el cálculo de momentos en los otros miembros que concurren al mismo nudo. De acuerdo con esto se pueden plantear las ecuaciones:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0 \qquad (2.18)$$

o bien

$$M'_{BA} + M'_{BC} + M'_{BD} = 0 \qquad (2.19)$$

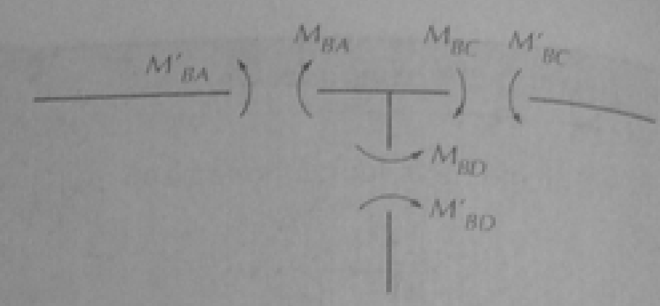



**Figura 2.13.** Momentos de barra sobre apoyo y de apoyo sobre barra

En general, para un nudo cualquiera:

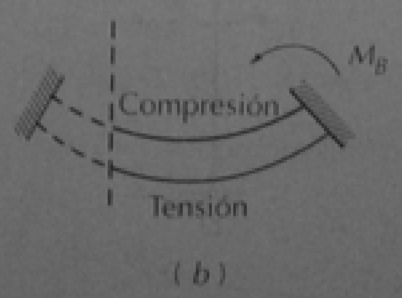
$$\Sigma M = 0 \qquad (2.20)$$

La notación de signos para marcos usada en este texto es tal que los momentos de apoyo sobre barra en una viga se consideran positivos cuando su sentido de giro es el horario. En el extremo izquierdo de una viga, un momento de apoyo sobre barra positivo produce esfuerzos de tensión en la cara inferior de la viga y esfuerzos de compresión en la cara superior, figura 2.14*a*, mientras que en el extremo derecho de la viga sucede lo contrario, figura 2.14*b*, ya que un momento negativo es el que produce tensiones en la cara inferior y compresiones en la superior. Obsérvese que en el apoyo izquierdo, el momento de apoyo sobre barra es el momento flexionante en el apoyo, porque es el momento que actúa a la izquierda de la sección. En cambio, en el apoyo de la derecha, el momento de apoyo sobre barra es el flexionante con signo cambiado porque actúa a la derecha de la sección. Esta notación de signos es congruente con la de la sección 2.5.

Para establecer el signo de los momentos en columnas, en este texto se sigue la

$M_A$
Compresión
Tensión

(*a*)




(*b*)

**Figura 2.14.** Convención de signos para momento flexionante

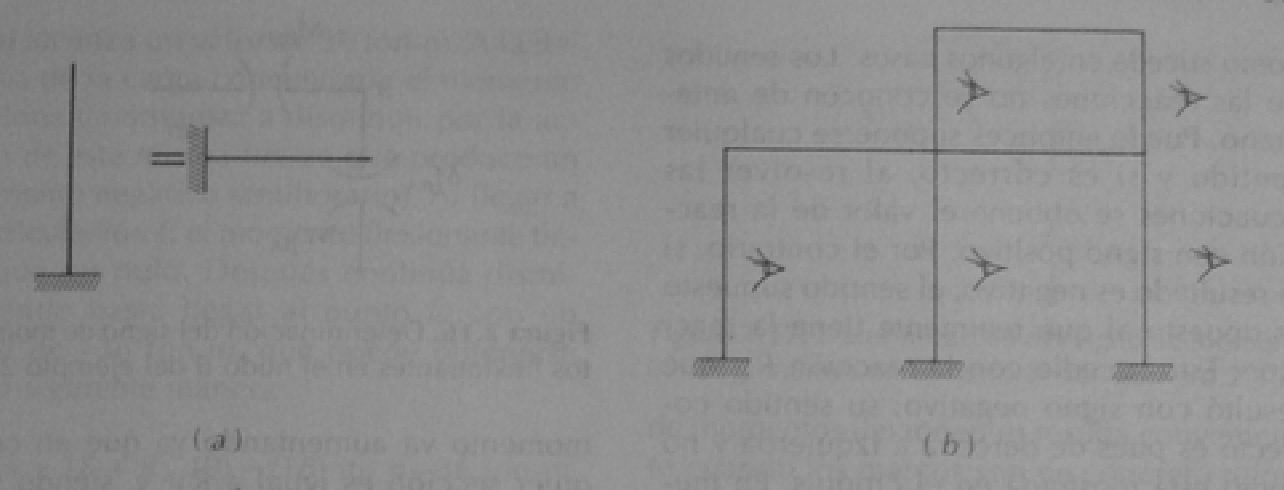



**Figura 2.15.** Convención de signos en columnas de marcos

convención de considerar que la parte inferior de las columnas equivale al extremo izquierdo de las vigas, y la parte superior, al extremo derecho, figura 2.15*a*. Esto equivale a considerar que las columnas se miran desde los puntos de observación indicados en la figura 2.15*b*. Los diagramas de momento flexionante se trazan siempre en la cara de los miembros en que existen esfuerzos de compresión.

Las fuerzas cortantes en las columnas se consideran positivas cuando tienen el sentido indicado en la figura 2.6*e*, si la columna se mira como se muestra en la figura 2.15. Los diagramas positivos de fuerza cortante se trazan a la izquierda de las columnas, y los negativos, a la derecha.

*2.9.3 Determinación de fuerzas normales.* Las fuerzas normales que actúan en los miembros de los marcos son generalmente las reacciones de otros miembros del marco. Por lo tanto, las fuerzas normales pueden calcularse aislando cada miembro del marco, después de obtener sus diagramas de momento flexionante y fuerza cortante, y analizando las reacciones que producen sobre otros miembros.

**Ejemplo 2.10**

El marco de este ejemplo tiene 4 reacciones de apoyo y 3 ecuaciones de equilibrio. Como también tiene una articulación de momento en el punto C, se cumple la condición $n + c = r$ y el marco es, por lo tanto, isostático. También puede verificarse su grado de indeterminación con la ecuación $r + 3m = 3n + c$ (ecuación 2.13). En efecto, $m$ vale 3 porque el marco tiene tres miembros, $r$ es igual a 4, $n$ es igual a 4 (incluyendo los apoyos) y $c$ vale 1 porque hay una ecuación de condición, la que indica que en el punto C el momento flexionante es nulo.

Para obtener las reacciones, primero se planteó la ecuación de condición, calculando el momento flexionante en el punto C como la suma de las fuerzas a la derecha de la sección con signo cambiado. Esta ecuación permitió obtener una relación entre las reacciones $R_{Ex}$ y $R_{Ey}$. Obsérvese que como no hay ninguna fuerza entre la reacción E y la articulación C, la resultante de $R_{Ex}$ y $R_{Ey}$ debe pasar por el punto C para que el momento flexionante sea nulo en este punto. Esto se ha indicado con línea punteada en el ejemplo.

Después se plantearon las tres ecuaciones de equilibrio $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma F_x = 0$, y $\Sigma F_y = 0$. Por las características del marco, con la primera de estas ecuaciones ya se pudieron obtener las reacciones $R_{Ex}$ y $R_{Ey}$, y con cada una de las otras dos ecuaciones se obtuvo una de las reacciones faltantes; no fue necesario, por lo tanto, resolver el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas,

como sucede en algunos casos. Los sentidos de las reacciones no se conocen de antemano. Puede entonces suponerse cualquier sentido y si es correcto, al resolver las ecuaciones se obtiene el valor de la reacción con signo positivo. Por el contrario, si el resultado es negativo, el sentido supuesto es opuesto al que realmente tiene la reacción. Esto sucedió con la reacción $R_{Ax}$ que resultó con signo negativo; su sentido correcto es pues de derecha a izquierda y no como está mostrada en el croquis. En muchos casos, el sentido correcto puede establecerse de antemano por simple inspección. En este mismo ejemplo, si la fuerza aplicada de 12 ton en el punto *B* actúa hacia la derecha, la reacción $R_{Ax}$ debe ser de sentido contrario.

Obtenidas las reacciones, se calcularon las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes y las fuerzas normales. En el miembro *AB* la fuerza cortante es constante e igual a $R_{Ax}$, ya que no actúa ninguna fuerza entre los puntos *A* y *B*. De acuerdo con la convención de signos, esta fuerza cortante es positiva, ya que si se observa la columna *AB* desde el interior del marco, figura 2.15*b*, la reacción $R_{Ax}$ actúa hacia arriba (recuérdese que el sentido correcto es contrario al del croquis). En el punto *B* del miembro *BD* la fuerza cortante es igual a la reacción $R_{Ay}$. Es positiva porque actúa hacia arriba y se mantiene constante hasta el punto de aplicación de la carga de 18 ton. En este punto toma un valor de +6 − 18 = −12 que se mantiene constante hasta el punto *D*. Para obtener la fuerza cortante en el miembro *ED* conviene observarlo como se indica en la figura 2.15*b*. Se ve que la fuerza cortante es igual a la reacción $R_{Ex}$, es positiva porque actúa hacia arriba, y es constante porque a lo largo del miembro no hay ninguna carga aplicada.

Para obtener el diagrama de momento flexionante en el miembro *AB*, se parte de un momento nulo en la articulación *A*. Este momento va aumentando ya que en cualquier sección es igual a $R_{Ax}$ y, siendo *y* la distancia de la sección al punto A. El momento es positivo porque su sentido es horario si se toman las fuerzas a la izquierda de la sección (desde el punto de observación de la figura 2.15*b*). El momento flexionante en el punto *B* del miembro *BD* puede obtenerse con su signo correcto trazando un diagrama de cuerpo libre del nudo *B*, figura 2.16. Siguiendo la notación de la figura 2.13, el momento $M_{BA}$ es un momento de barra sobre apoyo y es, a la vez, el momento flexionante en el extremo *B* del miembro *BA* porque es la suma de los momentos que actúan a la izquierda de la sección; como ya se había determinado, es positivo. En cambio, para el extremo *B* del miembro *BD* el momento flexionante es el momento de apoyo sobre barra $M'_{BD}$, ya que éste es la suma de los momentos que actúan a la izquierda de la sección. En la figura 2.16 puede verse que si el momento $M_{BA}$ es positivo, el momento $M_{BD}$ debe ser negativo para que la suma de momentos en el nudo sea cero, ecuación 2.20, y si $M_{BD}$ es negativo, $M'_{BD}$, o sea, el momento flexionante, debe ser positivo.

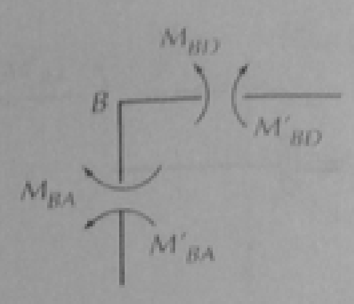



**Figura 2.16.** Determinación del signo de momentos flexionantes en el nudo *B* del ejemplo 2.10

En cualquier sección localizada entre el punto B y la fuerza vertical de 18 ton, el momento flexionante en el miembro *BD* es igual a +18 ton-m más el producto $R_{Ay}x$, donde *x* es la distancia del punto B a la sección considerada. Como el momento $R_{Ay}x$ tiene sentido horario, es positivo y se suma al momento de + 18 ton-m. Bajo la carga concentrada *x* vale 3 m y el momento flexionante

total alcanza un valor de 36 ton-m. A la derecha de la carga concentrada el momento flexionante empieza a disminuir por la acción de esta misma fuerza que produce un momento negativo (antihorario). Al llegar a la articulación $C$ el momento flexionante tiene que ser nulo. Después continúa disminuyendo hasta llegar al punto $D$ con un valor de –36 ton-m, que puede obtenerse de la siguiente manera

$$M_D = +18 + R_{Ay}(9) - (18)(6) = -36 \text{ ton-m}$$

El momento flexionante en cualquier sección del miembro $ED$ puede obtenerse multiplicando la reacción $R_E$ por la distancia $y$ del punto $E$ a la sección considerada. Desde el punto de observación de la figura 2.15 los momentos son horarios y están producidos por una fuerza que actúa a la izquierda de la sección; por lo tanto los flexionantes son positivos. En la figura 2.17 se ha trazado un diagrama de cuerpo libre del nudo $D$. Puede verse que los dos momentos flexionantes, el que corresponde al miembro $DB$ y el que corresponde al miembro $DE$, son de barra sobre apoyo. Por lo tanto, deben tener signo contrario para que el nudo esté en equilibrio.

Nótese que el diagrama de momentos flexionantes se ha trazado, en el ejemplo, de tal forma que siempre queda en la cara de los miembros donde hay esfuerzos de compresión. Así, en los miembros $AB$ y $ED$, como los momentos son positivos, habrá esfuerzos de compresión en lo que sería la cara superior de los miembros si se consideran como vigas desde los puntos de observación de la figura 2.15, o lo que es lo mismo, en la parte izquierda de los miembros vistos en posición vertical. En la viga $BD$, los momentos positivos producen esfuerzos de compresión en la cara superior, y los momentos negativos producen esfuerzos de compresión en la cara inferior. Esta convención para el trazo de los diagramas

**Figura 2.17.** Determinación del signo de momentos flexionantes en el nudo $D$ del ejemplo 2.10

de momentos flexionantes resulta conveniente cuando los marcos son de concreto reforzado; ya que el acero de refuerzo se coloca donde hay esfuerzos de tensión, se puede determinar fácilmente la cara donde debe colocarse, ya que es aquella opuesta al lado en que se han trazado los diagramas.

Para terminar este ejemplo se ha trazado el diagrama de fuerza normal. En el miembro $AB$ la fuerza normal es constante e igual a la reacción $R_{Ay}$, ya que en cualquier sección transversal del miembro tiene que haber una fuerza normal de compresión que equilibre a esta reacción. En el miembro $BD$ hay una fuerza normal constante de 9 ton, que se obtiene como la diferencia de $R_{Ax}$, que actúa hacia la izquierda, y de la fuerza horizontal de 12 ton aplicada hacia la derecha en el nudo $B$. En la figura 2.18 se muestra el diagrama de cuerpo libre del cual se obtiene la fuerza normal en $BD$. Y en el miembro $ED$, la fuerza normal es constante e igual a $R_{Ey}$.

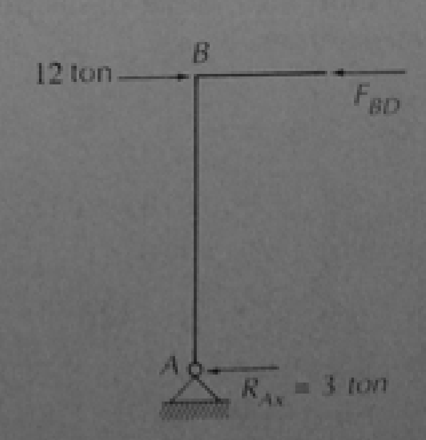
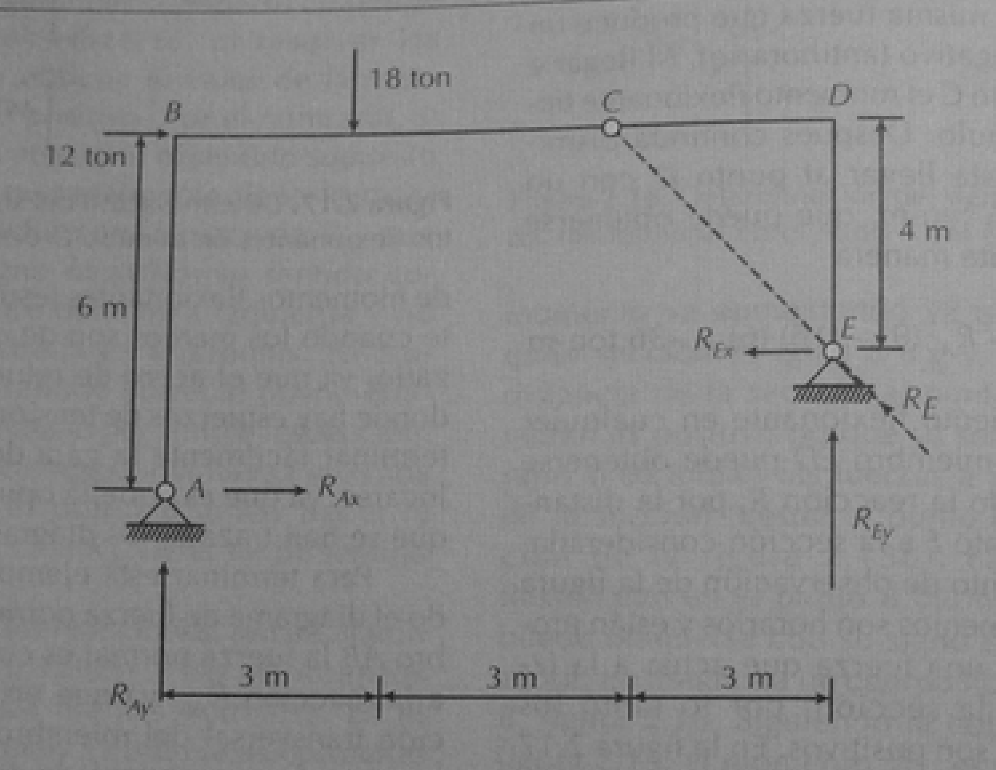



**Figura 2.18.** Diagrama de cuerpo libre de la columna $AB$ del ejemplo 2.10

## EJEMPLO 2.10. RESOLUCIÓN DE UN MARCO ISOSTÁTICO CON ARTICULACIÓN INTERIOR




$+\circlearrowright M_{C,\text{der}} = 0$

$$3R_{Ey} - 4R_{Ex} = 0$$

$$R_{Ey} = \frac{4}{3}R_{Ex}$$

La reacción en *E* debe pasar por *C*, ya que el tramo de marco entre *C* y *E* no tiene cargas externas.

$+\circlearrowright \Sigma M_A = 0$

$$-9R_{Ey} - 2R_{Ex} + 18\times 3 + 12\times 6 = 0$$
$$9R_{Ey} + 2R_{Ex} = 126$$
$$9\times\frac{4}{3}R_{Ex} + 2R_{Ex} = 126$$
$$R_{Ex} = 9 \text{ ton}$$
$$R_{Ey} = 12 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 2.10** *(continuación)*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_{Ax} + 12 - R_{Ex} = 0$$

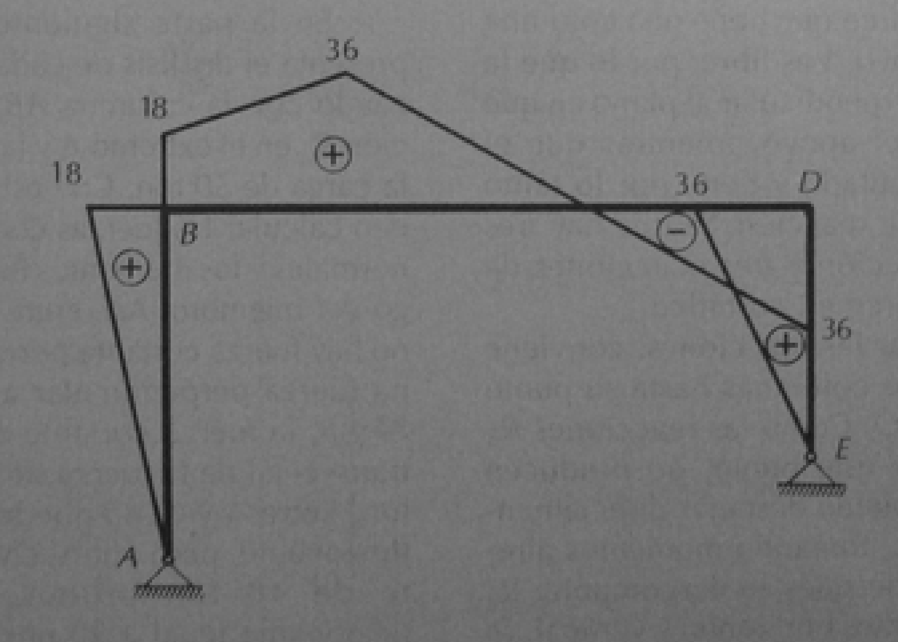
$$R_{Ax} = 9 - 12 = -3\ ton$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} - 18 + R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ay} = 18 - 12 = 6\ ton$$

DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE

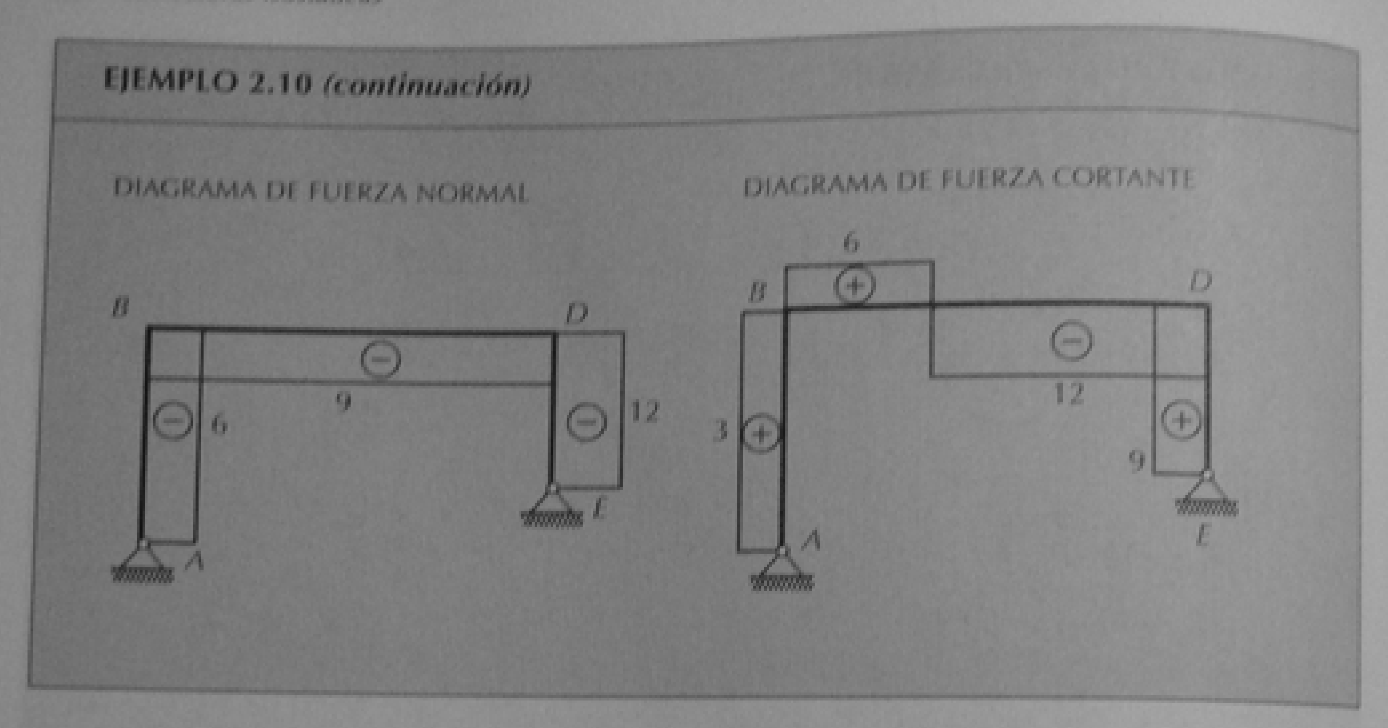



$$M_B = +\ 3\times 6 = 18 ton - m$$

$$M_{x=3} = 6\times 3 + 3\times 6 = 36 ton - m$$

$$M_D = -9\times 4 = -36 ton - m$$

**EJEMPLO 2.10 (continuación)**




**Ejemplo 2.11**

Se plantea un marco que tiene una columna inclinada. El apoyo $A$ es libre, por lo que la reacción $R_A$ es perpendicular al plano en que puede deslizar el apoyo, mientras que el apoyo $D$ es articulado y tiene por lo tanto dos incógnitas de reacción. Ya que hay tres incógitas de reacción y tres ecuaciones de equilibrio, el marco es isostático.

Para calcular las reacciones, conviene prolongar las dos columnas hasta su punto de intersección $O$. Como las reacciones $R_A$ y $R_{Dy}$ pasan por este punto, no producen momento, y se puede despejar directamente el valor de $R_{Dx}$ tomando momentos alrededor de $O$. Si después se descompone $R_A$ en sus componentes horizontal y vertical, se pueden calcular estas componentes con las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Teniendo las componentes se calcula la reacción total $R_A$ que resulta ser de 2.09 ton. A continuación se descompone la fuerza horizontal de 50 ton en una componente perpendicular a la columna $AB$ y otra paralela a dicha columna. Esto resulta conveniente, como se verá a continuación, para calcular las acciones internas en la columna y para revisar el equilibrio del nudo $B$.

En la parte siguiente del ejemplo se presenta el análisis de cada miembro. Empezando con la columna $AB$, se tiene la reacción $R_A$ en el extremo $A$ y las componentes de la carga de 50 ton. Con estas fuerzas se pueden calcular las fuerzas cortantes, las fuerzas normales y los momentos flexionantes a lo largo del miembro. Así, entre los puntos $A$ y $A'$ no hay fuerza cortante porque no hay ninguna fuerza perpendicular al miembro; entre $A'$ y $B$, la fuerza cortante es la componente transversal de la fuerza de 50 ton, o sea, 40 ton. Entre $A$ y $A'$ no puede haber momento flexionante, pero entre $A'$ y $B$ la componente de 40 ton produce un momento flexionante igual a 40 por la distancia a la sección considerada; en el punto $B$ vale 40X5 = 200 ton-m. Entre $A$ y $A'$ la fuerza normal es la fuerza de tensión producida por la reacción $R_{A'}$, mientras que entre $A'$ y $B$ se suma la componente longitudinal de la fuerza de 50 ton.

En el miembro $BC$ se tienen, en el extremo $B$, la reacción $R_{Ay}$ hacia abajo, y en el extremo $C$, la reacción $R_{Dy}$ hacia arriba, ade-

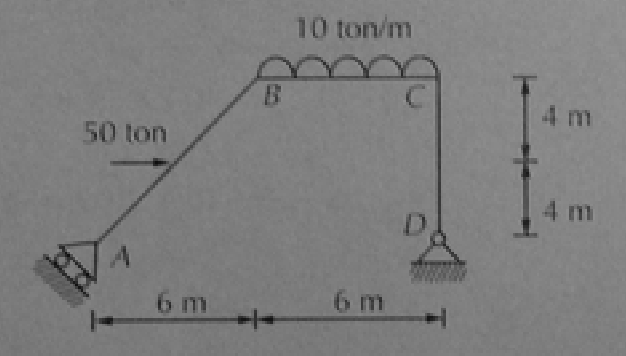
más de la carga distribuida y del momento de 200 ton-m producido por la carga de 50 ton. A partir de estos valores se pueden calcular las fuerzas cortantes, momentos flexionantes y fuerzas normales, como se ilustró para el miembro *AB*.

En el miembro *CD* se tienen las componentes horizontal y vertical de la reacción $R_D$ a partir de las cuales se pueden calcular las acciones internas a lo largo del miembro. Obsérvese que se obtiene un momento flexionante de 390 ton-m en el punto *C* que coincide con el obtenido en el mismo punto analizando el miembro *BC*, con lo cual se tiene una comprobación de las operaciones.

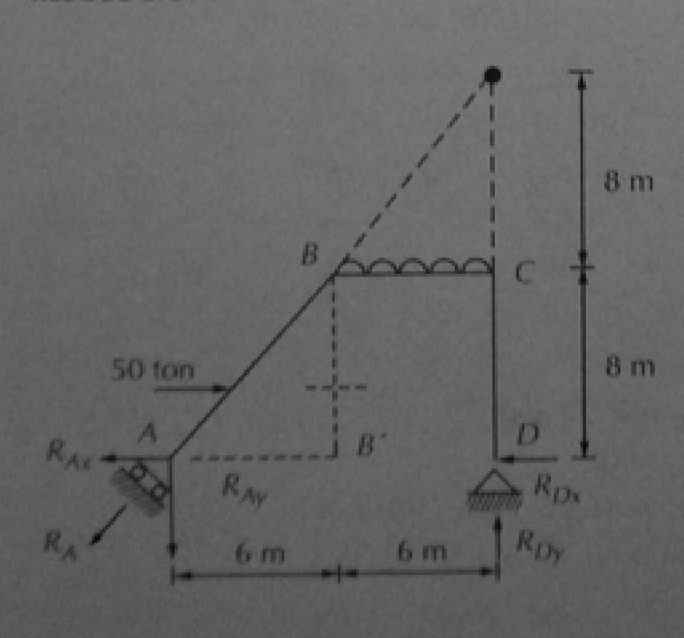
Con los valores obtenidos en el análisis de cada miembro, se trazan los diagramas de acciones internas presentados al final del ejemplo.

## EJEMPLO 2.11. RESOLUCIÓN DE UN MARCO CON UNA COLUMNA INCLINADA

DATOS:




RESOLUCIÓN:




$$\Sigma M_0 = -50\times 12 - 10\times\frac{6^2}{2} + R_{Dx}\times 16 = 0$$

$$R_{Dx} = 48.75 \text{ ton} \leftarrow$$

$$\Sigma F_x = -R_{Ax} - R_{Dx} + 50 = 0$$

$$R_{Ax} = 1.25 \text{ ton} \leftarrow$$

$$R_{Ay} = \frac{1.25}{6}\times 8 = 1.67 \text{ ton} \downarrow$$

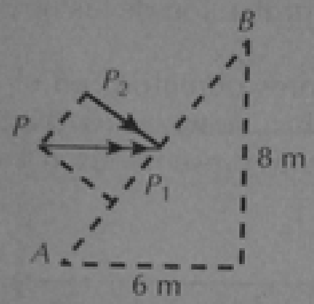
$$\Sigma F_y = -R_{Ay} + R_{Dy} - 10\times 6 = 0$$

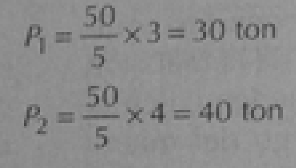
$$R_{Dy} = 61.67 \text{ ton} \uparrow$$

$$R_A = \sqrt{1.25^2 + 1.67^2} = 2.09 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 2.11 *(continuación)***

Descomponiendo $P = 50$ ton

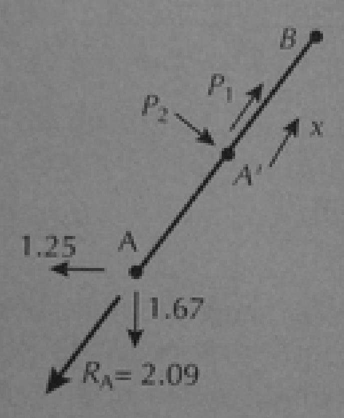


$$P_1 = \frac{50}{5} \times 3 = 30 \text{ ton}$$

$$P_2 = \frac{50}{5} \times 4 = 40 \text{ ton}$$

MIEMBRO *AB*:




$V_{AA'} = 0$

$V_{A'B} = -40$ ton

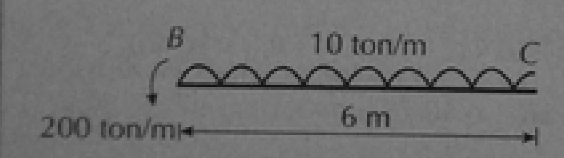
$M_{AA'} = 0$

$M_{A'B} = -40\,x$ (si $x = 5$, $M_B = -200$ ton-m)

$N_{AA'} = +2.09$ ton

$N_{A'B} = -30 + 2.09 = -27.91$ ton

MIEMBRO *BC*:




$V_B = -1.67$ ton

$V_C = -1.67 - (10)(6) = -61.67$ ton

$M_B = -50 \times 4 = -200$ ton-m

$M_C = -200 - 1.67 \times 6 - 10 \times 6 \times 3 = -390$ ton-m

$N_B = N_C = R_{Dx} = -48.75$ ton

MIEMBRO *DC*:

C

8 m

D

48.75

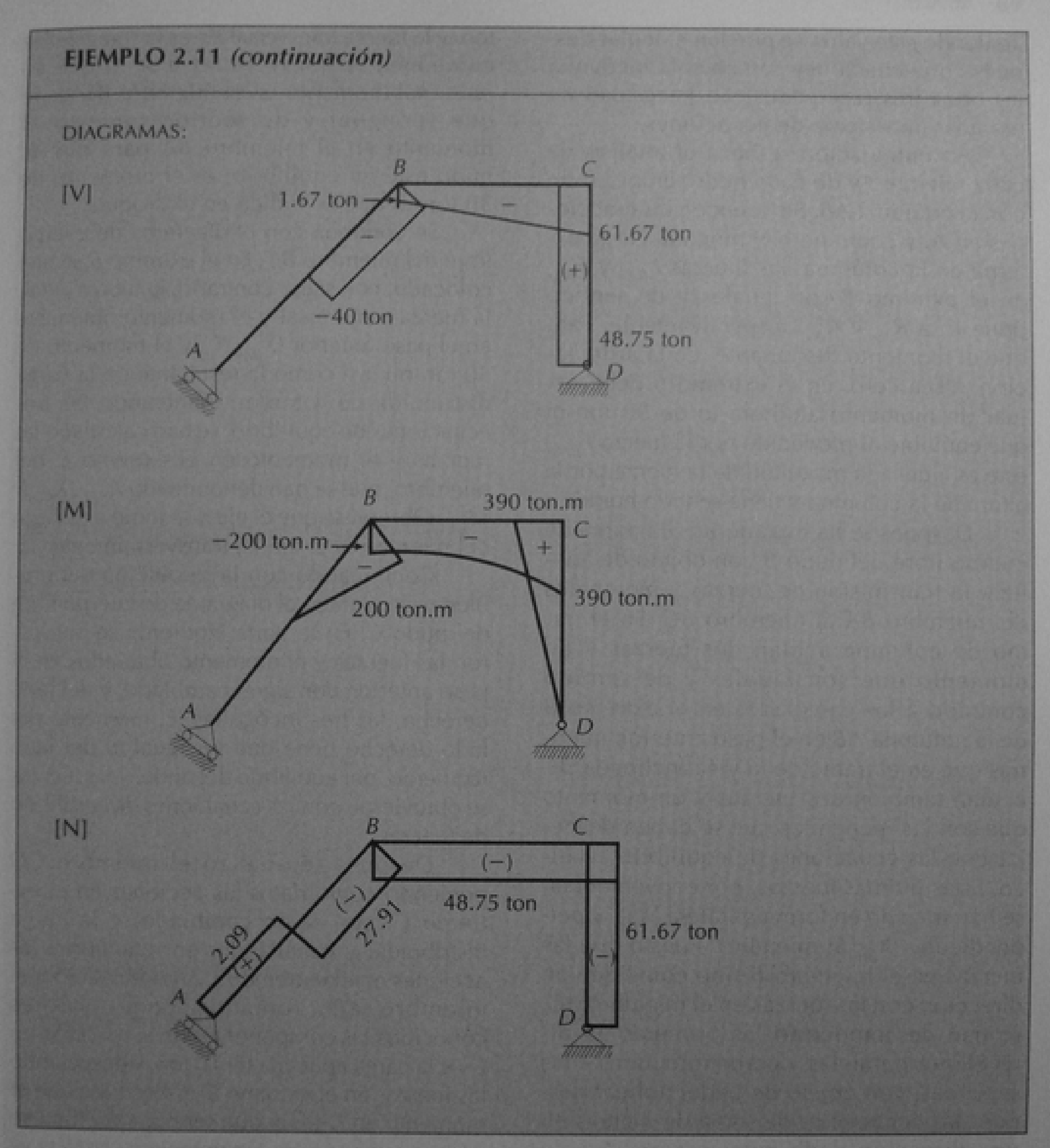
60 + 1.67 = 61.67

$V_C = V_D = +48.75$ ton

$M_D = 0$

$M_C = 48.75 \times 8 = 390$ ton-m

$N_D = N_C = -61.67$ ton




## Ejemplo 2.12

Se trata de resolver un marco de dos aguas con dos apoyos articulados y una articulación interior en el punto *D*. Hay cuatro incógnitas de reacción, tres ecuaciones de equilibrio y una ecuación de condición. Por lo tanto el marco es isostático.

En primer término se calculan las reacciones. Ya que el momento flexionante es nulo en la articulación *D*, se puede obtener directamente el valor de la reacción $R_{Ex}$.

Teniendo este valor, se pueden calcular después con ecuaciones de una sola incógnita las otras tres reacciones, sin necesidad de plantear un sistema de ecuaciones.

A continuación se hace el análisis de cada miembro y de cada nudo, empezando con la columna *AB*. Se conocen las reacciones en *A*, y como no hay ninguna carga externa en la columna, las fuerzas $F_{BAy}$ y $F_{BAx}$ en el extremo *B* son iguales y de sentido opuesto a $R_{Ay}$ y $R_{Ax}$, respectivamente. Para que el momento flexionante en la articulación *A* sea cero, en el extremo *B* debe actuar un momento antihorario de 30 ton-m que equilibre al producido por la fuerza $F_{BAx}$; éste es igual a la magnitud de la fuerza por la altura de la columna y tiene sentido horario.

Después se ha trazado un diagrama de cuerpo libre del nudo *B* con objeto de analizar la transmisión de fuerzas y momentos del miembro *BA* al miembro *BC*. En el tramo de columna actúan dos fuerzas y un momento que son iguales y de sentido contrario a los calculados en el extremo *B* de la columna *AB* en el paso anterior, mientras que en el tramo de la viga inclinada *BC* actúan también dos fuerzas y un momento que son las incógnitas que se deben despejar con las ecuaciones de equilibrio estático. Estas últimas fuerzas, por conveniencia, se han trazado en forma paralela, $X_{B\ell}$, y perpendicular, $X_{Bt}$, al miembro. Puesto que las fuerzas en el miembro *BA* no coinciden en dirección con las fuerzas en el miembro *BC*, se han descompuesto las primeras en direcciones paralelas y perpendiculares a las segundas, con objeto de poder aplicar después las ecuaciones de suma de fuerzas en una dirección dada igual a cero. Así, la fuerza vertical de 48.50 ton se descompuso en una paralela a *BC*, que es la fuerza $X_2$ del diagrama, y una perpendicular, que es la fuerza $X_1$. Lo mismo se hizo con la fuerza de 5.00 ton. La fuerza longitudinal en *BC*, $X_{B\ell}$, es la suma de las componentes longitudinales de las fuerzas de 48.50 y 5.00 ton, y la fuerza transversal $X_{Bt}$ es la suma de las componentes transversales. Por lo que se refiere al momento en el miembro *BC* tiene que ser igual y de sentido opuesto al momento en el miembro *BA* para que el nudo esté en equilibrio; es el momento de 30 ton-m que se indica en el croquis.

Se continúa con el diagrama de cuerpo libre del miembro *BC*. En el extremo *B* se han colocado, con signo contrario, la fuerza axial, la fuerza transversal y el momento obtenidos en el paso anterior ($X_{B\ell}$, $X_{Bt}$ y el momento de 30 ton-m), así como la resultante de la carga distribuida de 4 ton/m. Planteando las tres ecuaciones de equilibrio, se han calculado las fuerzas y el momento en el extremo *C* del miembro, que se han denominado $X_{CBt}$, $X_{CB\ell}$ y $M_{CB}$. Obsérvese que el eje *X* se tomó a lo largo del miembro y el eje *Y*, transversalmente.

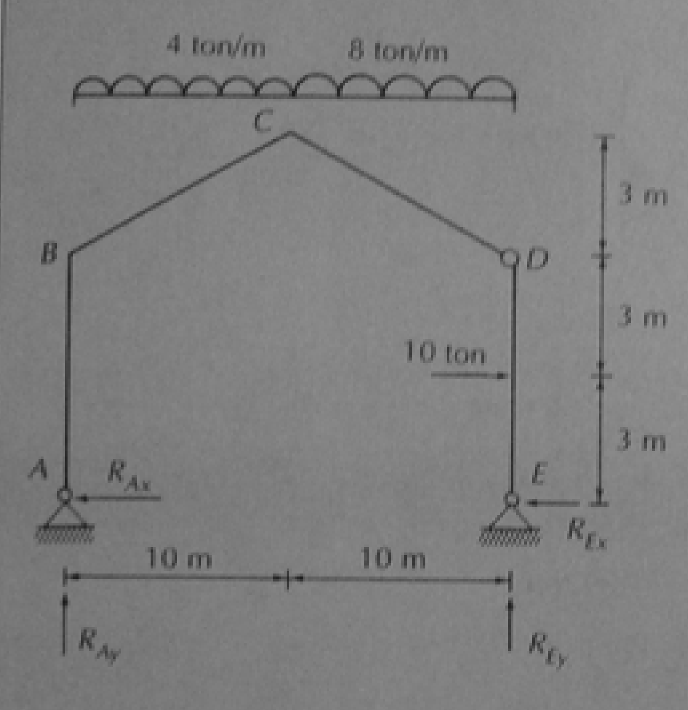
Continuando con la resolución del problema, se planteó el diagrama de cuerpo libre del nudo *C*. En la parte izquierda se colocaron las fuerzas y el momento obtenidos en el paso anterior, con signo cambiado, y del lado derecho, las tres incógnitas. El momento del lado derecho tiene que ser igual al del lado izquierdo, por equilibrio del nudo, y las fuerzas se obtuvieron con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Después se analizó el miembro *CD* poniendo como datos las acciones en el extremo *C*, con signo cambiado, y la carga distribuida, y calculando, por equilibrio, las acciones en el extremo *D*. A continuación, el miembro *ED*, tomando como valores conocidos las componentes de la reacción en *E* y la carga aplicada de 10 ton, y despejando las fuerzas en el extremo *D*. Obsérvese que el momento en *D* tiene que ser nulo por tratarse de una articulación. Finalmente se analiza el nudo *D*, para comprobar que las acciones obtenidas en el extremo *D* del miembro *ED* sean iguales a las calculadas en el mismo extremo *D* del miembro *CD*.

En la parte final del ejemplo se muestran los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

## EJEMPLO 2.12. RESOLUCIÓN DE UN MARCO DE DOS AGUAS CON UNA ARTICULACIÓN INTERNA

DATOS:




$$\ell_{BC} = \sqrt{10^2 + 3^2} = 10.44 \text{ m}$$

CÁLCULO DE LAS REACCIONES

De $\Sigma M_D = 0$, para el miembro $ED$:

$$6\,R_{Ex} - 10 \times 3 = 0$$

$$R_{Ex} = 5 \text{ ton} \leftarrow$$

De $\Sigma F_x = 0$, para todo el marco:

$$-R_{Ax} - R_{Ex} + 10 = 0$$

$$R_{Ax} = 10 - 5 = 5 \text{ ton} \leftarrow$$

De $\Sigma M_E = 0$, para todo el marco:

$$20R_{Ay} - 4 \times 10 \times 15 - 8 \times 10 \times 5 + 10 \times 3 = 0$$

$$R_{Ay} = 48.50 \text{ ton} \uparrow$$

De $\Sigma F_y = 0$, para todo el marco:

$$R_{Ay} - 4 \times 10 - 8 \times 10 + R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} = 71.50 \text{ ton} \uparrow$$

ANÁLISIS DE MIEMBROS Y NUDOS

Miembro $AB$:

De $\Sigma F_y = 0$

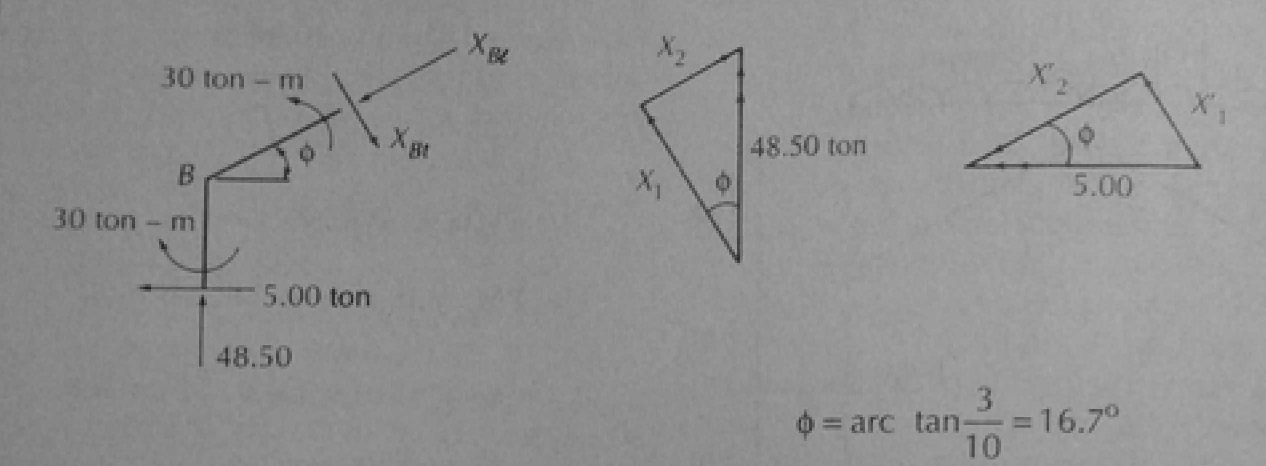
$$F_{BAy} = 48.50 \text{ ton} \downarrow$$

De $\Sigma F_x = 0$

$$F_{BAx} = 5.00 \text{ ton} \rightarrow$$

**EJEMPLO 2.12 *(continuación)***

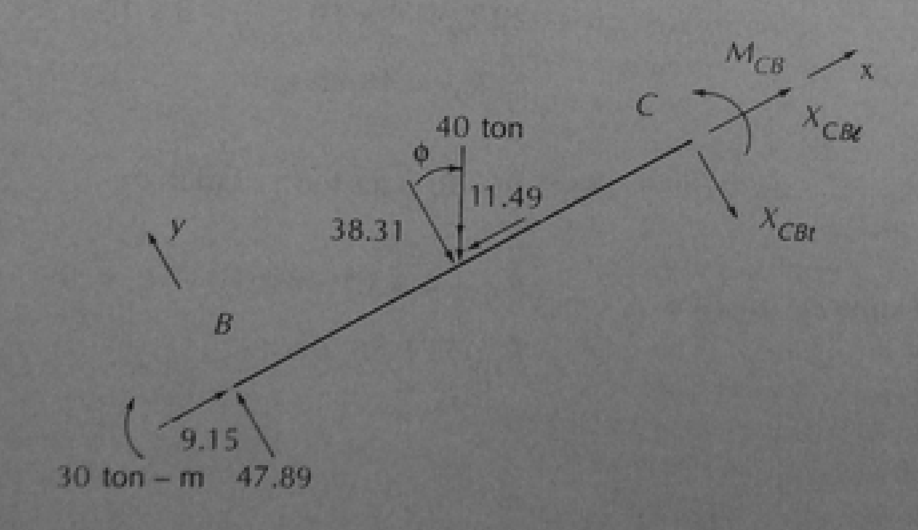
Nudo $B$:




$$\phi = \text{arc}\ \tan\frac{3}{10} = 16.7^\circ$$

$$X_{B\ell} = X_2 - X'_2 = 48.50\,\text{sen}16.7 - 5.00\cos16.7 = 9.15\ \text{ton}\ \swarrow$$
$$X_{Bt} = X_1 + X'_1 = 48.50\cos16.7 + 5\,\text{sen}16.7 = 47.89\ \text{ton}\ \searrow$$

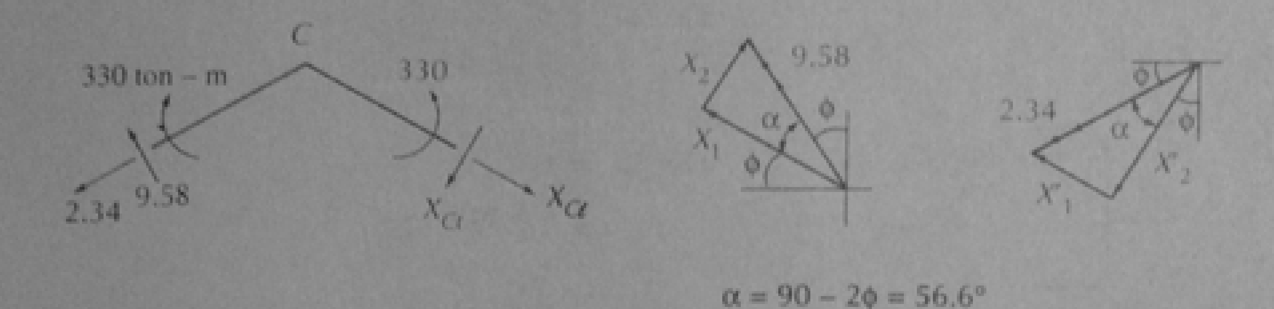
Miembro $BC$:




$$\Sigma F_y = 47.89 - 38.31 - X_{CBt} = 0, \quad X_{CBt} = 9.58\ \text{ton}\ \searrow$$
$$\Sigma F_x = 9.15 - 11.49 + X_{CB\ell} = 0, \quad X_{CB\ell} = 2.34\ \text{ton}\ \nearrow$$
$$\Sigma M_C = 30 + 47.89 \times 10.44 - 38.31 \times 5.22 - M_{CB} = 0, \quad M_{CB} = 330\ \text{ton-m}$$

**EJEMPLO 2.12** ***(continuación)***

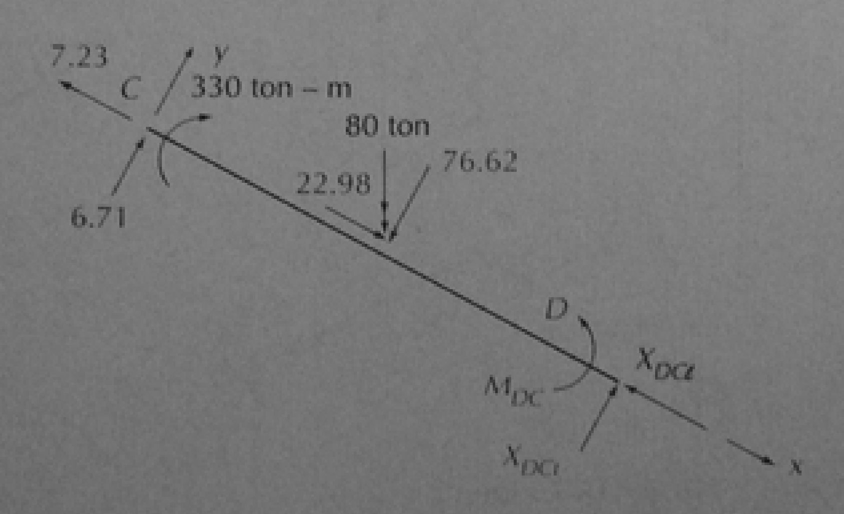
Nudo $C$:




$\alpha = 90 - 2\phi = 56.6°$

$$X_{C\ell} = X_1 + X'_1 = 9.58\cos 56.6 + 2.34\,\text{sen}\,56.6 = 7.23 \text{ ton} \searrow$$
$$X_{Ct} = X_2 - X'_2 = 9.58\,\text{sen}\,56.6 - 2.34\cos 56.6 = 6.71 \text{ ton} \swarrow$$

Miembro $CD$:




$$\Sigma F_y = 6.71 + X_{DCt} - 76.62 = 0, \quad X_{DCt} = 69.91 \text{ ton} \nearrow$$
$$\Sigma F_x = -7.23 + 22.98 - X_{DC\ell} = 0, \quad X_{DC\ell} = 15.75 \text{ ton} \nwarrow$$
$$\Sigma M_D = 330 + 6.71 \times 10.44 - 76.62 \times 5.22 - M_{DC} = 0, \quad M_{DC} = 0.09 \text{ ton-m} \approx 0$$

**EJEMPLO 2.12 *(continuación)***

Miembro *ED*:

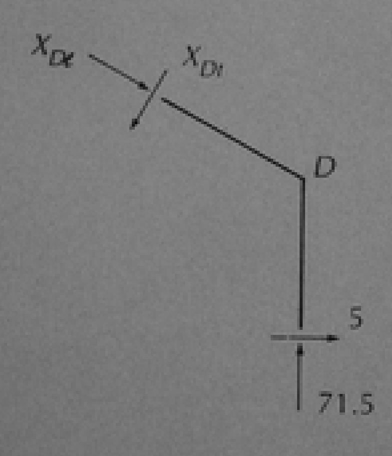
De $\Sigma F_y = 0$

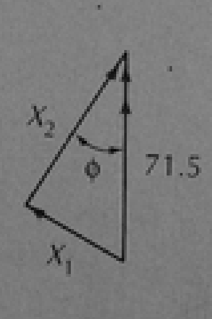
$F_{DEy} = 71.5$ ton ↓

De $\Sigma F_x = 0$

$F_{DEx} = 5$ ton ←

Nudo *D*:

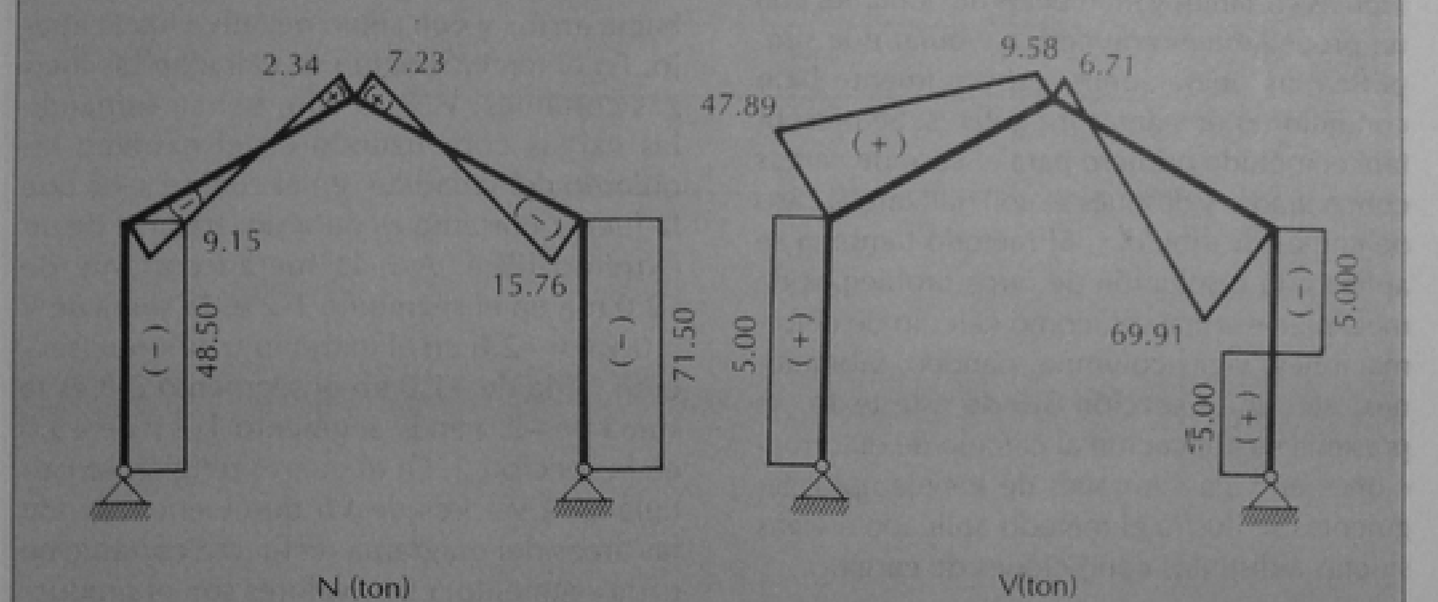


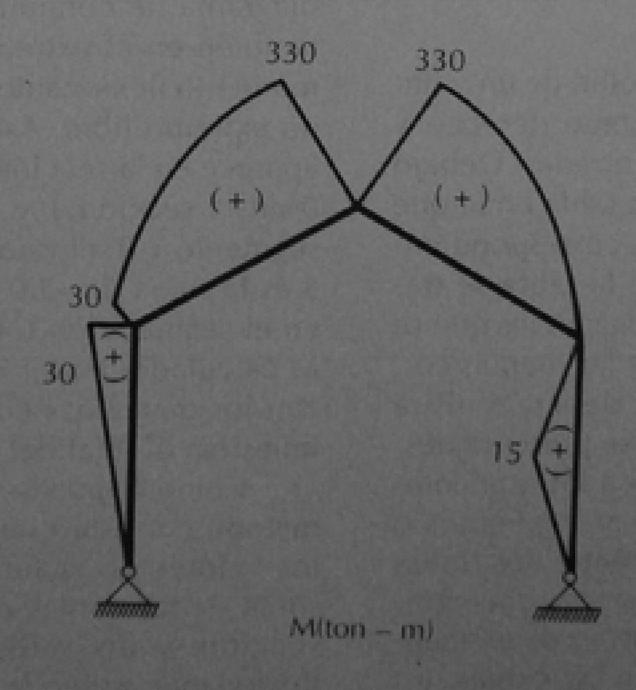




$$X_{D\ell} = 71.5\text{sen}16.7 - 5\cos 16.7 = 15.76 \text{ ton} \searrow$$
$$X_{Dt} = 71.5\cos 16.7 + 5\text{sen}16.7 = 69.92 \text{ ton} \swarrow$$
$$X_{D\ell} = -X_{DC\ell}$$
$$X_{Dt} = -X_{DCt}$$

**EJEMPLO 2.12 *(continuación)***

DIAGRAMAS



## 2.10 Determinación de reacciones, fuerzas cortantes y momentos flexionantes por el método de Newmark

Este método permite calcular las reacciones, fuerzas cortantes y momentos flexionantes con un procedimiento numérico tabular que simplifica las operaciones, especialmente bajo condiciones de cargas irregulares. Se presentará el método primero para el caso de cargas concentradas y después se generalizará al caso de cargas distribuidas. El método también se aplica a la resolución de otros problemas de mecánica estructural, como cálculo de deformaciones, vigas-columna, pandeo, vibraciones, etc. En la sección 3.6 de este texto, se presenta su aplicación al cálculo de deformaciones en vigas. A través de los ejemplos siguientes se ilustra el método aplicado a vigas sujetas a distintas condiciones de carga.

### *2.10.1 Cargas concentradas*

**Ejemplo 2.13**

Se presenta el caso más sencillo de un voladizo empotrado en su extremo derecho y sujeto a varias cargas concentradas. Debajo de la viga se ha trazado una tabla en la que se llevan a cabo los cálculos correspondientes. Las líneas verticales de la tabla se trazan en las secciones de la viga en las que se desea calcular los valores de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes. (Para fines de la explicación que se presenta después, se llamarán secciones a las que coinciden con líneas verticales y segmentos o tramos a los comprendidos entre dos líneas verticales). En el caso de cargas concentradas, los diagramas de cortantes y de momentos varían linealmente entre las cargas, así que con calcular los valores en los puntos de aplicación de las cargas, los diagramas quedan totalmente definidos.

En el primer renglón de la tabla se han escrito, en cada segmento, las distancias entre los puntos de aplicación de las cargas. Las unidades de medida se colocan en el extremo derecho del renglón. En el segundo renglón se ponen, en cada sección, las magnitudes de las cargas, $P$, con signo positivo hacia arriba y con signo negativo hacia abajo. En el tercer renglón se calculan las fuerzas cortantes, $V$. Para ello, se van sumando las cargas comenzando en el extremo izquierdo del voladizo, en el cual se sabe que la fuerza cortante es nula por tratarse de un extremo libre. Así, la fuerza cortante de −2.0 ton en el segmento 1-2 es la suma de $V = 0$ y $P = -2.0$ en el extremo izquierdo (sección 1); la de +1.0 en el segmento 2-3 es la suma de −2.0 en el segmento 1-2 y de +3.0 en la sección 2. En el cuarto renglón se calculan los valores de $Vh$ que vienen siendo las áreas del diagrama de fuerza cortante en cada segmento; estos valores son el producto del renglón 3 por el renglón 1. Y en el quinto renglón se calculan los momentos flexionantes como la suma de las áreas del diagrama de cortantes; esta suma se inicia también en el extremo izquierdo donde el momento flexionante es nulo por tratarse de un extremo libre. Así, el valor de −2.0 que aparece en la sección 2 es la suma del valor 0 en la sección 1 y el valor de −2.0 en el segmento 1-2; el valor de −0.5 en la sección 3 es la suma de −2.0 en la sección 2 y +1.5 en el segmento 2-3. Con los valores de $V$ y $M$ calculados en los renglones 3 y 5, se trazan los diagramas correspondientes que se muestran al final del ejemplo.

Como se puede ver en este ejemplo, el método consiste esencialmente en obtener los valores de la fuerza cortante como la suma de las cargas a la izquierda de cada sección, y los valores de los momentos flexionantes como la suma de las áreas del diagrama de fuerza cortante. Es un método de integración numérica. En este ejemplo, se sabe por las condiciones del problema

que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante son nulos en el extremo de la viga, y la integración numérica pudo iniciarse en esa sección. Por lo general, no se sabe de antemano dónde se tiene alguna sección de fuerza cortante o de momento flexionante nulos. En el siguiente ejemplo se ilustra una manera de resolver este problema.

**EJEMPLO 2.13. RESOLUCIÓN DE UN VOLADIZO POR EL MÉTODO DE NEWMARK**

DATOS:

2 ton — 3 ton — 4 ton

1 m — 1.5 m — 2.5 m

| | | | ① | | ② | | ③ | | ④ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1) | h | | 1.0 | | 1.5 | | 2.5 | | (m) |
| | (2) | P | −2.0 | | +3.0 | | −4.0 | | | (ton) |
| | (3) | V | 0 | −2.0 | | +1.0 | | −3.0 | | (ton) |
| (3) (1) = | (4) | Vh | | −2.0 | | +1.5 | | −7.5 | | (ton-m) |
| | (5) | M | 0 | | −2.0 | | −0.5 | | −8.0 | (ton-m) |

1 ton — (+) — (−) — 2 ton — (−) — 3 ton

DIAGRAMA DE CORTANTE (V)

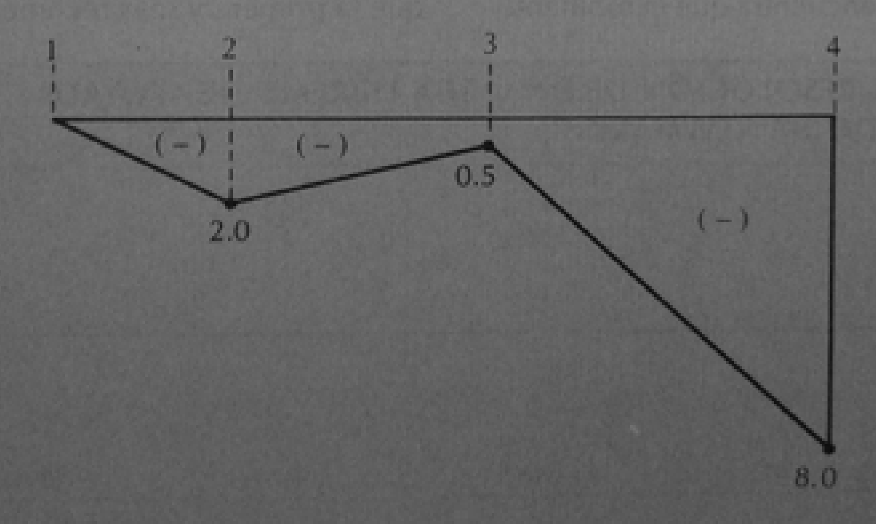



DIAGRAMA DE MOMENTO (M)

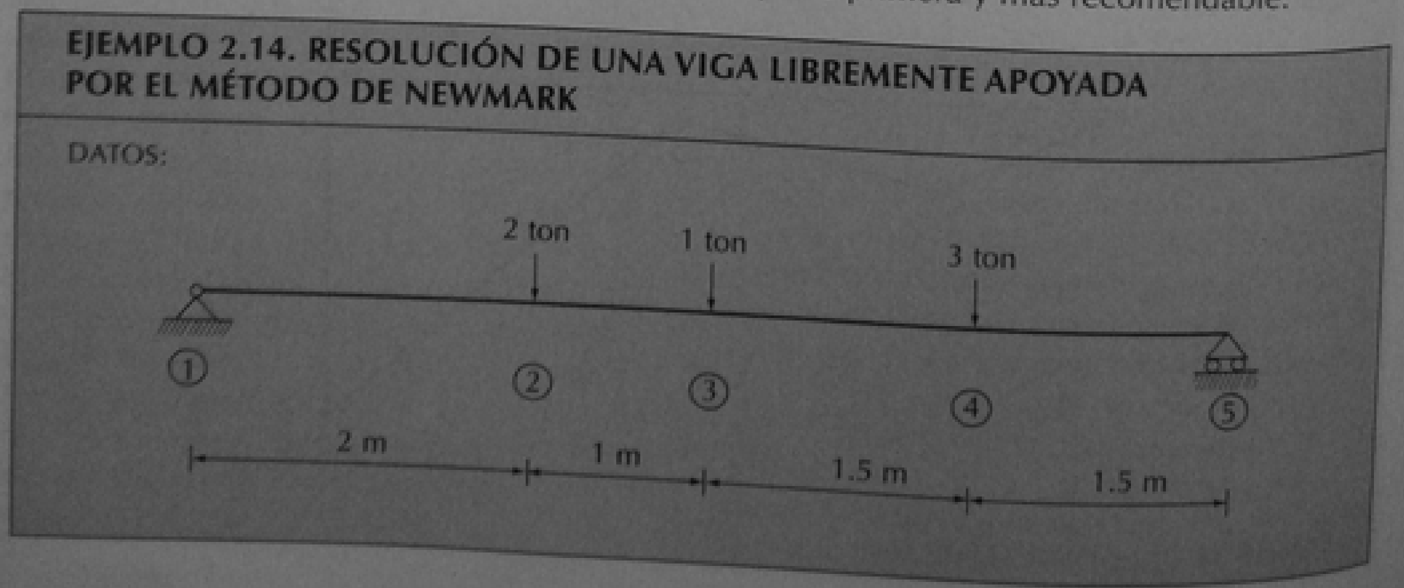
**Ejemplo 2.14**

Se resuelve en este ejemplo una viga libremente apoyada con tres cargas concentradas. Se presentan dos maneras de resolver este caso con el método de Newmark. En la primera, se ha calculado por separado la reacción en el extremo izquierdo de la viga. Esto permite conocer el valor de la fuerza cortante, *V*, en dicho extremo y por lo tanto en el segmento 1-2; es el valor de 2.58 que aparece en la sección 1 del renglón 3. Conocido este valor, puede completarse el renglón 3 sumando de izquierda a derecha los valores del renglón 2 (los renglones 1 y 2 se escriben con los datos del problema). El renglón 4 se obtiene igual que en el ejemplo anterior. Y el renglón 5 se obtiene sumando los valores de *Vh* desde el extremo izquierdo, donde se sabe que el momento flexionante es igual a cero. Como comprobación de los cálculos se llega a un valor de *M* también igual a cero en el extremo derecho de la viga.

En la segunda manera de resolver este ejemplo, se procede como se indica a continuación. Se supone un valor cualquiera de la reacción en el extremo izquierdo, que es igual a la fuerza cortante en el segmento 1-2; en el ejemplo es el valor de +1.50 que aparece en el segmento 1-2 del renglón 3; se ha denominado a este renglón con la letra *V′* para indicar que es un valor provisional de *V*. A partir de estos valores de *V′* se calculan los de *V′h* y los de *M′* de la misma manera explicada en el párrafo anterior, pero al llegar al extremo derecho de la viga se encuentra que el momento no es nulo como debe corresponder a un apoyo libre. Esto se debe a que el valor supuesto de la reacción en el extremo izquierdo de la viga no coincide con el valor correcto. Se introduce entonces en la viga lo que se llama una configuración correctiva, que consiste en aplicar en su extremo derecho un momento del mismo valor pero de sentido contrario al que resultó en dicho extremo en el renglón 5, con el fin de que el momento final sea nulo. Esta configuración correctiva se muestra al final del ejemplo. De hecho, se ha aplicado un momento externo de –6.50 ton-m que es de signo contrario al flexionante que se desea introducir de +6.50 ton-m. Se puede ver que el momento introducido produce una fuerza cortante constante de +1.083 ton a lo largo de la viga, valor que resulta de dividir el momento correctivo de 6.50 ton-m entre el claro de la viga de 6 m, y un momento flexionante que varía linealmente de 0 en el extremo izquierdo a 6.50 en el extremo derecho. La fuerza cortante correctiva se ha anotado en el renglón 6 como $V_c$. Sumando los renglones 3 y 6 se obtienen en el renglón 7 las fuerzas cortantes correctas *V*. En el renglón 8 se han calculado las áreas correctas del diagrama de fuerzas cortantes *Vh*, y en el renglón 9 los momentos correctos *M* empezando con 0 en la sección 1 y sumando los valores del renglón 8 de izquierda a derecha. Como comprobación de los cálculos se llega a un valor de *M* igual a 0 en el extremo derecho de la viga. Esta segunda manera de resolver el problema es más general que la primera y más recomendable.

**EJEMPLO 2.14. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA POR EL MÉTODO DE NEWMARK**

DATOS:



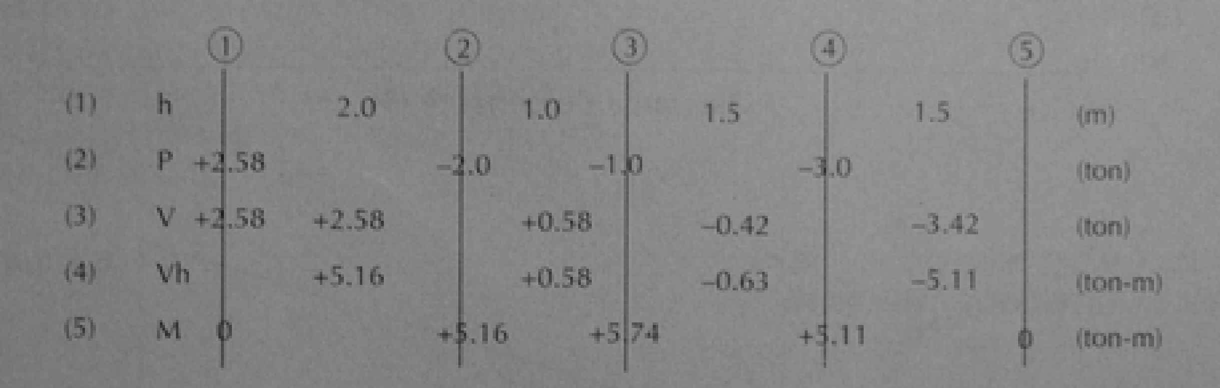
**EJEMPLO 2.14 *(continuación)***

Solución I

$$+\circlearrowright \Sigma M_5 = 0$$

$$-(2)(4) - (1)(3) - (3)(1.5) + R_1(6) = 0$$

$$R_1 = 2.58 \text{ ton}$$

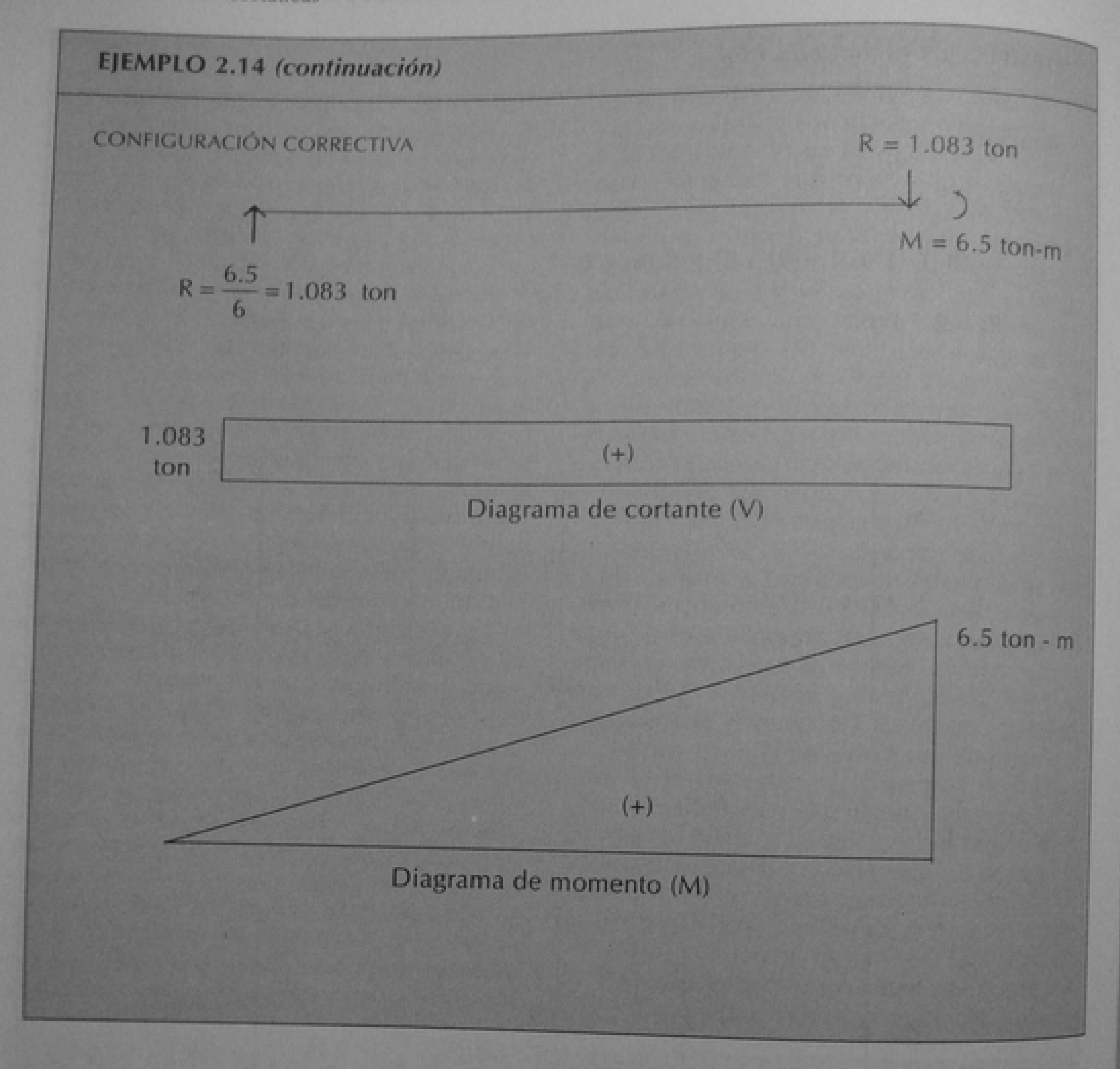


| | | ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | h | | 2.0 | | 1.0 | | 1.5 | | 1.5 | | (m) |
| (2) | P | +2.58 | | −2.0 | | −1.0 | | −3.0 | | | (ton) |
| (3) | V | +2.58 | +2.58 | | +0.58 | | −0.42 | | −3.42 | | (ton) |
| (4) | Vh | | +5.16 | | +0.58 | | −0.63 | | −5.11 | | (ton-m) |
| (5) | M | 0 | | +5.16 | | +5.74 | | +5.11 | | 0 | (ton-m) |

Solución II

| | | ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | h | | 2.0 | | 1.0 | | 1.5 | | 1.5 | | (m) |
| (2) | P | | | −2.0 | | −1.0 | | −3.0 | | | (ton) |
| (3) | V' | | +1.5 | | −0.5 | | −1.5 | | −4.5 | | (ton) |
| (4) | V'h | | +3.00 | | −0.50 | | −2.25 | | −6.75 | | (ton-m) |
| (5) | M' | 0 | | +3.00 | | +2.50 | | +0.25 | | −6.50 | (ton-m) |
| (6) | $V_c$ | | +1.083 | | +1.083 | | +1.083 | | +1.083 | | (ton) |
| (7) | V | | +2.583 | | +0.583 | | −0.417 | | −3.417 | | (ton) |
| (8) | Vh | | +5.166 | | +0.583 | | −0.625 | | −5.125 | | (ton-m) |
| (9) | M | 0 | | +5.166 | | +5.749 | | +5.124 | | −0.001 | (ton-m) |

**EJEMPLO 2.14** ***(continuación)***




### *2.10.2 Cargas distribuidas*

El procedimiento para resolver vigas con cargas distribuidas consiste en sustituir la carga distribuida por cargas concentradas. Ya que se tengan las cargas concentradas, la resolución se efectúa como se vio en los ejemplos anteriores. Las cargas concentradas deben ser equivalentes a la carga distribuida, en el sentido de que las fuerzas cortantes y momentos flexionantes producidos por ambos tipos de cargas sean iguales en determinados puntos. Esto se ilustra en la figura 2.19. La carga distribuida en el tramo *A-B* se sustituye por las dos cargas concentradas $P_A$ y $P_B$, de tal manera que la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *A* y *B* sean iguales con ambos tipos de carga, aunque difieran en el interior del tramo. En las figuras 2.19*a* y 2.19*b*, se muestran con trazo lleno los diagramas correspondientes a las cargas concentradas y con línea punteada, los correspondientes a la carga distribuida. En los puntos *A* y *B*, los diagramas deben

coincidir. A continuación se muestra la forma de calcular las cargas concentradas equivalentes distinguiendo dos casos: que la carga distribuida tenga una variación lineal o que tenga una variación no lineal.

Cuando la carga tiene una variación lineal, como en la viga de la figura 2.20*a*, el procedimiento consiste en sustituir la carga en un tramo cualquiera $n$, $n+1$, figura 2.20*b*, por las reacciones de una viga libremente apoyada sujeta la misma carga, figura 2.20*c*. Estas recciones pueden calcularse con los principios de Estática ya conocidos. Así, si se considera que la carga trapecial se sustituye por una carga uniformemente distribuida y una carga triangular, las reacciones tendrán los siguientes valores. Para la carga uniformemente distribuida

$$P'_n = P'_{n+1} = {}^{ah}\!/_2$$

y para la carga triangular

$$P''_n = \frac{h(b-a)}{6}$$

$$P''_{n+1} = \frac{h\ (b-a)}{3}$$

Sumando ambas reacciones en cada punto se obtiene

$$P_n = \frac{h\ (2a+b)}{6} \tag{2.21}$$

$$P_{n+1} = \frac{h\ (2b+a)}{6} \tag{2.22}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación de estas ecuaciones, así como algunas

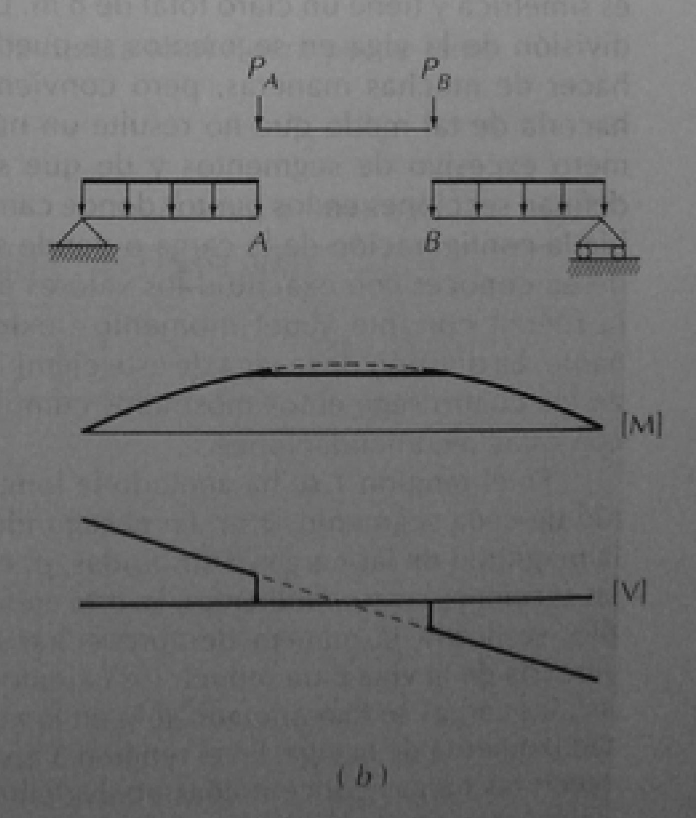



**Figura 2.19.** Sustitución de cargas distribuidas por cargas concentradas

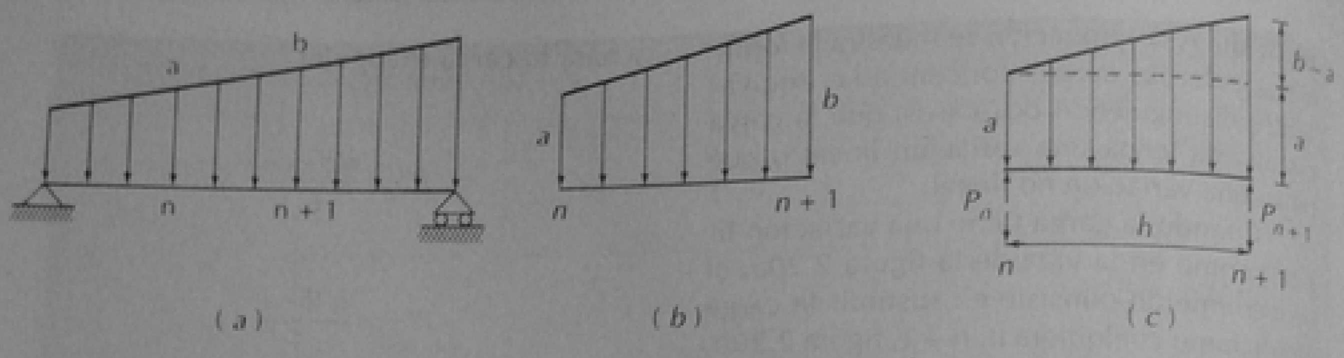



**Figura 2.20.** Cargas concentradas equivalentes

maneras en que el método puede simplificarse con el fin de reducir los cálculos numéricos.

**Ejemplo 2.15**

Se trata de una viga libremente apoyada con una carga que aumenta linealmente de 0 a 2.50 ton/m entre las secciones 1 y 2; después permanece constante entre las secciones 2 y 4; y después decrece también linealmente entre las secciones 4 y 5. La viga es simétrica y tiene un claro total de 8 m. La división de la viga en segmentos se puede hacer de muchas maneras, pero conviene hacerla de tal modo que no resulte un número excesivo de segmentos y de que se definan secciones en los puntos donde cambia la configuración de la carga o donde se desea conocer con exactitud los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante. La división de la viga de este ejemplo en los cuatro segmentos mostrados cumple con estas recomendaciones.

En el renglón 1 se ha anotado la longitud de cada segmento, 2 m. En el segundo, la magnitud de las cargas distribuidas, *p*, en las secciones correspondientes. En este ejemplo, se ilustra la manera de aprovechar la simetría de la viga para reducir los cálculos; así, las cargas se han anotado sólo en la mitad izquierda de la viga. En el renglón 3 aparecen las cargas concentradas equivalentes calculadas con las ecuaciones 2.21 y 2.22. Así, para el segmento 1-2 se tiene:

$$P_n = \frac{2}{6}\left[(2\times 0)+(-2.50)\right] = \frac{-5}{6} = -0.83$$

$$P_{n+1} = \frac{2}{6}\left[2(-2.50)+0\right] = -\frac{10}{6} = -1.67$$

y para el segmento 2-3,

$$P_n = \frac{2}{6}\left[2(-2.50)-250\right] = -2.50 = P_{n+1}$$

Obsérvese que $P_n$ es en todos los casos la carga en el extremo izquierdo del tramo y $P_{n+1}$ es la carga en el extremo derecho, ya que con esta notación se dedujeron las ecuaciones 2.21 y 2.22.

Los renglones 4 y 5 se utilizan para calcular las fuerzas cortantes. Se trabaja simultáneamente en los dos renglones de la siguiente manera. Como la viga es simétrica, se sabe que la fuerza cortante es nula en el punto medio, o sea, en la sección 3. Por lo tanto, se inicia el llenado de los renglones 4 y 5 anotando 0 en la sección 3 del renglón 4. A partir de esta sección se calculan las fuerzas cortantes sumando las fuerzas de derecha a izquierda y cambiando el signo. Así, el 0 en la sección 3 del renglón 4 y la fuerza de −2.50 en el extremo derecho del segmento 2-3, con signo cambiado, dan el valor de +2.50 que aparece en el renglón 5, segmento 2-3. Este valor, sumado al de −2.50 que aparece en la parte derecha de la sección 2, con signo cambiado, da el valor de +5.00

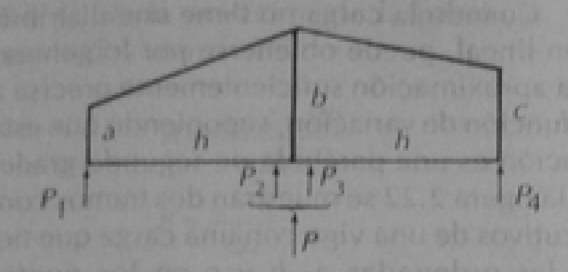



**Figura 2.21.** Carga equivalente total en una sección

que aparece en la sección 2, renglón 4. De esta manera se completan los renglones 4 y 5. Obsérvese que los valores de $V$ en el renglón 4 son valores exactos, mientras que los de $\overline{V}$ en el renglón 5 son valores promedio, puesto que si la carga es distribuida, la fuerza cortante no es constante en los tramos correspondientes.

En el renglón 6 se calculan los momentos flexionantes. Se puede empezar en el extremo izquierdo de la viga, porque al ser un apoyo libre, el momento es nulo en ese punto. A partir de ese extremo, se van sumando los valores de $\overline{V}$ de cada segmento. Obsérvese que en este ejemplo no se calculó el renglón con los productos $Vh$, porque como $h$ es constante, se ha factorizado en el extremo derecho del renglón 6. Para calcular los momentos reales, hay que multiplicar entonces los valores del renglón 6 por el valor de $h$ = 2 m.

En algunas ocasiones no interesan los valores exactos de la fuerza cortante en las secciones, sino únicamente los valores promedio en los segmentos y los valores exactos de los momentos flexionantes en las secciones. Cuando es así, en vez de calcular las fuerzas concentradas equivalentes a ambos lados de cada sección, se puede calcular la fuerza concentrada equivalente total en la sección. Esta fuerza puede obtenerse sumando los valores de $P_{n+1}$ en el extremo derecho del segmento de la izquierda y de $P_n$ en el extremo izquierdo del segmento de la derecha, figura 2.21. Estas fuerzas son las denominadas $P_2$ y $P_3$ en dicha figura. De acuerdo con las ecuaciones 2.21 y 2.22,

$$P_2 = h(2b + a)/6$$

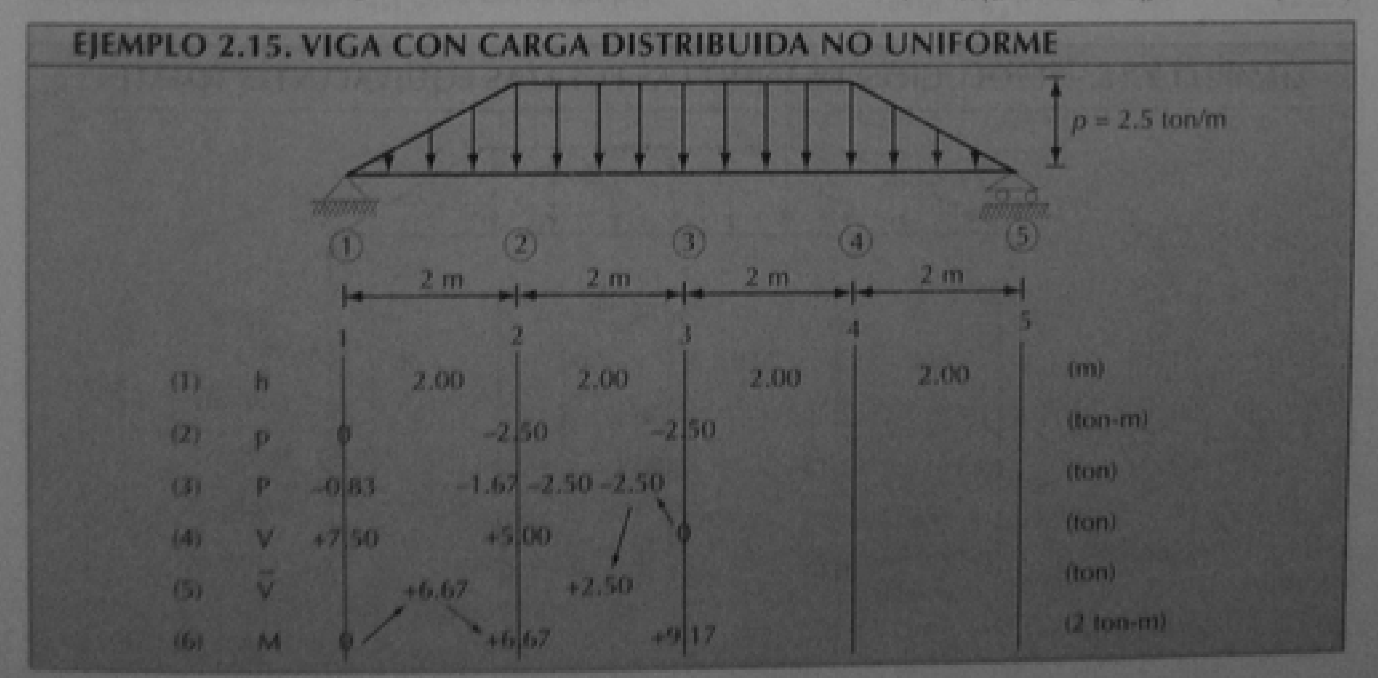
$$P_3 = h(2b + c)/6$$

y la fuerza total $P$ será por lo tanto

$$P = P_2 + P_3$$

$$P = h(a + 4b + c)/6 \qquad (2.23)$$

**EJEMPLO 2.15. VIGA CON CARGA DISTRIBUIDA NO UNIFORME**



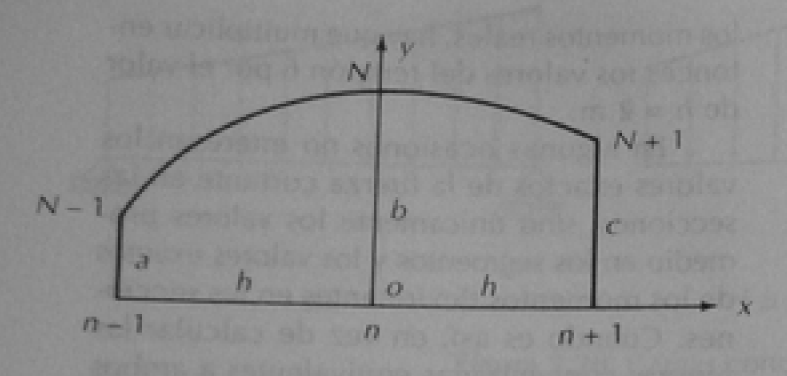



**Figura 2.22.** Carga con distribución no lineal

**Ejemplo 2.16**

Se resuelve la misma viga del ejemplo anterior, calculando las fuerzas equivalentes totales en las secciones 2 y 3. El valor de –4.17, por ejemplo, resulta de aplicar la ecuación 2.23 de la siguiente manera:

$$P_2 = \frac{2}{6}(0 + 4 \times 2.50 + 1 \times 2.50) = 4.17$$

Sólo se calculan las fuerzas cortantes promedio en los segmentos, por lo que no se tienen los valores exactos de fuerza cortante en las secciones.

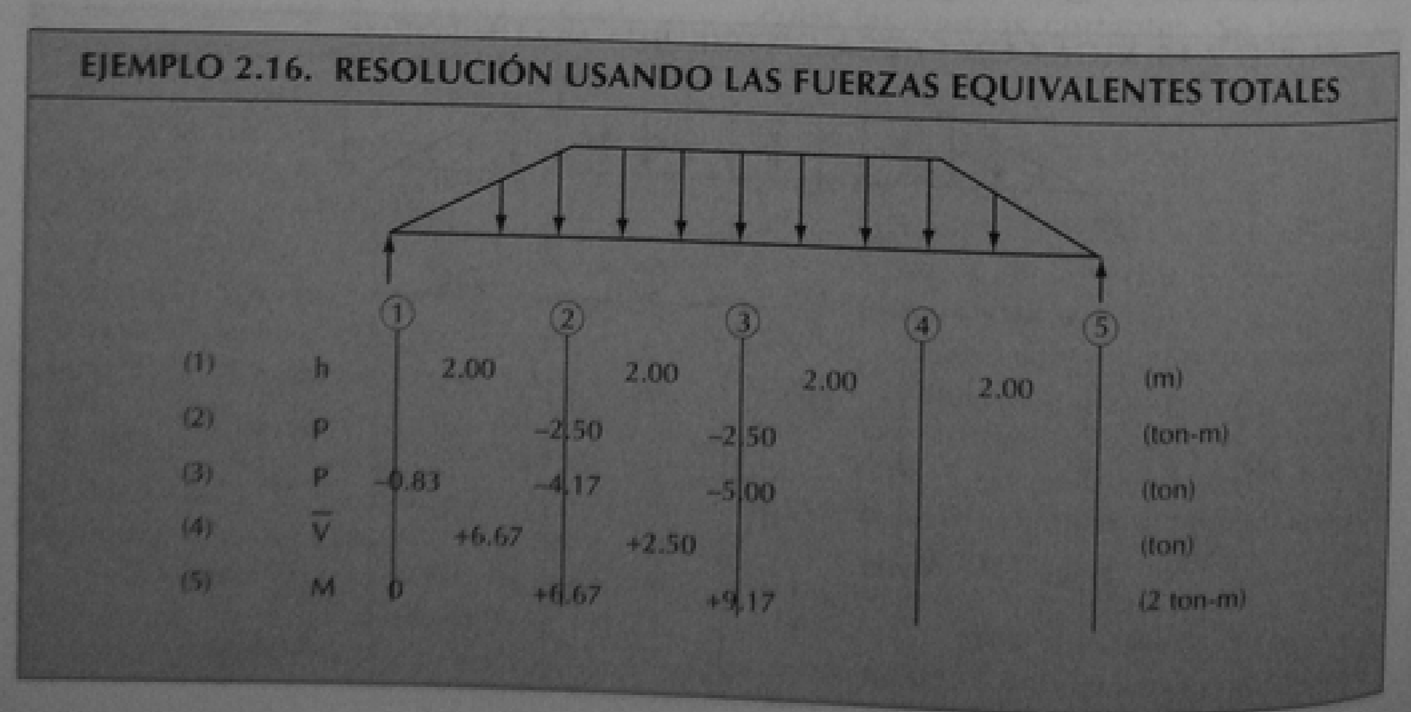
Cuando la carga no tiene una distribución lineal, puede obtenerse por lo general una aproximación suficientemente precisa a su función de variación, suponiendo que esta función es una parábola de segundo grado. En la figura 2.22 se muestran dos tramos consecutivos de una viga con una carga que tiene las ordenadas $a$, $b$ y $c$ en los puntos $N - 1$, $N$ y $N + 1$, respectivamente. Se puede suponer que la función de la carga se puede representar por la ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$, y ajustar las constantes $A$, $B$ y $C$ para que la curva pase por los puntos $N - 1$, $N$ y $N + 1$. Si se eligen los ejes de coordenadas como se muestra en la figura 2.22, las coordenadas de los puntos $N - 1$, $N$ y $N + 1$ serán, respectivamente: $(-h, a)$, $(0, b)$ y $(h, c)$. Sustituyendo estos tres pares de coordenadas en la ecuación de la curva, se obtienen las tres siguientes ecuaciones:

$$a = Ah^2 - Bh + C$$

$$b = C$$

$$c = Ah^2 + Bh + C$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones se determinan las tres constantes, $A$,



$B$ y $C$, de la ecuación de la parábola. Los resultados son:

$$A = \frac{a + c - 2b}{2h^2}$$

$$B = \frac{c - a}{2h}$$

$$C = b$$

y la ecuación de la parábola, en función de las ordenadas de la función de carga $a$, $b$ y $c$, resulta ser

$$y = \frac{a + c - 2b}{2h^2} x^2 + \frac{c - a}{2h} x + b \tag{2.24}$$

Conocida la ecuación de la parábola, se pueden calcular las cargas concentradas equivalentes que se indican en la figura 2.23. Como puede verse, se ha denominado $P_{n,n-1}$ a la carga concentrada en el punto $n$ del segmento $n$, $n-1$; $P_{n-1,n}$ a la carga concentrada en el punto $n-1$ del mismo tramo y así sucesivamente. Los valores de las cargas concentradas equivalentes se calculan como las reacciones de vigas libremente apoyadas que están sujetas a una carga que sigue la ecuación 2.24. Así, si se quiere calcular la fuerza concentrada $P_{n+1,n}$, se calculan primero el área de la carga en el tramo $n$, $n + 1$, y el momento de primer orden del área respecto al punto $n$. Las ecuaciones correspondientes son las siguientes:

$$A = \int_0^h y dx = \frac{a + c - 2b}{6h^2} x^3 + \frac{c - a}{4h} x^2 + bx$$

$$A = \frac{h}{12}(5c + 8b - a)$$

$$M_n = \int_0^h yx dx = \frac{a + c - 2b}{8h^2} x^4 + \frac{c - a}{6h} x^3 + \frac{b}{2} x^2$$

$$M_n = \frac{h^2}{24}(7c + 6b - a)$$

Ahora se puede calcular la carga $P_{n+1,n}$ tomando momentos respecto al punto $n$

$$P_{n+1,n}\, h = M_n$$

Despejando el valor de $P_{n+1,n}$:

$$P_{n+1,n} = \frac{h}{24}(7c + 6b - a) \tag{2.25}$$

La fuerza concentrada $P_{n,n+1}$ puede calcularse restando la fuerza $P_{n+1,n}$ del área A:

$$P_{n,n+1} = \frac{h}{12}(5c + 8b - a) - \frac{h}{24}(7c + 6b - a)$$

$$P_{n,n+1} = \frac{h}{24}(3c + 10b - c) \tag{2.26}$$

Los valores de las cargas $P_{n-1,n}$ y $P_{n,n-1}$ pueden obtenerse de las ecuaciones ya deducidas tomando las ordenadas de izquierda a derecha en vez de tomarlas de derecha

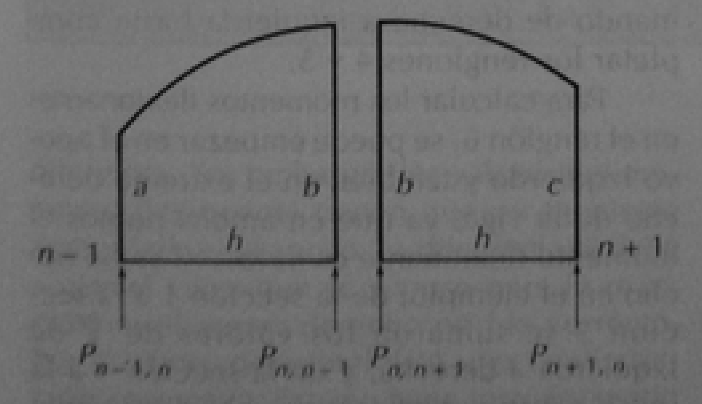



**Figura 2.23.** Cargas concentradas equivalentes para distribución no lineal

a izquierda. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$P_{n-1,n} = \frac{h}{24}(7a + 6b - c) \qquad (2.27)$$

$$P_{n,n-1} = \frac{h}{24}(3a + 10b - c) \qquad (2.28)$$

Cuando no se requiera el valor exacto de la fuerza cortante en las secciones, puede calcularse la fuerza concentrada equivalente total sumando $P_{n,n-1}$ y $P_{n,n+1}$:

$$P_n = \frac{h}{12}(a + 10b + c) \qquad (2.29)$$

En el ejemplo 2.17 se ilustra la aplicación de estas ecuaciones.

**Ejemplo 2.17**

Se trata de una viga con dos apoyos libres y un voladizo en el extremo derecho, con una carga distribuida que sigue una variación parabólica que queda definida por los valores de $p$ en las secciones 2 y 3. Estos valores de $p$ están expresados en términos de una constante $p_o$ que se anota en el extremo derecho del renglón 2 y que tiene unidades de fuerza entre longitud.

En el renglón 3 se han calculado las fuerzas concentradas equivalentes con las ecuaciones 2.25 a 2.28, factorizando la constante $h/24$ en el extremo derecho del renglón. Por ejemplo, en el apoyo de la izquierda,

$$P_{n-1,n} = \frac{h}{24}\left[7 \times 0 + 6(-2.67) - (-2.67)\right]p_0$$

$$= \frac{hp_0}{24}(-13.35)$$

en el lado derecho de la sección 2:

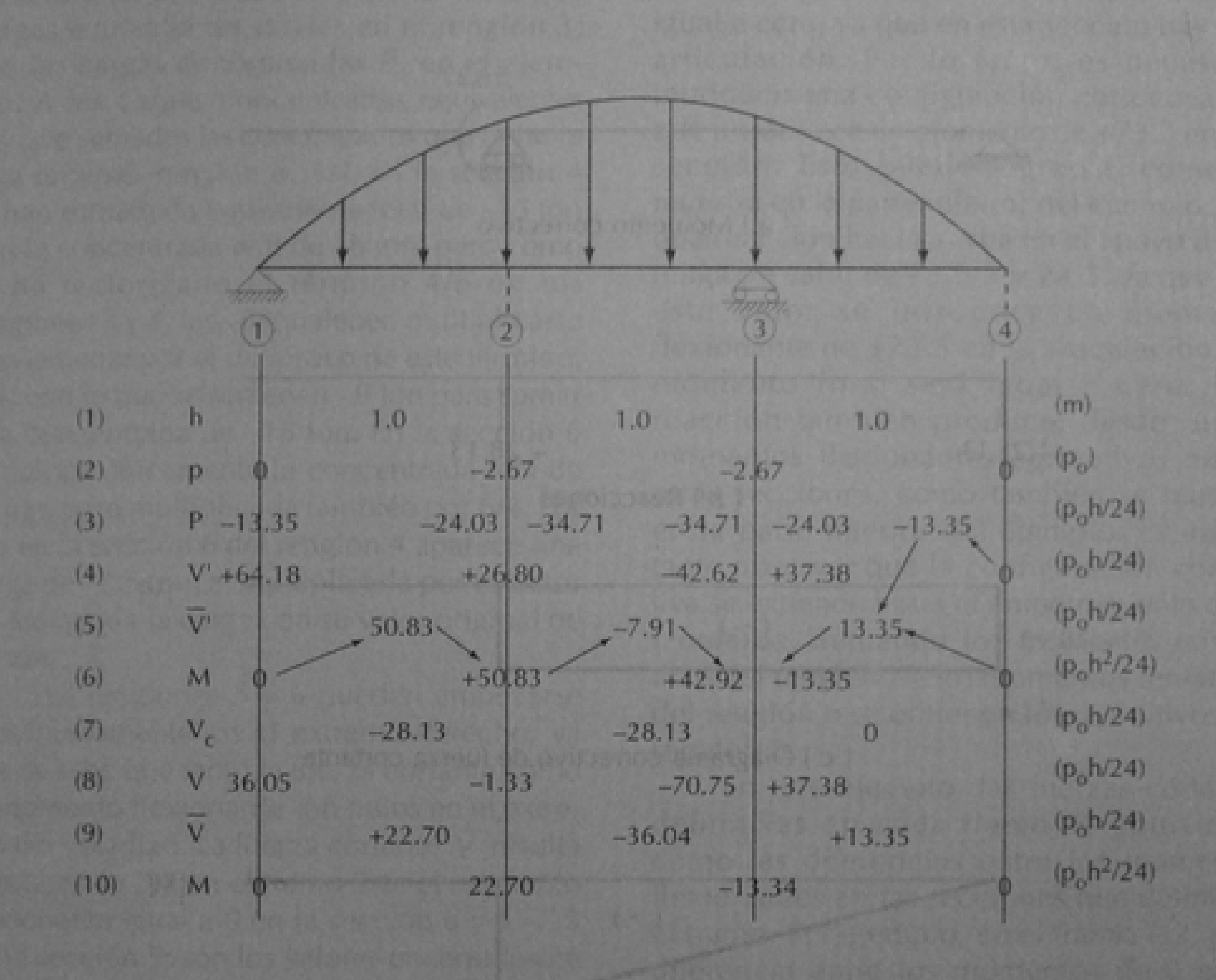
$$P_{n,n+1} = \frac{h}{24}\left[3(-2.67) + 10(-2.67) - (0)\right]p_0$$

$$P_{n,n+1} = \frac{hp_0}{24}(-34.71)$$

En este ejemplo, se sabe que la fuerza cortante en el extremo del voladizo es nula. Por lo tanto, conviene iniciar el cálculo de $V$ en el renglón 4 poniendo 0 en este punto. A partir de este valor se suman los valores de $P$ de derecha a izquierda cambiando el signo. El 0 en la sección 4 más la fuerza de –13.35 con signo cambiado da el valor de $\bar{V}$ de +13.35 en el segmento 3-4 del renglón 5. Este valor más la fuerza $P$ de –24.03 con signo cambiado da el valor de +37.38 para $V$ en el renglón 4, a la derecha de la sección 3. Al llegar a este punto, se debe sumar la reacción en el apoyo derecho, cuyo valor no se conoce. Lo que se hace entonces, es suponer un valor de dicha reacción, como en el ejemplo 2.14, para posteriormente introducir una configuración correctiva. En este ejemplo, se supuso una reacción de 114.71, que sumada a la carga concentrada equivalente de –34.71, da por resultado una fuerza de 80.00 en el apoyo derecho de la viga. Este valor, cambiado de signo y sumado a la fuerza cortante de 37.38 que aparece a la derecha del apoyo, da el valor de –42.62 en el renglón 4, a la izquierda de la sección 3. Ahora ya se puede continuar sumando de derecha a izquierda hasta completar los renglones 4 y 5.

Para calcular los momentos flexionantes en el renglón 6, se puede empezar en el apoyo izquierdo y también en el extremo derecho de la viga, ya que en ambos puntos el momento flexionante es nulo. Así se ha hecho en el ejemplo; de la sección 1 a la sección 3 se sumaron los valores de $\bar{V}$ de izquierda a derecha, y de la sección 4 a la sección 3 se sumaron de derecha a izquierda cambiando el signo. Al llegar a la sección 3 por ambos caminos, se llega con valores

## EJEMPLO 2.17. VIGA CON DOS APOYOS Y CARGA PARABÓLICA




diferentes. Sin embargo, los valores del momento flexionante tienen que ser iguales a ambos lados del apoyo. La diferencia se debe a que el valor que se supuso para la reacción en el apoyo derecho no fue correcto. Por lo tanto, debe incluirse una configuración correctiva. Esto se hace introduciendo un momento de 42.92 + 13.35 = 56.27 a la derecha del apoyo derecho, figura 2.24, ya que el valor de −13.35 es correcto. Este momento correctivo produce una reacción hacia abajo (negativa) en el apoyo izquierdo y una fuerza cortante correctiva $V_c$ constante entre los dos apoyos de 56.27/2 = 28.13, con signo negativo. Esta fuerza cortante correctiva, renglón 7, se suma a las fuerzas cortantes calculadas provisionalmente en los renglones 4 y 5 para obtener las fuerzas cor-

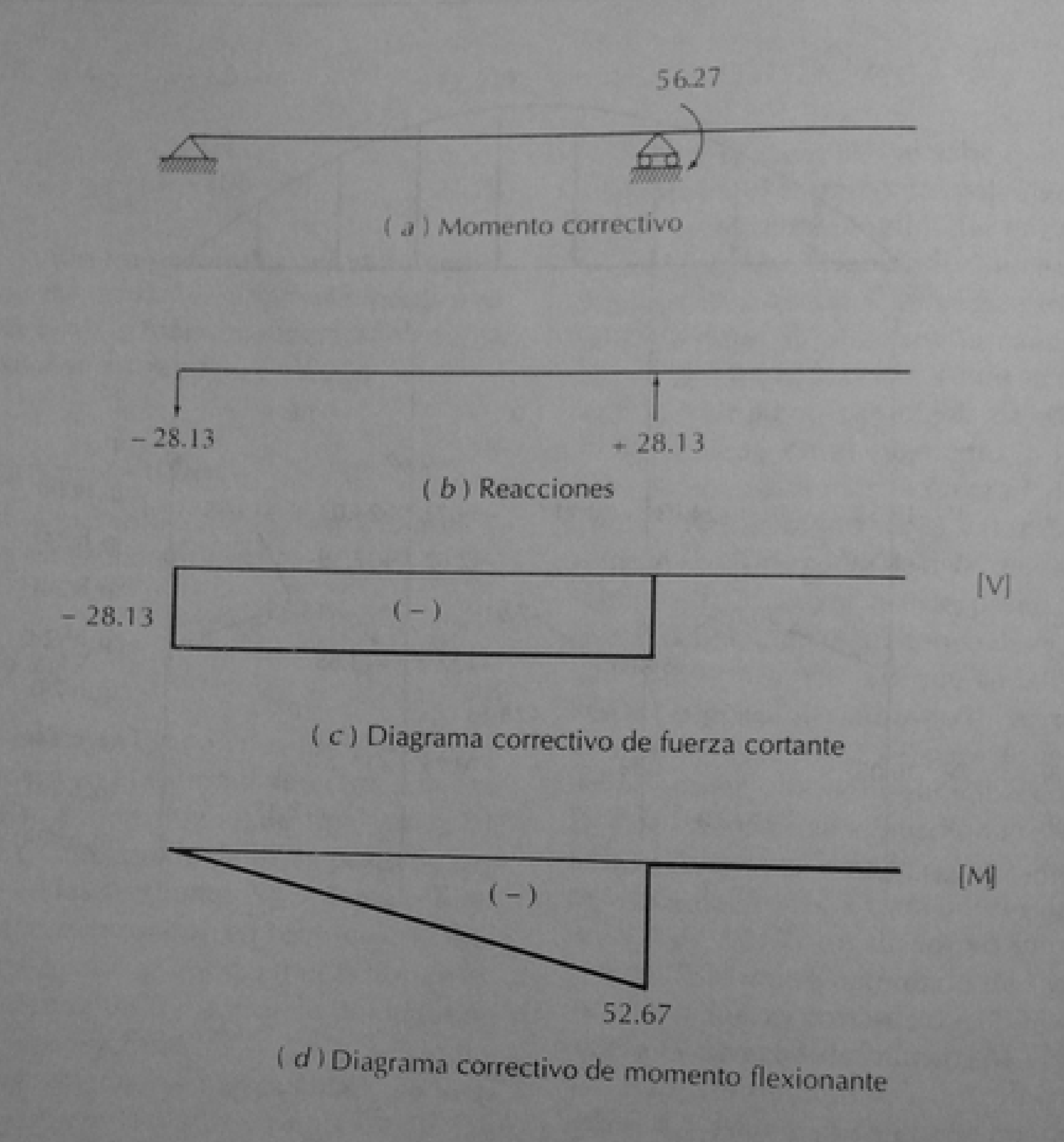



**Figura 2.21.** Configuraciones correctivas del ejemplo 2.17

tantes finales en los renglones 8 y 9. Sumando nuevamente los valores de $\nabla$ a partir del apoyo izquierdo, se obtienen los momentos finales en el renglón 10. Obsérvese que ahora sí se llega al mismo momento en el apoyo derecho sumando de izquierda a derecha y sumando de derecha a izquierda.

### Ejemplo 2.18

Se ilustra la resolución de una viga con una articulación interior, y con cargas distribuida y concentradas simultáneamente. La carga distribuida tiene una variación lineal, renglón 2, por lo que las cargas concentradas

equivalentes se calcularon con las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23, esta última en las secciones 2, 3 y 4, en las que se tienen las cargas equivalentes totales en el renglón 3; son las cargas denominadas $P_i$ en el ejemplo. A las cargas concentradas equivalentes hay que sumarles las concentradas que tiene la viga original, renglón 4. Así, en la sección 4 se han sumado la equivalente total de –15 ton con la concentrada real de –6 ton, pero como se ha factorizado el término 4/6 en los renglones 3 y 4, las –6 ton deben multiplicarse previamente por el recíproco de este término, 6/4, con lo que se obtienen - 9 ton para sumar a la concentrada de –15 ton. En la sección 6 se coloca únicamente la concentrada real de –5 ton, pero multiplicada también por 6/4. Por eso en la sección 6 del renglón 4 aparece una carga de –7.5 ton; al multiplicarla por el factor de 4/6 queda la carga con su valor original de –5 ton.

Los renglones 5 y 6 pueden empezarse simultáneamente en el extremo derecho, ya que se sabe que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante son nulos en el extremo del voladizo. La fuerza cortante $\overline{V}$ resulta entonces de 7.5 en el tramo 5-6, el momento flexionante igual a 0 en la sección 6 y a –7.5 en la sección 5; son los valores encerrados en rectángulos que son definitivos. El renglón 5 no puede continuarse, de derecha a izquierda, después del tramo 5-6, ya que no se conoce la reacción en *B*. Se supuso entonces un valor de $\overline{V}$ igual a 0 en el tramo 4-5, con lo cual ya se pudo completar el renglón 5, pero con valores tentativos a partir de este tramo. A continuación se completó el renglón 6, sumando de derecha a izquierda los valores de $\overline{V}$ a partir del valor definitivo de $M'$ en la sección 5. Los valores de $M'$ son tentativos ya que se basan en el valor también tentativo de $\overline{V} = 0$.

En el renglón de $M'$ puede verse que en la sección 2 aparece un momento flexionante de –73.5, cuando tiene que ser igual a cero, ya que en esta sección hay una articulación. Por lo tanto, es necesario introducir una configuración correctiva, tal que introduzca un momento de +73.5 en esa sección. Esto puede lograrse, como se muestra en la parte inferior del ejemplo, con una reacción hacia arriba en el apoyo *B* que tenga un valor de 73.5/3 = 24.5, ya que con este valor se introduce un momento flexionante de +73.5 en la articulación y el momento final será igual a cero. Esta reacción también produce, desde luego, momentos flexionantes correctivos en las otras secciones, como también se muestra en la parte inferior del ejemplo. Es importante observar que la configuración correctiva se extiende hasta el empotramiento de la izquierda. Sumando los momentos correctivos del renglón 7 a los momentos tentativos del renglón 6 se obtienen los definitivos del renglón 8.

En este ejemplo, las fuerzas cortantes definitivas en cada tramo se obtuvieron como las diferencias entre los momentos flexionantes en las secciones que delimitan el tramo. Por ejemplo, en el tramo 1-2, es la diferencia entre los momentos de 0 en la sección 2 y –38.5 en la sección 1. También pudieron obtenerse sumando a las fuerzas cortantes $\overline{V}$ el cortante correctivo de –24.5 producido por la reacción aplicada en *B*.

Existen casos de vigas con articulaciones interiores en los que la posición de la articulación permite resolver el problema directamente, sin necesidad de plantear configuraciones correctivas. El lector puede en este momento consultar la primera parte del ejemplo 3.11 del capítulo 3, hasta el renglón 4. Ahí se ilustra un caso de este tipo.

## EJEMPLO 2.18. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CON ARTICULACIÓN INTERIOR

4 ton/m — 6 ton — 2 ton/m — 5 ton

A — B

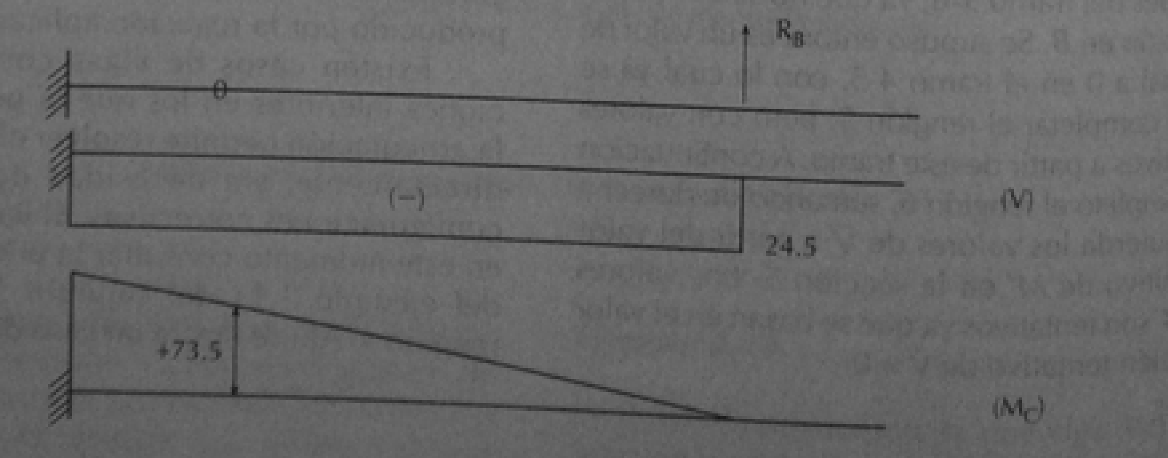
5@ 4 = 20 m

| | Secc. 1 | | Secc. 2 | | Secc. 3 | | Secc. 4 | | Secc. 5 | | Secc. 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 4 m |
| $p$ | −4.0 | | −3.5 | | −3.0 | | −2.5 | | −2.0 | | | (ton/m) |
| $P_1$ | −11.5 | | −21.0 | | −18.0 | | −15.0 | | −6.5 | | | (ton/m)(4m/6) |
| $P(total)$ | −11.5 | | −21.0 | | −18.0 | | −24.0 | | −6.5 | | −7.5 | (ton/m)(4m/6) |
| $\overline{V}$ | | +63.0 | | +42.0 | | +24.0 | | (0) | | [+7.5] | | " |
| $\overline{M}$ | −136.5 | | −73.5 | | −31.5 | | −7.5 | | [−7.5] | | [0] | (ton/m)(4m/6)(4m) |
| $M_C$ | +98.0 | | +73.5 | | +49.0 | | +24.5 | | 0 | | | " |
| $M$ | −38.5 | | 0 | | +17.5 | | +17.0 | | −7.5 | | | " |
| $V$ | | +38.5 | | +17.5 | | −0.5 | | −24.5 | | 7.5 | 0 | (ton/m)(4m/6) |
| $R_B$ | | | | | | | | | +38.5 | | | " |

[ ] Valores conocidos

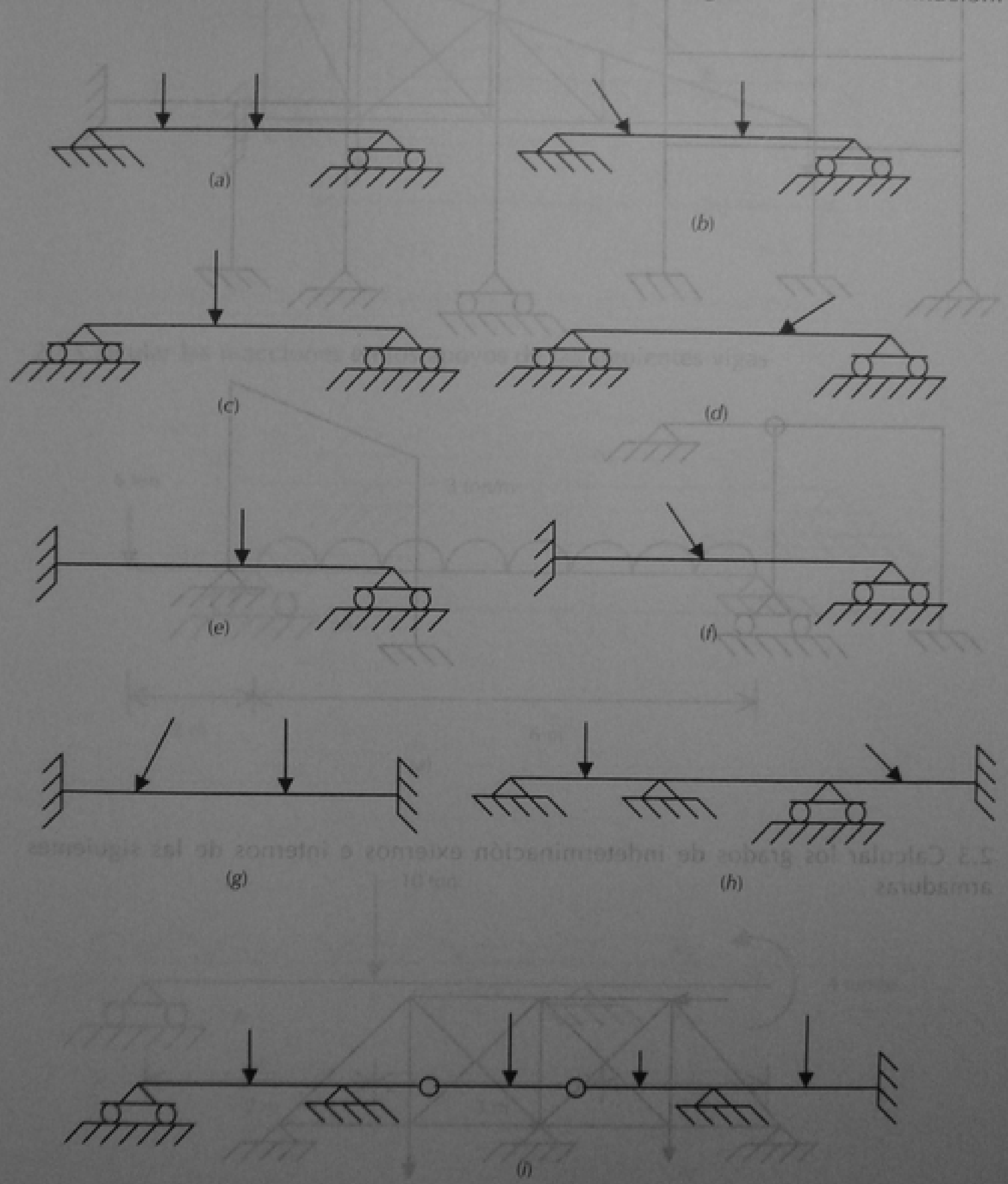
( ) Valores supuestos

Configuraciones correctivas:



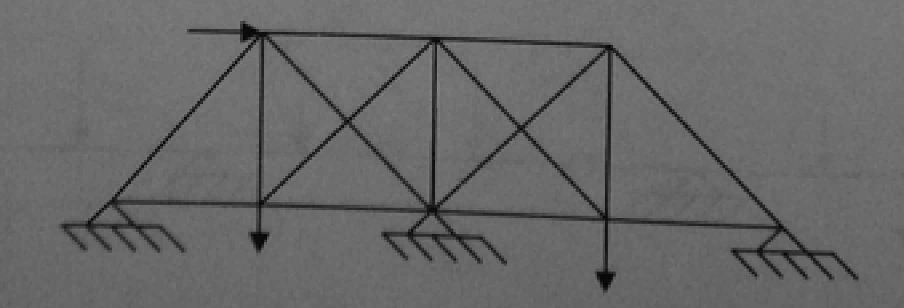
## PROBLEMAS

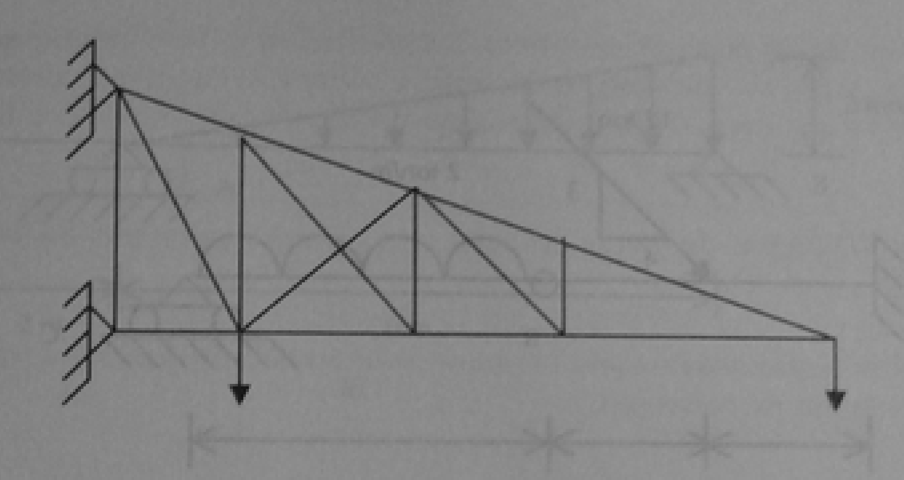
2.1 Para cada una de las siguientes vigas, establecer si son isostáticas, hiperestáticas o inestables. En caso de que sean hiperestáticas, calcular el grado de indeterminación.



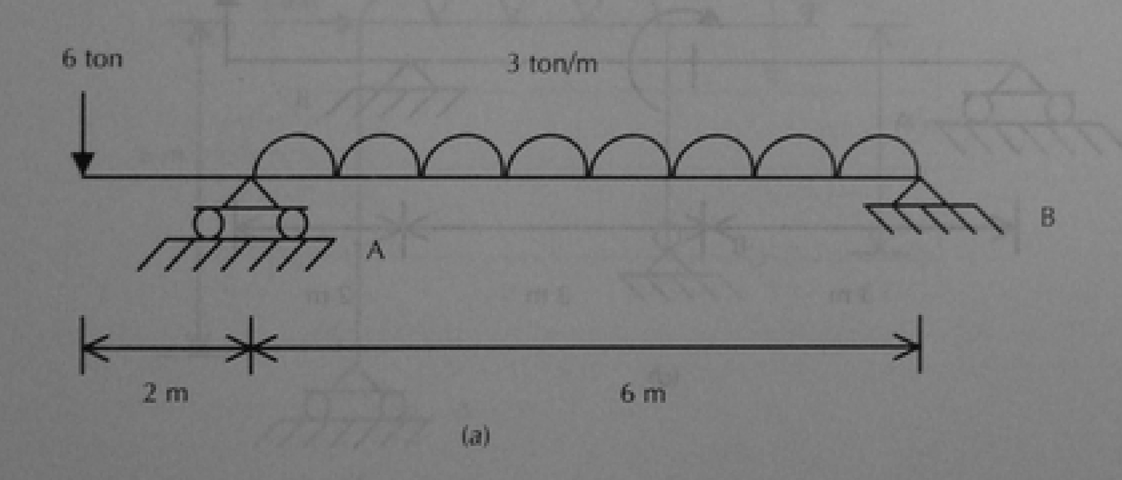
2.2 Calcular el grado de indeterminación de cada uno de los siguientes marcos

2.3 Calcular los grados de indeterminación externos e internos de las siguientes armaduras

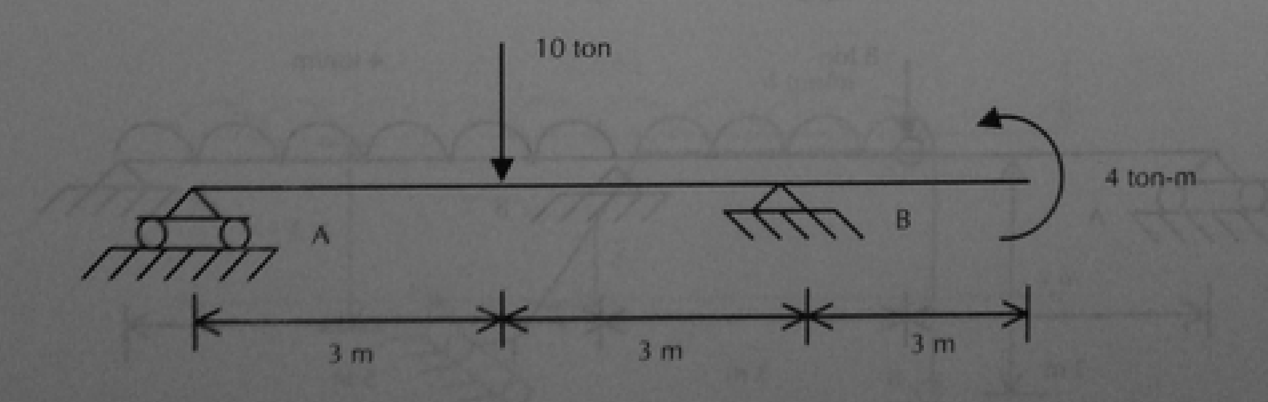




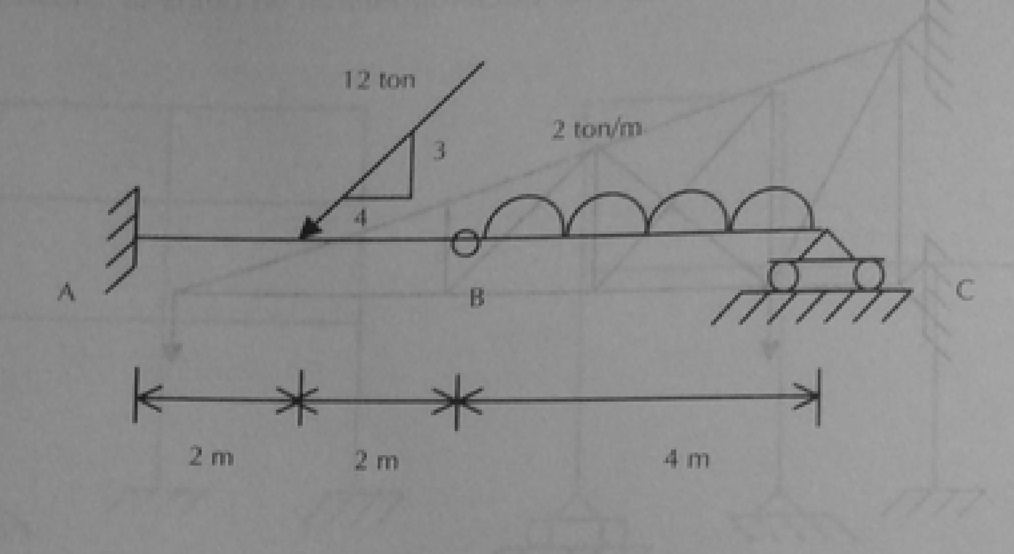
2.4 Calcular las reacciones en los apoyos de las siguientes vigas



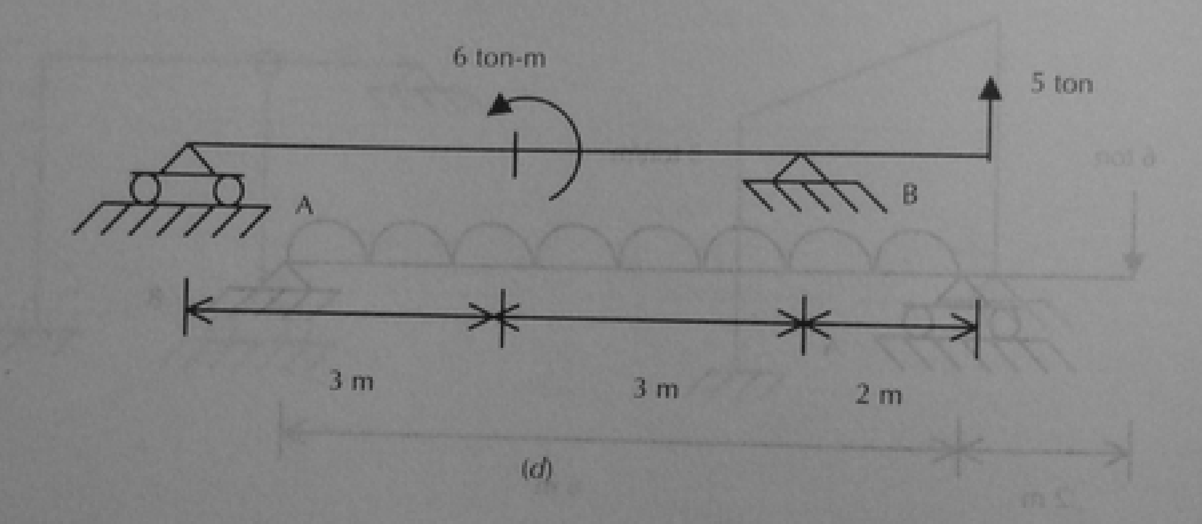

(a)



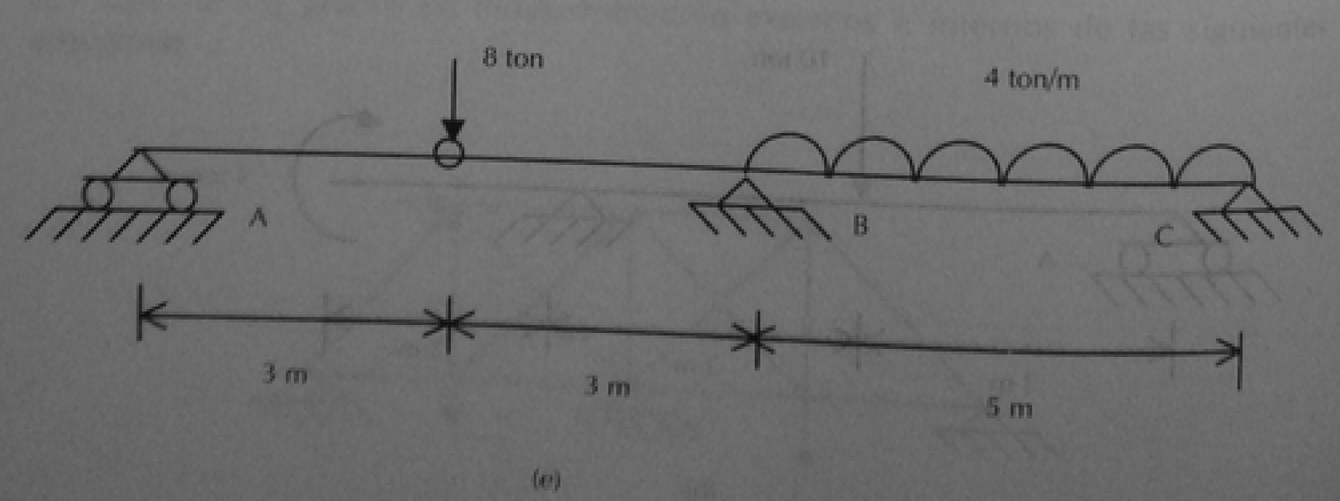

(b)


12 ton
3
4
2 ton/m
A
B
C
2 m
2 m
4 m

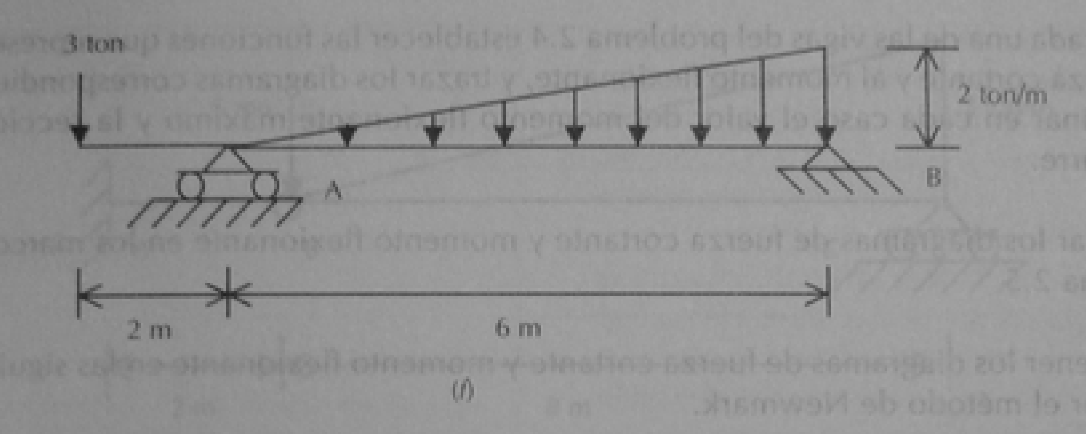
(c)


6 ton-m
5 ton
A
B
3 m
3 m
2 m

(*d*)


8 ton
4 ton/m
A
B
C
3 m
3 m
5 m

(*e*)




(*f*)

2.5 Calcular las reacciones en los apoyos de los siguientes marcos:

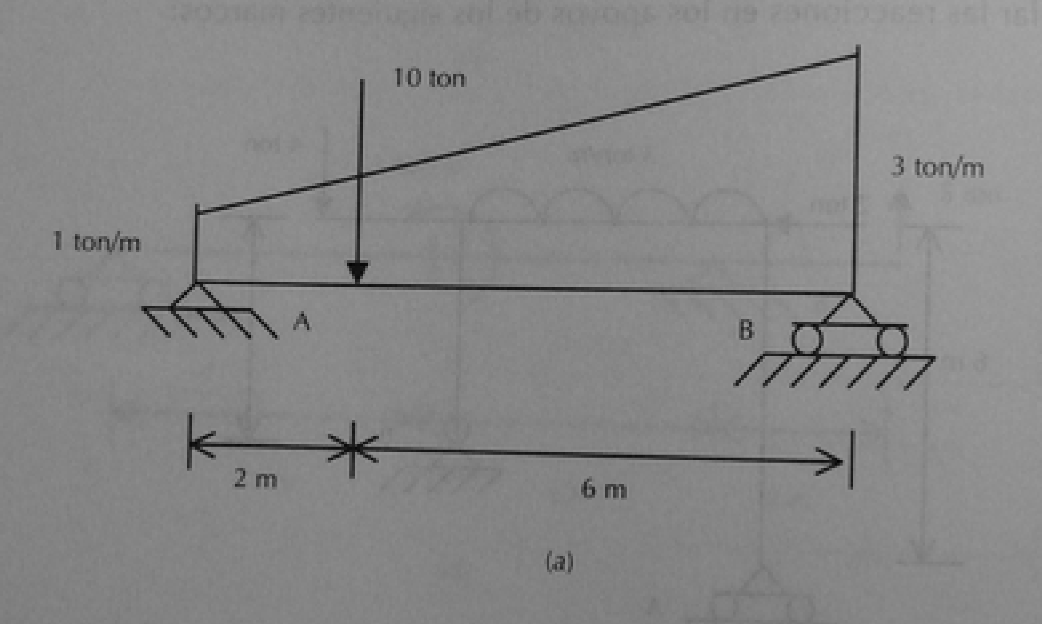
3 ton/m
4 ton
2 ton
6 m
4 m
B
A
5 m
2 m

4 ton/m
4 m
2
1
A
5 m
B
6 m

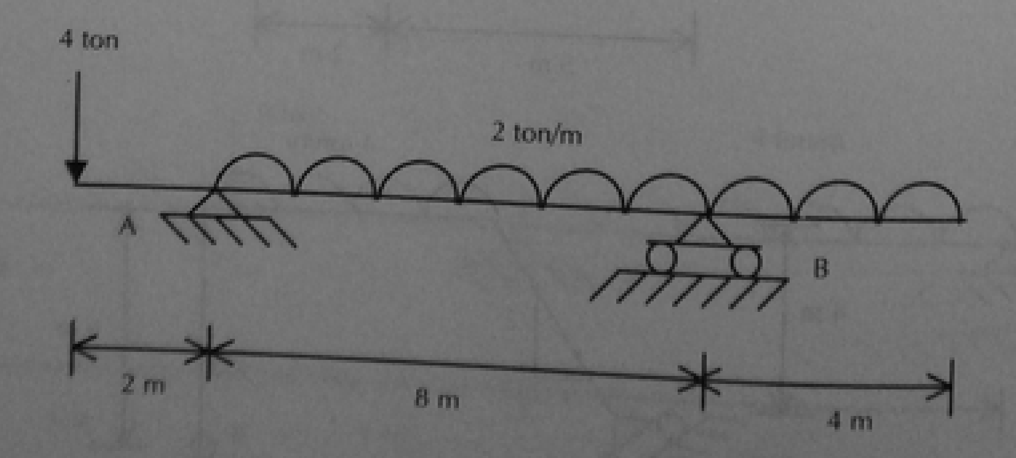
2.6 En cada una de las vigas del problema 2.4 establecer las funciones que representan a la fuerza cortante y al momento flexionante, y trazar los diagramas correspondientes. Determinar en cada caso el valor del momento flexionante máximo y la sección en que ocurre.

2.7 Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en los marcos del problema 2.5

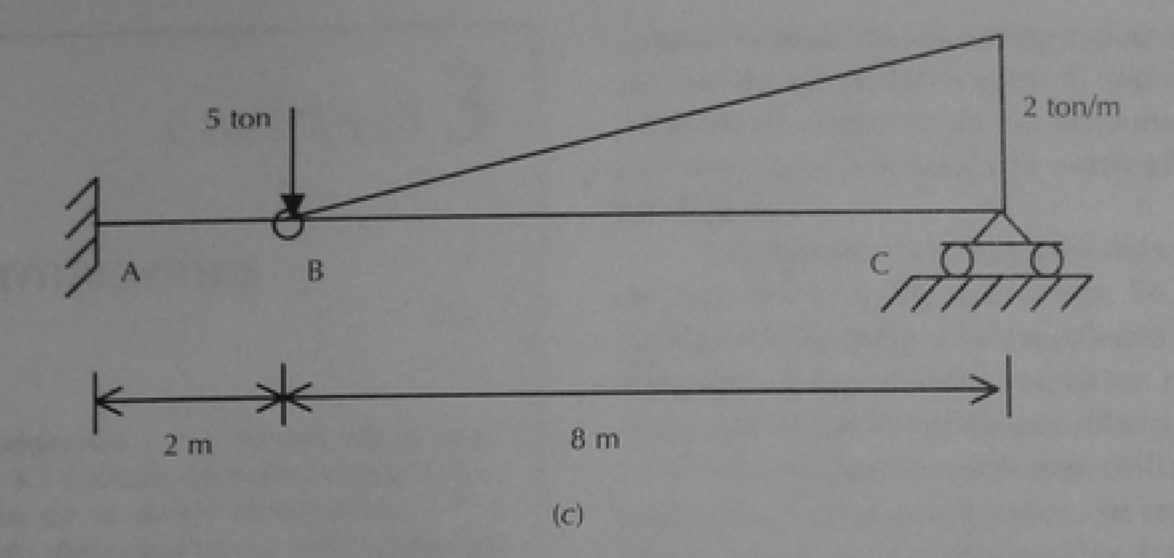
2.8 Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en las siguientes vigas por el método de Newmark.



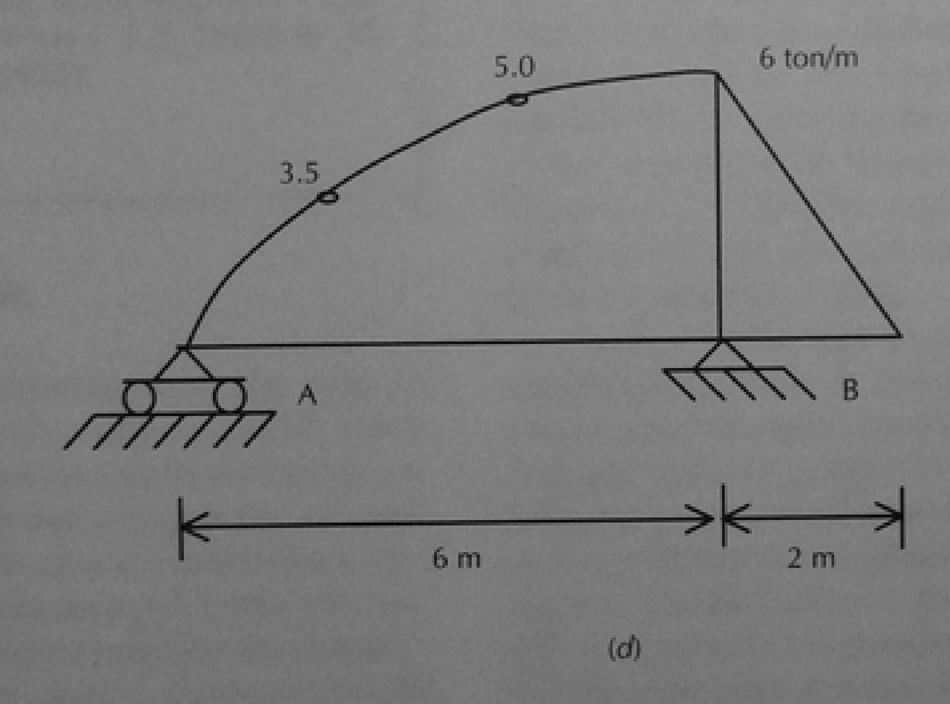
(*a*)



(*b*)




(c)




(d)

# CAPÍTULO 3

# Deformaciones



## 3.1 Introducción

El cálculo de las deformaciones que sufre un elemento estructural o una estructura completa bajo la acción de cargas u otro tipo de acciones resulta importante por dos razones principales. Una es que existen límites permisibles a las deformaciones tanto por motivos de seguridad como estéticos. Por ejemplo, suele establecerse que la deformación de una viga no exceda de una cierta fracción de su claro o que el desplazamiento entre dos pisos consecutivos de una estructura de varios pisos sujeta a fuerzas laterales no exceda de cierta fracción de la altura del entrepiso.[1] En ambos casos, además de producir una mala apariencia, unas deformaciones excesivas pueden producir daños en otros elementos estructurales o no estructurales, causar sensación de inseguridad a los ocupantes de un edificio y, en el segundo caso, amplificar el efecto de las acciones por una pérdida significativa de la verticalidad de la estructura.

La segunda razón es aún más importante para los fines de este texto. Se recordará que en el Capítulo 2 se estableció que en las estructuras hiperestáticas existen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, y que por lo tanto no pueden resolverse utilizando únicamente dichas ecuaciones. Se requiere obtener ecuaciones adicionales hasta lograr establecer un sistema en el que el número de incógnitas sea igual al de ecuaciones. Pues bien, las ecuaciones adicionales se plantean, como se verá en los siguientes capítulos, analizando las condiciones de deformación de los miembros de la estructura o de toda la estructura. Por eso resulta fundamental disponer de métodos que permitan el cálculo de las deformaciones.

Los métodos que se presentan en este capítulo permiten el cálculo de deformaciones en elementos isostáticos. Esto es suficiente para la resolución de estructuras hiperestáticas. Las deformaciones a las que se hace referencia son de dos tipos: rotaciones o giros, y deflexiones[2] o flechas. En algunos textos a las rotaciones se les llama deformaciones angulares y a las deflexiones se les llama deformaciones lineales. Las rotaciones se representan en este texto con la letra $\theta$, y las deflexiones con la letra $\Delta$.

En la figura 3.1-a se ilustran las deformaciones que puede tener una viga empotrada en un extremo y articulada en el otro. En el extremo *A* la rotación $\theta_A$ tiene que ser nula, por tratarse de un empotramiento. En el extremo *B* la rotación tiene un valor $\theta_B$ diferente de cero, ya que el apoyo permite el giro. Se muestra también la deflexión en un

[1] Siguiendo una convención usual, se denomina *piso* al nivel en que se encuentra el sistema horizontal de losas y trabes de una estructura, y *entrepiso* al espacio comprendido entre dos pisos consecutivos. La altura de entrepiso es la altura de las columnas.

[2] La palabra *deflexión* no existe en el Diccionario de la Real Academia Española, pero por ser usada ampliamente, el autor la ha incorporado en este texto.

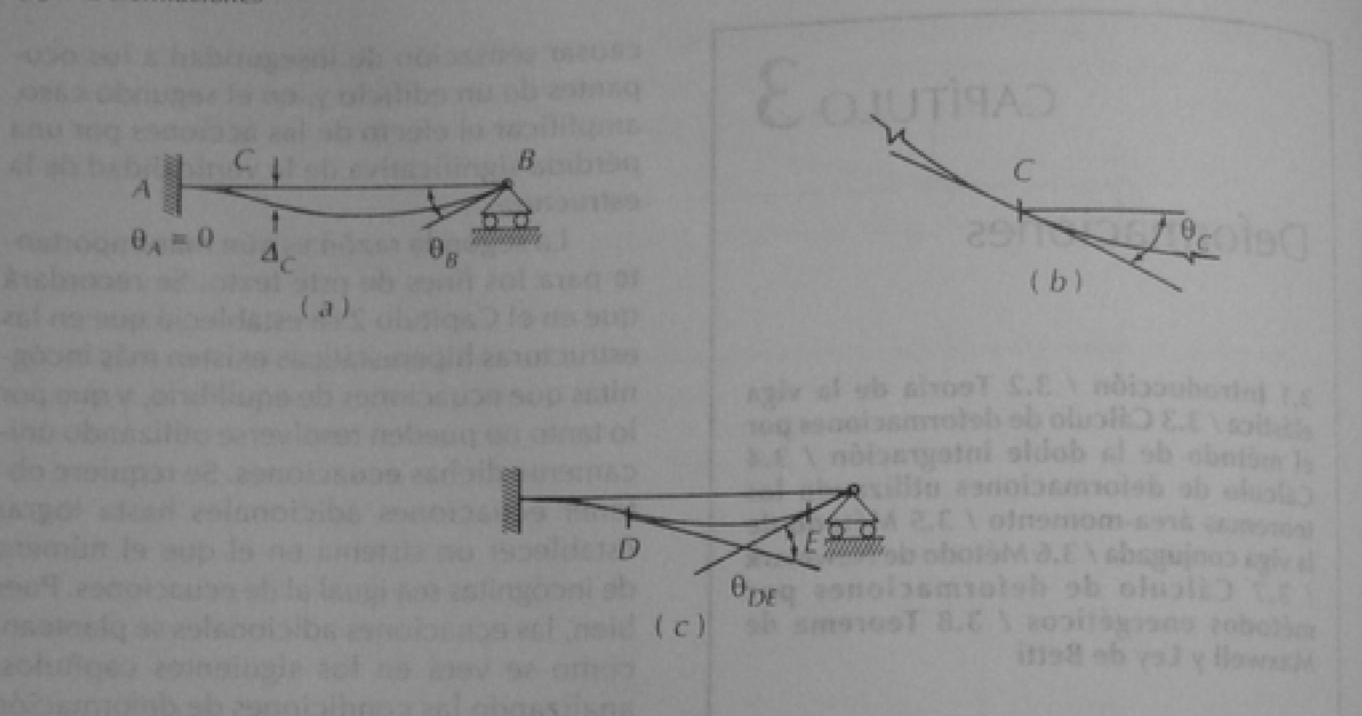



**Figura 3.1.** Deformaciones de una viga empotrada y libremente apoyada

punto cualquiera *C* que tiene un valor $\Delta_C$. El giro en el punto *C* sería el ángulo que forma la tangente en *C* con la posición original de la viga, en este caso con la horizontal; se representa como $\theta_C$ y se muestra en forma amplificada en la figura 3.1-*b*. A veces interesa conocer la rotación relativa entre dos puntos de una viga, por ejemplo, entre los puntos *D* y *E*, mostrados en la figura 3.1-*c*. Esta rotación relativa se llama también cambio angular; es el ángulo que forman las tangentes a ambos puntos de la viga. Se representa como $\theta_{DE}$, o sea, con un doble índice que indica los dos puntos en cuestión.

Las deformaciones que puede experimentar un marco se ilustran en la figura 3.2-*a*. En los empotramientos *A* y *F* no puede haber giros, por lo que $\theta_A$ y $\theta_F$ son nulos. En cambio en el apoyo articulado *D* de la columna *DC* sí puede haber un giro $\theta_D$. Si el marco no es simétrico, como en este caso, o está sujeto a fuerzas laterales, puede desplazarse horizontalmente y tendría una deflexión horizontal $\Delta_F$. Si no se consideran deformaciones longitudinales en las vigas, las deflexiones horizontales de los nudos *B* y *C* serán iguales a las del nudo *E*, y por lo tanto $\Delta_B = \Delta_C = \Delta_E$. Es importante observar que los ángulos que forman en los nudos los miembros de la estructura deformada son iguales a los de la estructura no deformada. Por eso los nudos se llaman *nudos rígidos*. Esto se ilustra en forma amplificada en la figura 3.2-*b* en la que se muestra el nudo *B*. Si la columna *AB* y la viga *BC* formaban un ángulo recto en la estructura original, las tangentes en *B* a ambos miembros en la estructura deformada deben formar también un ángulo recto. Obsérvese también que si no se consideran deformaciones longitudinales en las columnas, los nudos *B*, *C* y *E* permanecen en la misma línea horizontal, es decir, no se desplazan ni hacia arriba ni hacia abajo. En la figura 3.2-*a* se han marcado con unos pequeños círculos las secciones en las que cambia la curvatura de los miembros. Éstos son los puntos de inflexión en los que el momento flexionante vale cero.

En el párrafo anterior se hizo la hipótesis de no considerar deformaciones longitu-

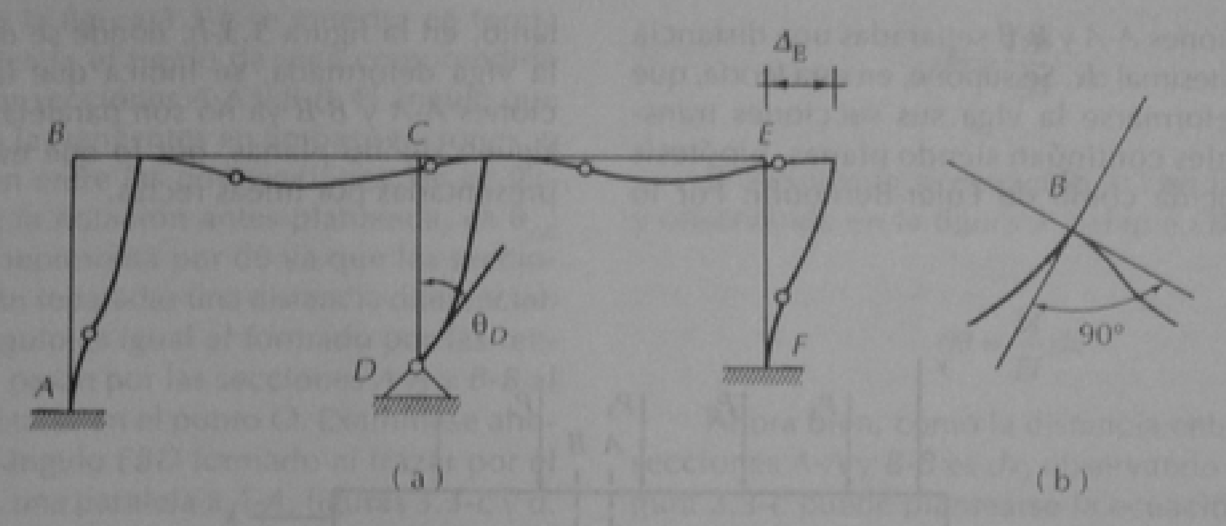



**Figura 3.2.** Deformaciones de un marco

dinales, alargamientos o acortamientos, en las columnas y en las vigas del marco. Esta hipótesis es usual porque las deformaciones producidas por los momentos flexionantes son en general mucho mayores que las producidas por las cargas axiales. También son mayores que las producidas por fuerzas cortantes. Por eso en los métodos que se verán más adelante sólo se consideran deformaciones por flexión, pero en realidad los miembros estructurales tienen los tres tipos de deformaciones y en algunos casos es conveniente calcular los otros dos. Los métodos correspondientes caen fuera del alcance de este texto.

Aunque en este capítulo se presentan métodos para el cálculo preciso de deformaciones, es conveniente adquirir la habilidad para trazar la forma aproximada de estructuras deformadas. Esto puede hacerse atendiendo a las restricciones que presentan los apoyos, al principio de conservar los ángulos que forman los miembros en nudos rígidos y la longitud original de los miembros, y otras consideraciones geométricas y de cargas semejantes. El trazo del marco deformado de la figura 3.2-*a* es un ejemplo, pero en cada caso hay que analizar las características de la estructura. La importancia de esta habilidad se debe a que la forma de la estructura deformada da una buena idea del signo de los momentos flexionantes en las distintas zonas de la estructura. Así, en el marco de la figura 3.2 y usando la convención de signos del capítulo 2, se sabría que en la columna *AB* hay momento negativo entre el empotramiento *A* y el punto de inflexión marcado en esta columna, porque la curvatura es cóncava hacia abajo, mientras que entre el punto de inflexión y el nudo *B* el momento es positivo, porque es cóncava hacia arriba. El mismo análisis se puede hacer para los otros miembros del marco. El lector puede trazar así el diagrama de momentos flexionantes, en forma cualitativa, de esta estructura hiperestática. Con el uso generalizado de los programas de cómputo para analizar estructuras, este método es muy útil para detectar errores grandes en la alimentación de datos o en el modelado de la estructura.

## 3.2 Teoría de la viga elástica

El objetivo de esta teoría es establecer las relaciones existentes entre las deformaciones de una viga de un material homogéneo y elástico y los momentos flexionantes producidos en la viga por un sistema cualquiera de cargas. Considérese una viga libremente apoyada, con un sistema de cargas, como la mostrada en la figura 3.3-*a*, y tómense dos

secciones *A-A* y *B-B* separadas una distancia infinitesimal *dx*. Se supone, en esta teoría, que al deformarse la viga sus secciones transversales continúan siendo planas, hipótesis conocida como de Euler-Bernoulli. Por lo tanto, en la figura 3.3-*b*, donde se muestra la viga deformada, se indica que las secciones *A-A* y *B-B* ya no son paralelas, pero siguen siendo planas, por lo que están representadas por líneas rectas.

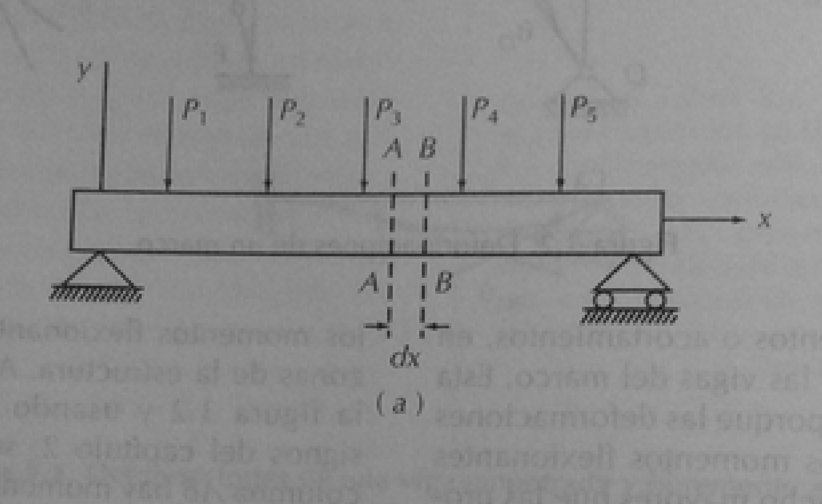



**Figura 3.3.** Deformaciones entre dos secciones de una viga elástica

En la figura 3.3-*c* se muestra en forma amplificada el tramo de viga comprendido entre las secciones *A-A* y *B-B*. El ángulo que forman las tangentes en ambas secciones, o rotación entre las dos secciones, de acuerdo con la notación antes planteada, es $\theta_{AB}$ que se representa por $d\theta$ ya que las secciones están separadas una distancia diferencial. Este ángulo es igual al formado por las rectas que pasan por las secciones *A-A* y *B-B* al intersectarse en el punto *O*. Examínese ahora el triángulo *EBD* formado al trazar por el punto *E* una paralela a *A-A*, figuras 3.3-*c* y *d*. El lado *DB* representa el alargamiento que sufre la fibra inferior de la viga por efecto de la deformación. Su magnitud es igual a la deformación unitaria por la longitud original entre las dos secciones transversales, o sea que $DB = \varepsilon dx$. La deformación unitaria, a su vez, es igual al esfuerzo, *f*, dividido entre el módulo de elasticidad del material, *E*, de acuerdo con la Ley de Hooke. Por lo tanto,

$$DB = \frac{f dx}{E} \tag{3.1}$$

El esfuerzo *f* se puede calcular con la fórmula de flexión o fórmula de la escuadría como

$$f = \frac{Mc}{I} \tag{3.2}$$

donde *M* es el momento flexionante en la sección, *c* es la distancia del eje neutro a la fibra más alejada e *I* es el momento de inercia. Sustituyendo la ecuación 3.2 en la 3.1 se obtiene:

$$DB = \frac{Mc}{EI} dx \tag{3.3}$$

Observando el triángulo *EBD* y tomando en cuenta que las deformaciones son pequeñas,

$$d\theta = \frac{DB}{EB} \tag{3.4}$$

Sustituyendo la ecuación 3.3 en la 3.4 y observando en la figura 3.3-*d* que $EB = c$,

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \tag{3.5}$$

Ahora bien, como la distancia entre las secciones *A-A* y *B-B* es *dx*, observando la figura 3.3-*c* puede plantearse la ecuación

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \tag{3.6}$$

donde $\rho$ es el radio de curvatura. Sustituyendo la ecuación 3.6 en la 3.5:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{3.7}$$

Recuérdese ahora que el radio de curvatura es el recíproco de la curvatura, la cual se define como la razón de la variación de la dirección de una curva entre dos puntos de la misma[3]. Si la dirección de la viga elástica en la sección *A-A* es $\theta_A$ y en la sección *B-B* es $\theta_B$, figura 3.3-*c*, el cambio de dirección es $\theta_{AB} = d\theta$ y la razón de la variación es igual a este cambio angular entre la longitud del arco *FE*, que se representa como *ds*. Por lo tanto, si la curvatura se representa con la letra $\kappa$, su valor será:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \tag{3.8}$$

Ahora bien, la tangente del ángulo $\theta$ en cualquier punto es la pendiente de la curva:

[3] Véase, por ejemplo, William A. Granville, "Cálculo Diferencial e Integral", LIMUSA, 1982, pp. 179-181.

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \tag{3.9}$$

Derivando ambos miembros de (3.9):

$$\frac{d(\tan\theta)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.10}$$

Puesto que

$$\frac{d(\tan\theta)}{dx} = \sec^2\theta\frac{d\theta}{dx} \quad \text{y}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1+\tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dx} \tag{3.11}$$

Y por la ecuación 3.9:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d\theta}{dx} \tag{3.12}$$

Despejando $d\theta / dx$:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \tag{3.13}$$

Si los arcos son pequeños, su longitud se puede calcular por el teorema de Pitágoras como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

De donde se deduce:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.14}$$

Dividiendo la ecuación 3.13 entre la 3.14, y tomando en cuenta la definición de curvatura en la ecuación 3.8, así como la de radio de curvatura, que es el recíproco de la curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{3.15}$$

Si las deformaciones son pequeñas, como se está suponiendo, el término $dy/dx$, que representa la pendiente de la curva, es pequeño en comparación con la unidad, y su cuadrado es todavía más pequeño. Por lo tanto, el denominador de la ecuación 3.15 puede aproximarse a la unidad. Haciendo esta simplificación y sustituyendo este valor de $1/\rho$ en la ecuación 3.7 se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{3.16}$$

Las ecuaciones 3.5 y 3.16 permiten obtener por integración la rotación, $\theta$, y la deflexión, $y$, en cualquier punto de una viga., o sea, para un valor determinado de $x$. En efecto, integrando la ecuación 3.5, o una vez la ecuación 3.16, se obtiene

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx \tag{3.17}$$

e integrando dos veces la ecuación 3.16:

$$y = \iint \frac{M}{EI}dx \tag{3.18}$$

Estas dos ecuaciones permiten obtener las deformaciones de una viga elástica en función del momento *M*, que generalmente es una función de *x*, aunque en algún caso puede ser constante. El módulo de elasticidad *E* es también constante en la mayoría de los casos a lo largo de la viga. El momento de inercia es constante si la viga es de igual sección a todo lo largo; si no lo fuera, debe expresarse también como función de *x*. Debe recordarse que estas ecuaciones sólo son válidas para deformaciones pequeñas producidas exclusivamente por flexión, y para vigas de material de comportamiento lineal y elástico, de acuerdo a las hipótesis hechas durante su deducción. La viga deformada que cumple estas condiciones suele llamarse *curva elástica*.

## 3.3 Cálculo de deformaciones por el método de la doble integración

Las rotaciones, θ, y las deflexiones, *y*, de una viga pueden calcularse integrando las ecuaciones 3.17 y 3.18 obtenidas en la sección anterior. La primera integración proporciona las rotaciones y la segunda, las deflexiones. Al llevar a cabo estas integraciones aparecen constantes de integración que deben determinarse a partir de las llamadas condiciones de frontera, que vienen siendo valores de las deformaciones que dependen de las condiciones de apoyo de la viga, y de condiciones de continuidad de la viga. Por ejemplo, en un empotramiento la rotación de la viga y su deflexión deben ser nulas; en

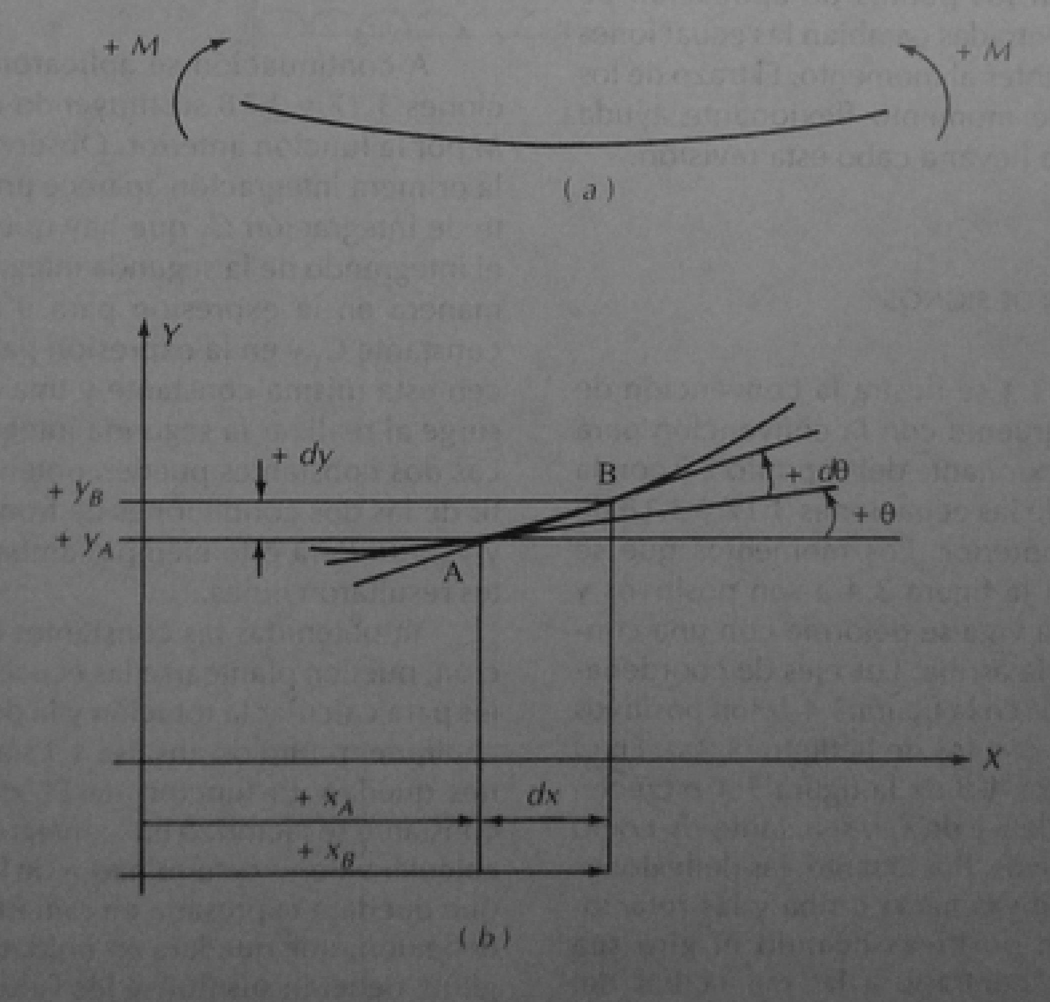



**Figura 3.4.** Convención de signos

un apoyo libre, puede haber rotación pero no deflexión; en una viga simétrica en carga y geometría la rotación al centro del claro debe ser nula. Las condiciones de continuidad se establecen considerando que la curva elástica debe ser continua, a menos que haya circunstancias especiales que permitan una discontinuidad en deflexión o rotación; por ejemplo, una articulación intermedia permite una discontinuidad en rotación. En fin, estas condiciones de frontera o de continuidad deben ser determinadas en cada caso particular. El trazo aproximado de la viga deformada o curva elástica resulta útil para hacer esta determinación.

En cuanto al momento $M$ que aparece en las ecuaciones 3.17 y 3.18, y que como se ha dicho generalmente es una función de $x$, debe revisarse el intervalo de validez de las funciones. En los puntos de aplicación de cargas concentradas cambian las ecuaciones correspondientes al momento. El trazo de los diagramas de momento flexionante ayuda también para llevar a cabo esta revisión.

CONVENCIÓN DE SIGNOS

En la figura 3.4 se ilustra la convención de signos, congruente con la convención para momento flexionante del capítulo 2 y con la deducción de las ecuaciones 3.17 y 3.18 de la sección anterior. Los momentos que se muestran en la figura 3.4-*a* son positivos y hacen que la viga se deforme con una concavidad hacia arriba. Los ejes de coordenadas indicados en la figura 3.4-*b* son positivos y coinciden con los de la figura 3.3-*a*. En el tramo de viga *A-B* de la figura 3.4-*b* crecen los valores de $y$ y de $x$, o sea, tanto $dy$ como $dx$ son positivos. Por lo tanto, las deflexiones $y$ serán positivas hacia arriba y las rotaciones $\theta$ serán positivas cuando el giro sea antihorario (contrario a las manecillas del reloj) según se muestra en la figura.

**Ejemplo 3.1**

Se obtienen expresiones para calcular las rotaciones y deflexiones en un voladizo sujeto a carga uniformemente distribuida. Se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor de $EI$.

En primer término se ha trazado la curva elástica en forma aproximada, en la cual se puede ver que tanto la rotación como la deflexión deben ser nulas en el empotramiento. Después se obtuvo el momento flexionante en el empotramiento con la expresión $w\ell^2/2$ y la ecuación del momento flexionante en cualquier sección que resultó:

$$M(x) = -9 + 6x - x^2$$

A continuación se aplicaron las ecuaciones 3.17 y 3.18 sustituyendo el valor de $M$ por la función anterior. Obsérvese que en la primera integración aparece una constante de integración $C_1$ que hay que incluir en el integrando de la segunda integral. De esta manera en la expresión para $\theta$ aparece la constante $C_1$ y en la expresión para $y$ aparecen esta misma constante y una nueva que surge al realizar la segunda integración, $C_2$. Las dos constantes pueden obtenerse a partir de las dos condiciones de frontera $\theta_A = 0$ y $y_A = 0$. Para este ejemplo ambas constantes resultaron nulas.

Ya obtenidas las constantes de integración, pueden plantearse las ecuaciones finales para calcular la rotación y la deflexión en cualquier punto de abscisa $x$. Estas ecuaciones quedan en función de $EI$, que por ser constante se factorizó en la integración. Para calcular valores determinados de la rotación, que quedará expresada en radianes, o de la deflexión, que quedará en unidades de longitud, deberán sustituirse los valores correspondientes de $x$ y de $EI$. Ya que la carga se

expresó en ton/m$^2$, el valor de $x$ deberá estar en m, el de $E$ en ton/m$^2$ y el de $\ell$ en m$^4$.

En el ejemplo se calcularon la deflexión en el extremo del voladizo, o sea para $x = 3m$, y la rotación al centro del claro, para $x = 1.5m$. Obsérvese que ambas quedaron con signo negativo, la deflexión porque la viga se deforma hacia abajo y la rotación porque gira en sentido horario respecto a la horizontal. Estos signos son congruentes con la notación planteada anteriormente. El problema también puede resolverse en términos de una carga $w$ y un claro $\ell$ con lo cual se obtiene una expresión general para calcular las rotaciones y deflexiones de un voladizo con carga uniformemente distribuida.

## EJEMPLO 3.1. DEFORMACIONES EN UN VOLADIZO POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN

DATOS:

A

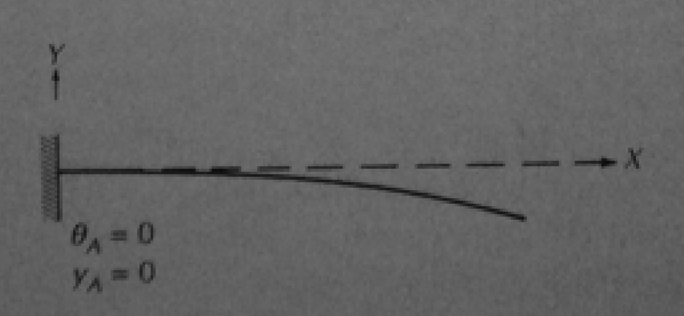
2 ton/m

B

$EI$ = constante

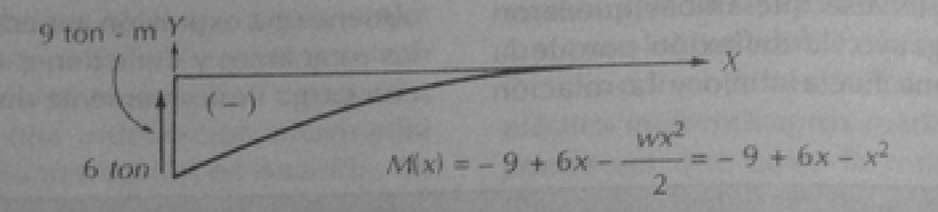
3 m

CURVA ELÁSTICA



## EJEMPLO 3.1 *(continuación)*

DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES




CÁLCULO DE ROTACIONES Y DEFLEXIONES

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int (-9+6x-x^2)dx = \frac{1}{EI}(-9x+\frac{6x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C_1)$$

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int (-9x+3x^2-\frac{x^3}{3}+C_1)\,dx$$

$$y = \frac{1}{EI}(-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4+C_1x+C_2)$$

$$Si\ \theta_A = 0,\ \theta = 0 \text{ para } x = 0,\ \therefore C_1 = 0$$

$$Si\ y_A = 0,\ y = 0 \text{ para } x = 0,\ \therefore C_2 = 0$$

Deflexión máxima: $x = 3$m

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(-9x+3x^2-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{9}{2}x^2+x^3-\frac{x^4}{12}\right)$$

$$y_B = \frac{1}{EI}\left(-\frac{81}{2}+27-\frac{81}{12}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-486+(27)(12)-81}{12}\right) = -\frac{81}{4EI}\downarrow$$

Rotación a la mitad del claro: $x = 1.5$ m

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[-9(1.5)+3(1.5)^2-\frac{1.5^3}{3}\right] = -\frac{7.87}{EI}$$

**Ejemplo 3.2**

Se pide calcular la rotación en el apoyo $A$ y la deflexión en el punto $B$ de una viga libremente apoyada con una carga concentrada de 15 ton en el punto $B$. La viga está fabricada con un perfil de acero estructural IR 457 × 96.7, o sea, 457 mm de peralte y 96.7 kg/m de peso. En el Manual de Construcción en Acero del IMCA[4] puede verse que el momento de inercia de este perfil es de 44,537 $cm^4$ (páginas 68 y 69).

Se traza la curva elástica considerando que en los apoyos $A$ y $C$ puede haber rotaciones, pero no puede haber deflexiones. También se traza el diagrama de momentos flexionantes y se plantean las ecuaciones que representan las dos líneas rectas que constituyen el diagrama. La primera ecuación es válida únicamente entre el apoyo $A$ y la carga concentrada, o sea, para $0 \leq x \leq 2$, mientras que la segunda lo es entre la carga concentrada y el apoyo $C$, es decir, para $2 \leq x \leq 6$. Obsérvese que para $x = 2$, ambas ecuaciones son válidas. Esto servirá para establecer, según se muestra más adelante, las condiciones de continuidad.

Después se sustituyen las ecuaciones que representan al momento flexionante en las ecuaciones 3.17 y 3.18, obteniéndose las ecuaciones 1 a 4 del ejemplo. Las dos primeras corresponden al tramo $0 \leq x \leq 2$, y las otras dos, al tramo $2 \leq x \leq 6$. Nótese que al hacer las integraciones han aparecido cuatro constantes de integración, $C_1$ a $C_4$.

A fin de determinar las constantes de integración deben plantearse cuatro condiciones de frontera y/o continuidad. En el ejemplo, pueden plantearse dos condiciones de frontera observando que en los apoyos no puede haber deflexiones. Esto significa que si en la ecuación (2) se hace $x = 0$, el valor de $y$ también debe ser 0, y lo mismo si en la ecuación (4) se hace $x = 6$. De esta manera se han obtenido las ecuaciones (5) y (6) del ejemplo. Por las condiciones del ejemplo, no es posible plantear otras condiciones de frontera, pero sí pueden plantearse dos condiciones de continuidad. Éstas son que tanto la rotación de la viga como su deflexión, en el punto de aplicación de la carga, deben ser las mismas si se calculan con las ecuaciones (1) y (2) como si se calculan con las ecuaciones (3) y (4). O sea, que para $x = 2$, deben coincidir los valores calculados con las ecuaciones correspondientes a los dos tramos de la viga, ya que ésta es continua en dicho punto. Expresando estas igualdades se han obtenido las ecuaciones (7) y (8).

Ahora se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y resolviéndolo se pueden obtener las cuatro constantes de integración, $C_1$ a $C_4$. Es frecuente que al plantear las condiciones de frontera o continuidad, algunas constantes de integración resulten nulas. Es el caso de la constante $C_2$ en este ejemplo. Por esta razón el grado del sistema de ecuaciones suele reducirse.

Teniendo los valores de las constantes de integración, ya pueden calcularse $\theta_A$ e $y_B$, que son los valores pedidos. En el ejemplo, primero se calcularon en función de $EI$, porque es más fácil trabajar con esta constante, y luego se sustituyeron los valores correspondientes. Es importante observar que como las ecuaciones de los momentos flexionantes se plantearon con unidades de metros y toneladas, los valores de $E$ y de $I$ se plantearon con unidades de ton/$m^2$ y de $m^4$, respectivamente.

El lector deberá observar que la deflexión calculada no es la máxima que ocurre en la viga. Para obtenerla, puede determinar primero en qué punto la rotación es nula, es decir, dónde es horizontal la tangente a la curva elástica, ya que en ese punto será máxima la deflexión. Esto puede hacerse igualando a cero la ecuación de la rotación $\theta$ expresada en términos de $x$. Como hay dos

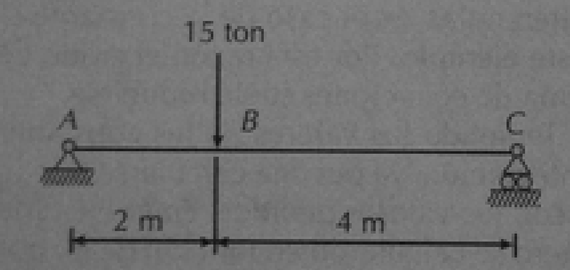
[4] Instituto Mexicano de la Construcción en Acero. "Manual de Construcción en Acero, Segunda Edición, Vol. 1". LIMUSA, México, 1990.

ecuaciones, la (1) y la (3) del ejemplo, se pueden igualar las dos y revisar en cuál de las dos es válido el valor de $x$ obtenido. En este ejemplo, al observar la curva elástica trazada cualitativamente, puede verse que la deflexión máxima se presenta a la derecha de la carga concentrada, hacia el centro del claro, por lo que conviene empezar igualando a cero la ecuación (3) del ejemplo, previa sustitución del valor de la constante de integración $C_3$. El lector puede comprobar que el valor resultante de $x$ es 2.73 m, que efectivamente está a la derecha de la carga concentrada. Sustituyendo este valor de $x$ y el de las constantes de integración en la ecuación (4) del ejemplo se obtiene la deflexión máxima que resulta de –0.65 cm.

El método de la doble integración no suele resultar el más expedito para el cálculo de deformaciones. En este segundo ejemplo, aunque se trató de un problema muy sencillo, se llegó a un sistema de cuatro ecuaciones para poder determinar las constantes de integración. Para condiciones de carga más complejas, el número de ecuaciones simultáneas aumenta considerablemente. Existen otros métodos más prácticos, algunos de los cuales se plantean en las siguientes secciones, que también están basados en la teoría de la viga elástica.

**EJEMPLO 3.2. CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN**

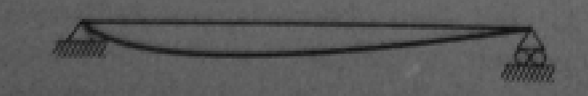
DATOS




Viga de acero IR457 × 96.7
$E = 2 \times 10^6$ kg/cm², I = 44,537 cm⁴

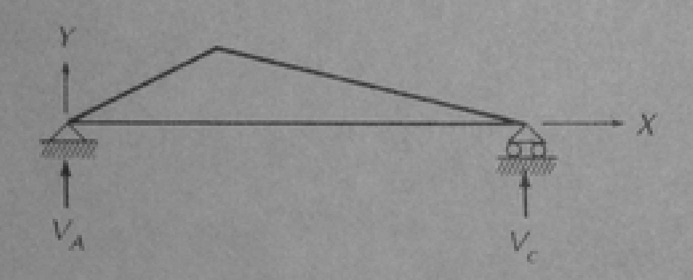
Calcular la rotación en *A* y la deflexión en *B*

CURVA ELÁSTICA



**EJEMPLO 3.2** ***(continuación)***

DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES




$$V_A = \frac{15 \times 4}{6} = 10 \text{ ton}$$

$$V_C = \frac{15 \times 2}{6} = 5 \text{ ton}$$

Para $0 \leq x \leq 2$, $M(x) = 10x$

Para $2 \leq x \leq 6$, $M(x) = 10x - 15(x - 2) = 30 - 5x$

CÁLCULO DE ROTACIONES Y DEFLEXIONES

Para $0 \leq x \leq 2$

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int 10x dx = \frac{1}{EI}(5x^2 + C_1) \qquad (1)$$

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int (5x^2 + C_1) dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{5}{3}x^3 + C_1 x + C_2\right) \qquad (2)$$

Para $2 \leq x \leq 6$

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int (30 - 5x) dx = \frac{1}{EI}(30x - \frac{5}{2}x^2 + C_3) \qquad (3)$$

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int (30x - \frac{5}{2}x^2 + C_3) dx = \frac{1}{EI}(15x^2 - \frac{5}{6}x^3 + C_3 x + C_4) \qquad (4)$$

**EJEMPLO 3.2 *(continuación)***

CONDICIONES DE FRONTERA

Si $x = 0,\ y = 0$

$$\frac{5}{3}(0) + C_1(0) + C_2 = 0 \tag{5}$$

Si $x = 6,\ y = 0$

$$15(6)^2 - \frac{5}{6}(6)^3 + C_3(6) + C_4 = 0$$

$$360 + 6C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

CONDICIONES DE CONTINUIDAD

Si $x = 2$, los valores de $\theta$ y $y$ son iguales en los dos intervalos

$$5(2)^2 + C_1 = 30(2) - \frac{5}{2}(2)^2 + C_3$$

$$-30 + C_1 - C_3 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{5}{3}(2)^3 + C_1(2) + C_2 = 15(2)^2 - \frac{5}{6}(2)^3 + C_3(2) + C_4$$

$$-40 + 2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = 0 \tag{8}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = -33.33; C_2 = 0; C_3 = -63.33; C_4 = 20$$

Rotación en A:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}(5x^2 + C_1) = -\frac{33.33}{EI}\text{radianes}$$

Deflexión en B:

$$y_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{3}(x)^3 + C_1(x) + C_2\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{3}(2)^3 - 33.33(2)\right] = -\frac{53.33}{EI}\text{m}$$

**EJEMPLO 3.2** ***(continuación)***

Sustituyendo los valores de E e I

$$\theta_A = -\frac{33.33}{2\times10^7\times44537\times10^{-8}} = -3.7\times10^{-3}\text{ radianes} = -0.21°$$

$$y_B = -\frac{53.33}{2\times10^7\times44537\times10^{-8}} = -0.0060m = -0.60\text{ cm}$$

## 3.4 Cálculo de deformaciones utilizando los teoremas área-momento

Estos teoremas fueron planteados originalmente por Otto Mohr y después revisados y formalizados por Charles E. Green en 1872, por lo que se conocen también como Teoremas de Mohr o Teoremas de Green. Considérese una viga simplemente apoyada con un sistema cualquiera de cargas como la mostrada en la figura 3.5-*a*. Se había demostrado en la sección 3.2, en referencia a la figura 3.3, que la rotación, $d\theta$, entre dos secciones separadas una distancia diferencial $dx$ podía calcularse con la ecuación 3.5:

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad (3.5)$$

Obsérvese que el segundo miembro de esta ecuación es el área del diagrama de momentos flexionantes, dividido entre el término $EI$, que tiene como base $dx$, o sea, el pequeño rectángulo marcado con sombra más oscura en la figura 3.5-*b*.

Si se quiere ahora calcular la rotación entre dos secciones separadas una distancia no diferencial, como las secciones *A-A* y *B-B* de la figura 3.5-*a*, puede integrarse la ecuación 3.5 entre las secciones mencionadas:

$$\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}dx \qquad (3.19)$$

Esta ecuación indica que la rotación entre las secciones *A-A* y *B-B*, o sea, el ángulo que forman las tangentes a ambas secciones como se muestra en la figura 3.5-*c*, es igual al área del diagrama de $M/EI$ entre dichas secciones. Esta área es la que se muestra con sombra menos oscura en la figura 3.5-*b*. La ecuación 3.19 es la expresión matemática del Primer Teorema Área-momento o Primer Teorema de Mohr:

> **La rotación o cambio de pendiente entre dos secciones cualesquiera de una viga elástica es igual al área del diagrama de momentos flexionantes entre esas dos secciones dividido entre *EI*(*M*/*EI*).**

Recuérdese que en la convención de signos, figura 3.4, una rotación positiva tenía el sentido antihorario. Por lo tanto, un diagrama de momentos positivo, como el de la figura 3.5-*b*, produce un giro antihorario al pasar de la tangente en *A* a la tangente en *B*.

Ahora considérese la figura 3.5-*d*. Trácense las tangentes en los extremos del elemento $dx$ y prolónguense hasta la vertical que pasa por la sección *A-A*. La distancia entre las dos tangentes $dt$ puede calcularse, con-

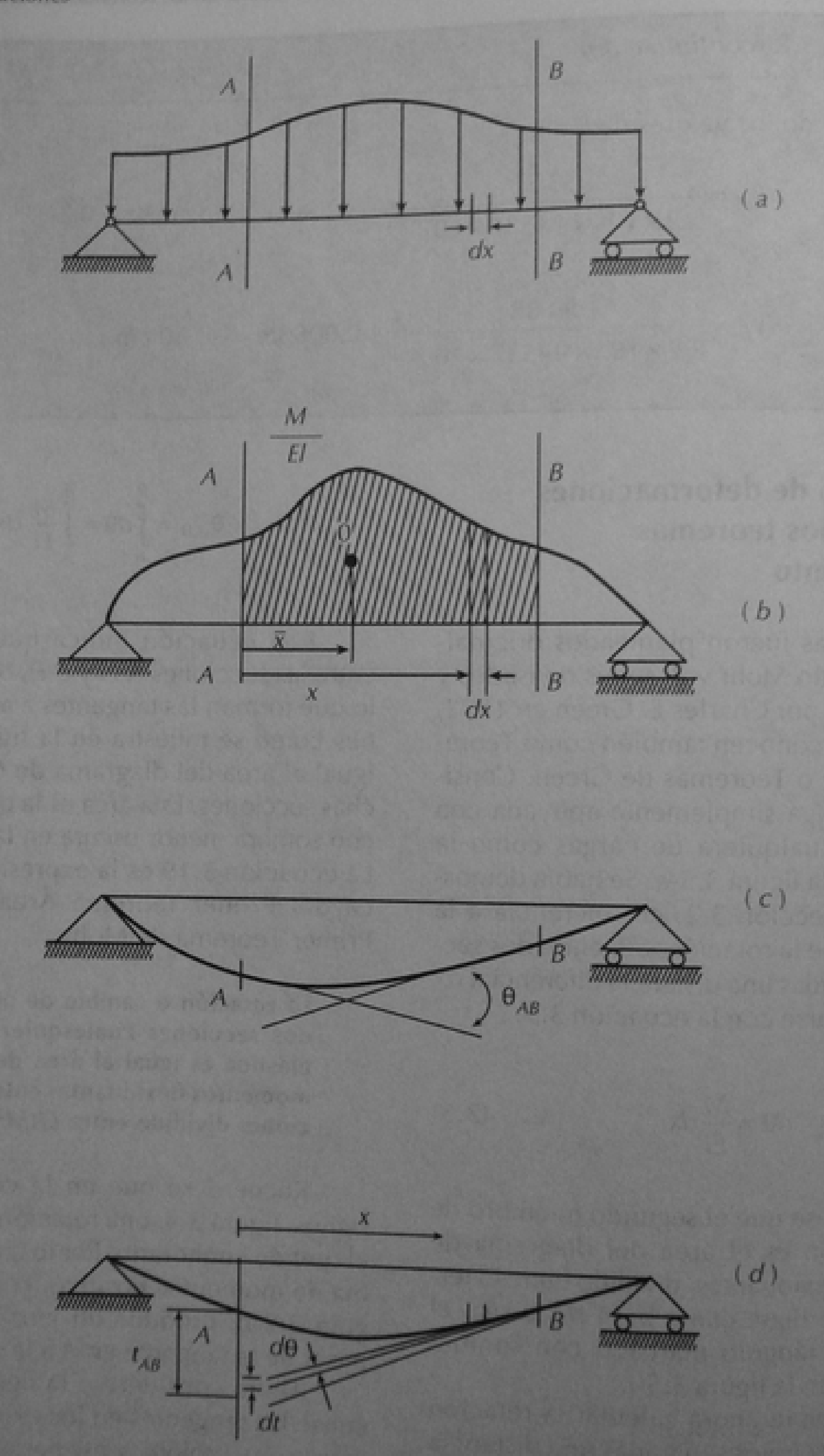



**Figura 3.5.** Cálculo de deformaciones por los teoremas área-momento

siderando que las deformaciones son pequeñas, con la ecuación:

$$dt = x d\theta \qquad (3.20)$$

Integrando los elementos diferenciales $dt$ entre las secciones $A$ y $B$, se obtiene la distancia $t_{AB}$, que es la distancia entre el punto $A$ de la viga y la tangente trazada por el punto $B$:

$$t_{AB} = \int_A^B dt = \int_A^B x d\theta \qquad (3.21)$$

Sustituyendo el valor de $d\theta$ de la ecuación 3.5, se obtiene:

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \qquad (3.22)$$

El integrando de esta ecuación es el momento de primer orden del elemento con sombreado menos oscuro de la figura 3.5-*b* con respecto a la sección *A-A* y el resultado de la integración es, por lo tanto, el momento de primer orden del diagrama de $M/EI$ entre las secciones *A-A* y *B-B* con respecto a la sección *A-A*. Si el punto *O* representa el centroide de esta parte del diagrama, la distancia $t_{AB}$ también puede calcularse como:

$$t_{AB} = (\text{área del diagrama})\ \bar{x} \qquad (3.23)$$

donde $\bar{x}$ es la distancia del centroide a la sección *A-A*, ya que se recordará que el momento de primer orden también se puede calcular como el área multiplicada por la distancia centroidal. La distancia $t_{AB}$ suele llamarse desviación tangencial o corrimiento tangencial.

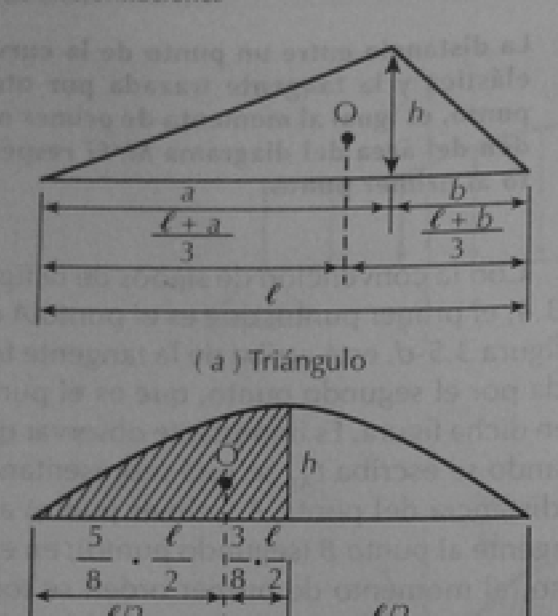
Esta ecuación representa el Segundo Teorema Área-momento o Segundo Teorema de Mohr:

**La distancia entre un punto de la curva elástica y la tangente trazada por otro punto, es igual al momento de primer orden del área del diagrama *M/EI* respecto al primer punto.**

Con la convención de signos de la figura 3.4, el primer punto, que es el punto *A* de la figura 3.5-*d*, está arriba de la tangente trazada por el segundo punto, que es el punto *B* en dicha figura. Es importante observar que cuando se escriba $t_{AB}$ se está representando la distancia del punto *A* (primer punto) a la tangente al punto *B* (segundo punto); en este caso, el momento de primer orden se toma con respecto al punto *A*. En cambio, si se escribe $t_{BA}$ se está representando la distancia del punto *B* a la tangente que pasa por el punto *A*; en este caso, el momento se toma respecto al punto *B*. *Siempre se toma el momento de primer orden respecto al primer punto.*

También es importante percatarse de que los teoremas de Mohr no proporcionan directamente la rotación respecto a la posición original de la viga y la deflexión, sino la rotación entre dos puntos de la curva elástica y la distancia de un punto a la tangente trazada por otro punto. Sin embargo, a partir de estas cantidades pueden calcularse la rotación o la deflexión, como se verá en los ejemplos.

Ya que al aplicar los teoremas de Mohr es necesario calcular áreas y distancias centroidales, se presentan en la figura 3.6 las de los diagramas de momento flexionante que con más frecuencia se encuentran en la práctica. El triángulo ocurre para cargas concentradas. La parábola de segundo grado, para cargas uniformemente distribuidas; obsérvese que la diferencia entre las figuras *b* y *c* está en que en la *c* no está completa la media parábola; el área se ha descompuesto en un triángulo y un segmento de parábola. La parábola de grado *n* se presenta con cargas distribuidas no uniformes.

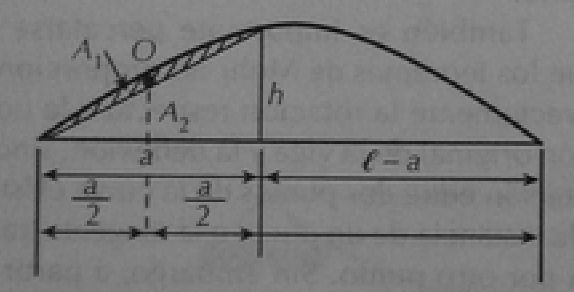



( *a* ) Triángulo

$$A = \frac{\ell h}{2}$$

( *b* ) Media parábola de segundo grado

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot h$$



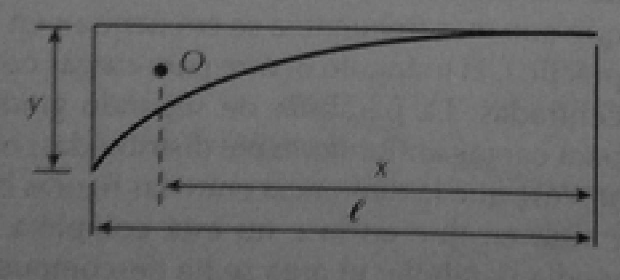

( *c* ) Segmento de parábola de segundo grado

$$h = \frac{w}{2} \cdot a\left(\ell - a\right)$$

$$A_1 = \frac{wa^3}{12}$$

$$A_2 = \frac{ah}{2}$$

$w$ = carga uniforme




( *d* ) Parábola de grado *n*

$$y = kx^n$$

$$A = \frac{y\,\ell}{n+1}$$

$$x = \frac{n+1}{n+2}\,\ell$$

**Figura 3.6.** Áreas y distancias centroidales de algunas figuras

**Ejemplo 3.3**

Se trata de un voladizo de acero con dos cargas concentradas y se pide calcular la rotación en el extremo y las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas. La viga tiene dos secciones transversales distintas. Entre las dos cargas está constituida por un perfil rectangular IR 457 × 97, mientras que entre el empotramiento y la primera carga tiene unas placas soldadas a los patines para aumentar el momento de inercia y la resistencia. Ésta es una solución común en la práctica, ya que se aumenta la resistencia donde el momento flexionante es mayor.

Se trazó la curva elástica para poder visualizar la relación entre las deformaciones por calcular y las rotaciones y las desviaciones tangenciales que se obtienen con los teoremas área-momento. En el caso del voladizo, la tangente en el empotramiento coincide con la horizontal y esto facilita los cálculos, ya que como se puede ver en la curva elástica, la rotación en el extremo, $\theta_C$, es el ángulo entre las tangentes trazadas en *A* y en *C*, $\theta_{AC}$. También se puede ver que las deflexiones en los puntos *B* y *C* son las desviaciones tangenciales $t_{BA}$ y $t_{CA}$, respectivamente, o sea, las distancias del punto *B* a la tangente que pasa por el punto *A*, y del punto *C* a la misma tangente.

Después se calcularon los momentos flexionantes en los puntos *A* y *C*, y se trazó el diagrama correspondiente. Con el fin de obtener el diagrama de *M/EI* se dividieron estos momentos entre los momentos de inercia. El del perfil se ha encontrado en el Manual de Construcción en Acero del IMCA[5] y el del perfil con la placa se calculó sumándole al del perfil, el área de las placas multiplicada por el cuadrado de su distancia al eje centroidal. Obsérvese que en el punto *B* hay dos valores de *M/EI*, porque justo a la derecha el momento de inercia es el del perfil, y justo a la izquierda, es el del perfil con las placas.

De acuerdo con el primer teorema, la rotación entre los puntos *A* y *C* de la curva elástica es igual al área del diagrama *M/EI*. Para calcular esta área, se descompuso el diagrama en tres triángulos y se calculó el área de cada uno. Obsérvese que las unidades de los momentos flexionantes se pasaron a kg-cm, porque los momentos de inercia están en $cm^4$.

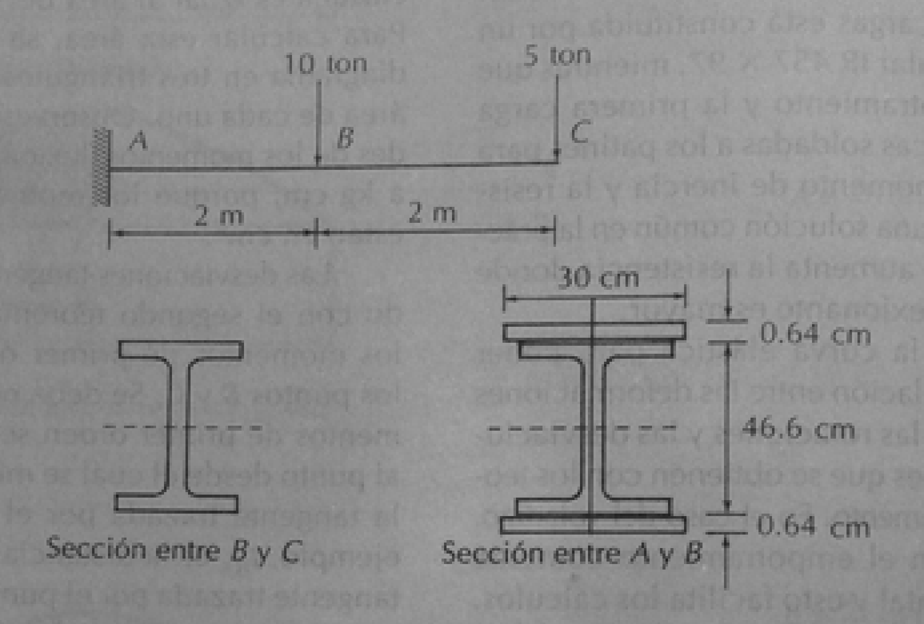
Las desviaciones tangenciales, de acuerdo con el segundo teorema, son iguales a los momentos de primer orden respecto a los puntos *B* y *C*. Se debe notar que los momentos de primer orden se toman respecto al punto desde el cual se mide la distancia a la tangente trazada por el otro punto. Por ejemplo, $t_{BA}$ es la distancia del punto *B* a la tangente trazada por el punto *A*; entonces el momento de primer orden se calcula respecto al punto *B*. En el cálculo de $t_{BA}$ la cantidad (60.6 × 200/2) es el área del triángulo 2, y (2 × 200/3) es la distancia del centroide de este triángulo al punto *B*. En la curva elástica se ha señalado también la distancia $t_{AB}$, que sería la distancia de *A* a la tangente trazada por *B*. Para calcular $t_{AB}$ se tomarían momentos respecto al punto *A*, pero el resultado no sería $\Delta_B$.

Como los momentos flexionantes son negativos, tanto las rotaciones como las deflexiones son también negativas. Esto indica, de acuerdo con la convención de signos, que la tangente en el punto *C* ha girado en sentido horario respecto a su posición original, o sea, la horizontal. También indica que los puntos *B* y *C* están abajo de la tangente trazada por *A*.

[5] *Op. cit.*

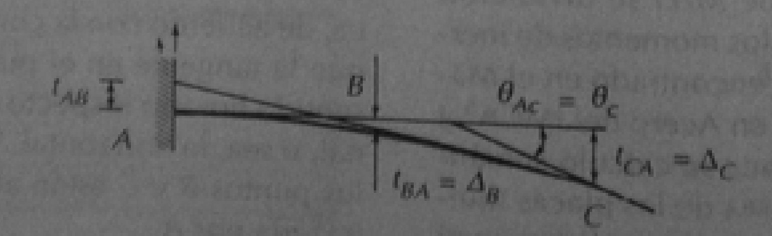
## EJEMPLO 3.3. CÁLCULO DE LA ROTACIÓN Y LA DEFLEXIÓN EN EL EXTREMO DE UN VOLADIZO CON MOMENTO DE INERCIA VARIABLE

DATOS:



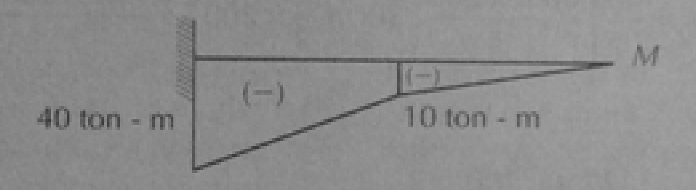

Calcular la rotación en C, la deflexión en $B$ y la deflexión en C.

CURVA ELÁSTICA

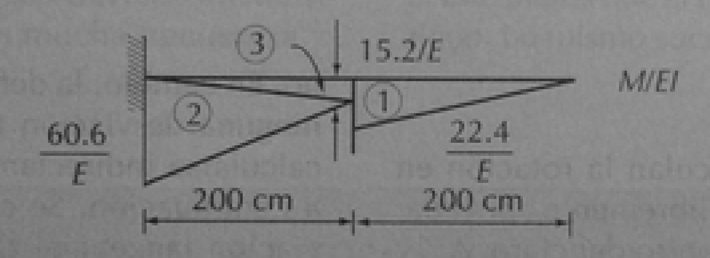


**EJEMPLO 3.3 *(continuación)***

DIAGRAMA DE $M$ Y DE $M/EI$




$$I_{BC} = 44\,537 \text{ cm}^4$$
$$I_{AB} = 44\,537 + 2 \times 30 \times 0.64\,(23.3 + 0.32)^2 = 65\,960 \text{ cm}^4$$




CÁLCULO DE $\theta_C$

$$\theta_{AC} = \theta_C$$

$$\theta_{AC} = \text{área } 1 + \text{área } 2 + \text{área } 3$$

$$= -\frac{1}{E}\left(\frac{200 \times 22.4}{2} + \frac{60.6 \times 200}{2} + \frac{15.2 \times 200}{2}\right) = -\frac{9820}{E}\text{kg/cm}^2$$

$$\theta_{AC} = \theta_C = -\frac{9820}{2 \times 10^6} = -0.00491 \text{ rad} = -0.28^\circ$$

CÁLCULO DE $\Delta_B$

$$t_{BA} = \Delta_B = -\frac{1}{E}\left[\frac{60.6 \times 200}{2} \times \frac{2}{3} \times 200 + \frac{15.2 \times 200}{2} \times \frac{1}{3} \times 200\right]$$

$$t_{BA} = \Delta_B = -\frac{909333}{E} = -\frac{909333}{2 \times 10^6} = -0.45 \text{ cm}$$

**EJEMPLO 3.3** ***(continuación)***

CÁLCULO DE $\Delta_C$

$$t_{CA} = \Delta_C = -\frac{1}{E}\left[\frac{60.6\times 200}{2}\left(200+\frac{2}{3}\times 200\right)+\frac{15.2\times 200}{2}\left(200+\frac{1}{3}\times 200\right)\right.$$

$$\left.+\frac{22.4\times 200}{2}\times\frac{2}{3}\times 200\right]$$

$$t_{CA} = \Delta_C = -\frac{2724000}{E} = -\frac{2724000}{2\times 10^6} = -1.36cm$$

**Ejemplo 3.4**

En este ejemplo se calculan la rotación en el extremo de una viga libremente apoyada, $\theta_A$, la deflexión en el centro del claro, $\Delta_C$, y la deflexión en los puntos tercios del claro, $\Delta_D$. El valor de *EI* es constante en todo el claro de la viga.

Primero se traza la curva elástica con el fin de determinar qué rotaciones y desviaciones tangenciales pueden calcularse con los teoremas área-momento y cómo se pueden relacionar con las deformaciones que se pide calcular. Se puede ver que la rotación $\theta_A$ es igual al ángulo que forman las tangentes trazadas por los puntos *A* y *C*, $\theta_{AC}$, o sea, el apoyo y el centro del claro, ya que la tangente en el centro del claro es horizontal por ser simétrica la viga. Este ángulo se puede entonces calcular directamente como la rotación entre los puntos *A* y *C*.

La deflexión en el centro del claro, $\Delta_C$, es igual a la desviación tangencial $t_{AC}$, o sea, la distancia entre el punto *A* y la tangente trazada por el punto *C*, debido a que esta tangente es horizontal como ya se mencionó. En cambio, la deflexión $\Delta_D$ no es igual a ninguna desviación tangencial y tiene que calcularse indirectamente como se explica a continuación. Se calcula primero la desviación tangencial $t_{BA}$, que es la distancia del punto *B* a la tangente que pasa por el punto *A*. A partir de $t_{BA}$ se calcula la distancia $\Delta_2$, que es la distancia entre el punto *D* de la viga sin deformar y la tangente que pasa por el punto *A*; este cálculo puede hacerse por triángulos semejantes, ya que se conocen las distancias *AD* y *AB*. Después se calcula la desviación tangencial $t_{DA}$, que es la distancia del punto *D* de la viga deformada a la tangente trazada por el punto *A*. Ahora ya puede calcularse la deflexión $\Delta_D$ como la diferencia entre $\Delta_2$ y $t_{DA}$. Es importante observar que no siempre pueden calcularse las rotaciones o las deflexiones directamente por el método de los teoremas área-momento, pero sí se pueden obtener indirectamente con procedimientos como el descrito.

Para hacer los cálculos mencionados en los dos párrafos anteriores, se traza el diagrama de *M/EI*, que es de la misma forma que el de *M*. Por el primer teorema, la rotación $\theta_{AC}$

es igual al área del diagrama *M/EI* entre *A* y *C*, o sea, media parábola. Esta área se ha calculado con la ecuación de la figura 3.6-*b*.

La deflexión $\Delta_C$, igual a la desviación tangencial $t_{AC}$, por el segundo teorema, es el momento de primer orden de la misma media parábola respecto al punto *A*, que es el punto cuya distancia a la tangente trazada por el punto *C* se quiere determinar. Para calcular este momento se multiplicó el área de la media parábola por la distancia centroidal indicada en misma figura 3.6-*b*. El resultado es

$$\Delta_C = \frac{5}{384}\frac{w\ell^4}{EI}$$

Este es un valor que conviene memorizar, pues se utiliza con mucha frecuencia.

Para calcular $\Delta_D$ se calcularon previamente $t_{BA}$, $\Delta_2$ y $t_{DA}$, según se explicó anteriormente. $t_{BA}$ es el momento de toda la parábola respecto al punto *B*; el centroide está en el centro del claro. $\Delta_2$ se calculó por triángulos semejantes. Y $t_{DA}$ es el momento del segmento de parábola entre *A* y *D*, respecto a *D*, el cual se calculó con las ecuaciones de la figura 3.6-*c*. Nótese que el valor de $\Delta_D$ resultó menor que el de $\Delta_C$, como se infiere de la forma de la curva elástica.

Respecto a los signos en este ejemplo, obsérvese que como el momento es positivo, $\theta_{AC}$ resulta también positiva. Este signo es congruente, ya que al pasar de la tangente en *A* a la tangente en *C* se gira en sentido antihorario. De la misma manera $t_{AC}$ resulta positiva, y en efecto, el punto *A* está arriba de la tangente en *C*. Esto indica que el punto *C* se desplaza hacia abajo. Lo mismo sucede con $\Delta_D$.

**EJEMPLO 3.4. CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES EN UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA POR EL MÉTODO DE LOS TEOREMAS ÁREA-MOMENTO**

DATOS:



Calcular la rotación en el apoyo A, la deflexión en el centro del claro y la deflexión en los tercios del claro

**EJEMPLO 3.4 *(continuación)***

CURVA ELÁSTICA

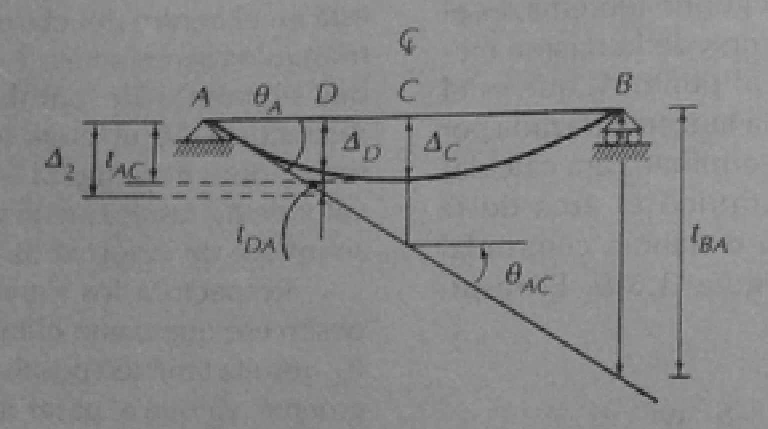
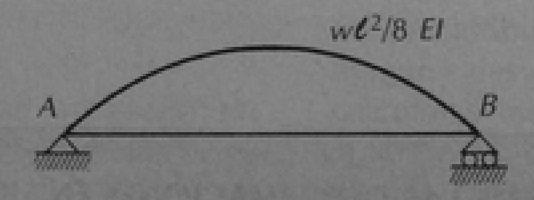
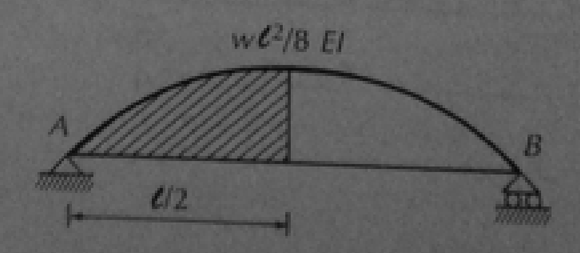



DIAGRAMA DE *M* Y DE *M/EI*




CÁLCULO DE $\theta_A$

$$\theta_A = \theta_{AC} = \text{área de } M/EI \text{ entre } A \text{ y } C$$




$$\theta_A = \frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{w\ell^2}{8EI} = \frac{w\ell^3}{24EI}$$

**EJEMPLO 3.4 (continuación)**

CÁLCULO DE $\Delta_C$

$$\Delta_C = t_{AC} = \text{momento de media parábola respecto al punto } A$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \cdot \frac{w\ell^3}{24} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{5}{384} \frac{w\ell^4}{EI}$$

CÁLCULO DE $\Delta_D$

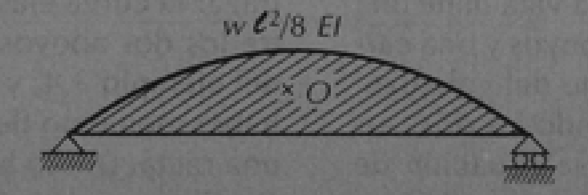
$$\Delta_D = \Delta_2 - t_{DA}$$

$$\Delta_2 = \frac{AD}{AB} t_{BA} = \frac{1}{3} t_{BA}$$

$t_{BA}$ = momento de toda la parábola respecto a $B$

$t_{DA}$ = momento del área entre $A$ y $D$ respecto a $D$

Cálculo de $t_{BA}$:

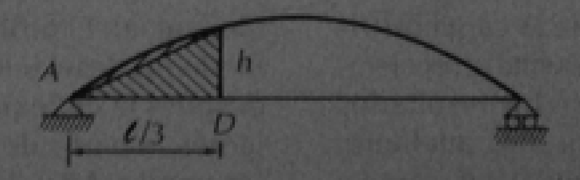



$$t_{BA} = \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{w\ell^2}{8EI} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{24} \frac{w\ell^4}{EI}$$

Cálculo de $\Delta_2$:

$$\Delta_2 = \frac{1}{3} t_{BA} = \frac{1}{72} \frac{w\ell^4}{EI}$$

Cálculo de $t_{DA}$:



**EJEMPLO 3.4 (continuación)**

$$h = \frac{1}{EI}\frac{w}{2}\cdot\frac{\ell}{3}\left(\ell - \frac{\ell}{3}\right) = \frac{w\ell^2}{9EI}$$

$$t_{DA} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{3}\cdot\frac{w\ell^2}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell}{3} + \frac{w\ell^3}{12\times 3^3}\cdot\frac{\ell}{6}\right]$$

$$t_{DA} = \frac{w\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{486} + \frac{1}{1944}\right] = \frac{5}{1944}\frac{w\ell^4}{EI}$$

$$\Delta_D = \frac{w\ell^4}{EI}\left(\frac{1}{72} - \frac{5}{1944}\right) = \frac{11}{972}\frac{w\ell^4}{EI}$$

### Ejemplo 3.5

Se pide calcular la deflexión en el extremo de una viga con dos apoyos y un voladizo. El valor de $EI$ es constante. La viga tiene una carga distribuida entre los apoyos y una carga concentrada en el extremo del voladizo. Podría resolverse considerando las dos cargas simultáneamente, pero la ecuación de momentos resultante no correspondería a ninguno de los casos incluidos en la figura 3.6, y sería necesario calcular las áreas y los momentos de primer orden por integración. Aunque esto puede hacerse, resulta más sencillo aplicar el principio de superposición de causas y efectos, y calcular por separado la deflexión producida por la carga distribuida y la producida por la carga concentrada. Para el primer caso, el diagrama de momentos será parabólico, y para el segundo, será lineal, así que pueden usarse las ayudas de la figura 3.6. Además, el caso de la carga distribuida corresponde a la viga resuelta en el ejemplo anterior y pueden usarse los resultados obtenidos, como se muestra más adelante. En general, cuando se tiene varias cargas, resulta más conveniente resolver el problema para cada una de ellas y sumar los resultados, de acuerdo con el principio de superposición de causas y efectos.

Para el caso de la carga distribuida, al trazar la curva elástica se puede ver que entre los dos apoyos se tiene la misma curva del ejemplo 3.4, y que en el voladizo, al no haber momento flexionante, la elástica será una recta. (Al no haber ninguna carga entre $B$ y $C$, no puede haber momento flexionante.) Por lo tanto, la rotación $\theta_A$ calculada en el ejemplo anterior será igual a la rotación $\theta_C$ de este problema, que es el ángulo de arranque de la parte recta en el tramo $BC$. Como las deformaciones son pequeñas y el ángulo es muy parecido a la tangente, la deflexión $\Delta_{C1}$ puede calcularse multiplicando $\theta_C$ por la longitud del tramo $BC$.

Para el caso de la carga concentrada, no puede calcularse directamente la deflexión $\Delta_{C2}$, ya que no corresponde a ninguna desviación tangencial. El problema se ha resuelto calculando las desviaciones tangenciales $t_{CA}$ y $t_{BA}$, después la deflexión $\Delta_2$ por triángulos semejantes, a partir de $t_{BA}$ y de las longitudes de los tramos $AB$ y $AC$, y luego la deflexión $\Delta_{C2}$ como la diferencia entre $t_{CA}$ y $\Delta_2$.

La desviación $t_{CA}$ es la distancia entre el punto *C* de la curva elástica y la tangente al punto *A*. Se ha calculado como el momento de primer orden del área del diagrama de *M/EI* completo, que es un triángulo, por la distancia centroidal indicada en la figura 3.6-a; esta distancia centroidal se ha tomado respecto al punto *C*. De manera semejante se calculó $t_{BA}$, tomando momentos respecto a *B*. Y la deflexión $\Delta_2$, como se ha señalado, se calculó por triángulos semejantes.

Al trazar las curvas elásticas para las dos cargas, puede verse claramente que la deflexión $\Delta_{C1}$ es hacia arriba, mientras que la $\Delta_{C2}$ es hacia abajo. Por esta razón, la deflexión buscada $\Delta_C$ es la diferencia entre las dos anteriores, y como $\Delta_{C2}$ resultó mayor que $\Delta_{C1}$, la deflexión final es hacia abajo. En el ejemplo no se han puesto los signos con la convención de la figura 3.4, pero pueden ponerse y se obtiene el mismo sentido de la deflexión.

## EJEMPLO 3.5. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN EL EXTREMO DE UNA VIGA CON DOS APOYOS Y UN VOLADIZO

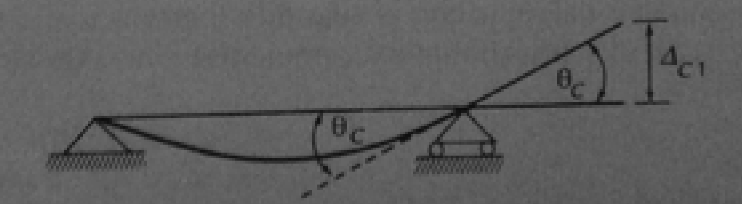
DATOS:

8 ton
A 4 ton/m B C
$EI$ = constante
6 m 3 m

Calcular la deflexión en el punto *C*
Se aplicará el principio de superposición de causas y efectos, analizando por separado las dos cargas

I. CARGA DISTRIBUIDA

CURVA ELÁSTICA



**EJEMPLO 3.5 (continuación)**

Del ejemplo 3.4, $\theta_C = \dfrac{w\ell^3}{24EI}$

$$\Delta_{C1} = \theta_C(BC) = \frac{1}{EI}\left[\frac{4\times 6^3}{24}\times 3\right] = \frac{108}{EI}$$

II. CARGA CONCENTRADA

CURVA ELÁSTICA

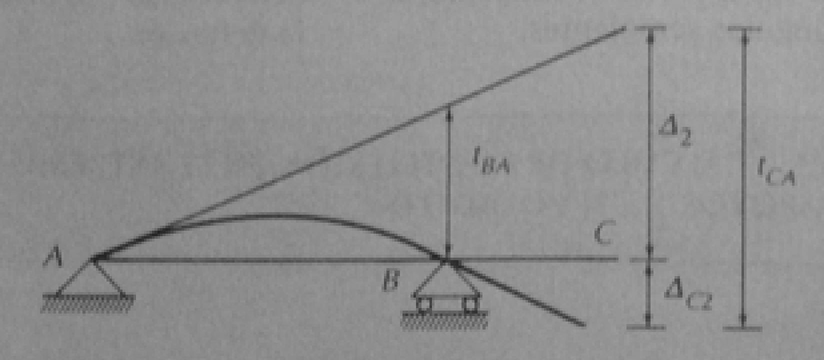
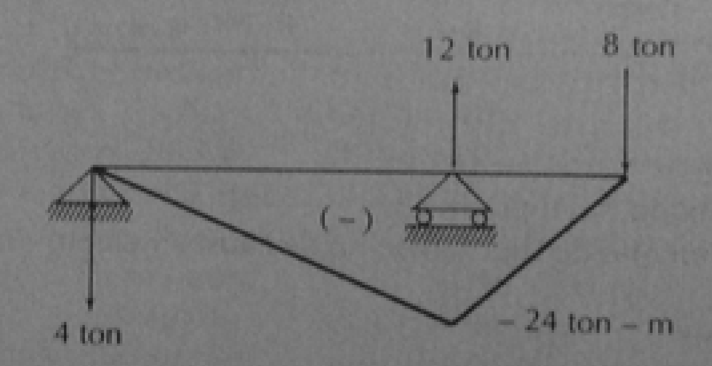



DIAGRAMA DE M/EI




CÁLCULO DE $\Delta_{C2}$

$$\Delta_{C2} = t_{CA} - \Delta_2$$

$t_{CA}$ y $t_{BA}$ se pueden calcular con el segundo teorema
$\Delta_2$ se puede calcular por triángulos semejantes si se conoce $t_{BA}$

Cálculo de $t_{CA}$

$t_{CA}$= momento del diagrama *M/EI* entre *A* y C respecto a *C*

$$t_{CA} = \frac{1}{EI}\left[\frac{9\times 24}{2}\left(\frac{9+3}{3}\right)\right] = \frac{432}{EI}$$

**EJEMPLO 3.5** ***(continuación)***

$t_{BA}$= momento del diagrama $M/EI$ entre $A$ y $B$ respecto a $B$

$$t_{BA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{6\times24}{2}\times\frac{1}{3}\times6\right]=\frac{144}{EI}$$

$$\Delta_2=\frac{AC}{AB}\cdot t_{BA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{9\times144}{6}\right]=\frac{216}{EI}$$

$$\Delta_{C2}=\frac{1}{EI}\left[432-216\right]=\frac{216}{EI}$$

III. SUMA DE LAS DOS CONDICIONES DE CARGA

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[216-108\right]=\frac{108}{EI}$$

## 3.5 Método de la viga conjugada

### *3.5.1 Presentación del método*

El método de área momento que se ha visto anteriormente permite obtener la rotación o la deflexión en un punto determinado de una viga. El método de la viga conjugada, que se presenta en esta sección, tiene la ventaja de permitir el cálculo de las deformaciones en cualquier punto. Esta ventaja resulta importante en la resolución de estructuras hiperestáticas, en las cuales hay que calcular deformaciones en varias secciones, como se verá en capítulos posteriores.

Considérese una viga libremente apoyada sujeta a una carga cualquiera como la mostrada en la figura 3.7-*a*. En las secciones 2.7.2 y 2.7.3 se recordó que existen las siguientes relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante en una viga de este tipo:

$$w=\frac{dV}{dx} \tag{2.14}$$

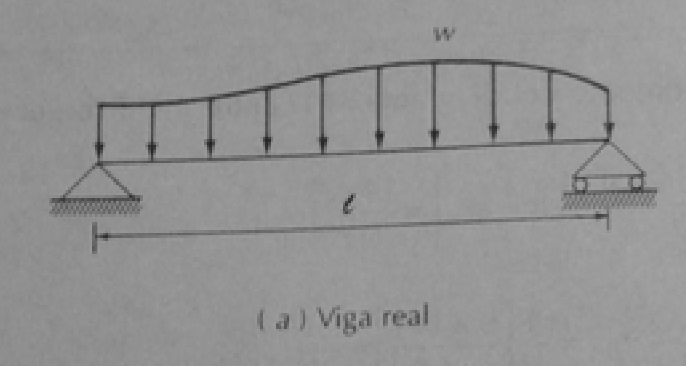
$$V=\frac{dM}{dx} \tag{2.16}$$

En las mismas secciones se demostró que con estas ecuaciones pueden calcularse, por integración, y determinando las constantes de integración, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes de esta viga, que se llamará la *viga real*:

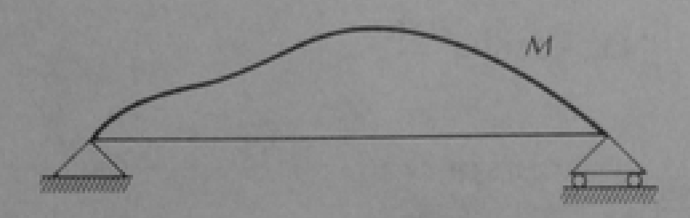
$$V=\int wdx \tag{2.15}$$

$$M=\int Vdx=\int\int wdx^2 \tag{2.17}$$

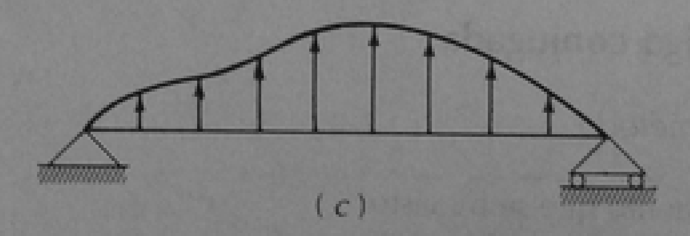
En la figura 3.7-*b* se muestra de manera esquemática el diagrama de momentos flexionantes así obtenido. También se ha de-




( *a* ) Viga real




( *b* ) Diagrama de momentos de la viga real




( *c* ) Viga conjugada con la carga elástica

**Figura 3.7.** Viga real simplemente apoyada y viga conjugada

mostrado en la Sección 3.2 que la rotación $\theta$ y la deflexión $y$ de esta viga pueden calcularse con las ecuaciones 3.17 y 3.18 que se reproducen a continuación:

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx \qquad (3.17)$$

$$y = \int\int \frac{M}{EI} dx \qquad (3.18)$$

Supóngase ahora que a otra viga, de igual claro, se la aplica como carga el diagrama de momento flexionante dividido entre la rigidez $EI$, como se indica en la figura 3.7-c. (Al plantear más adelante la convención de signos se explica por qué se coloca la carga actuando hacia arriba). A esta otra viga se le llamará *viga conjugada* y a la carga $M/EI$ se le llamará *carga elástica*. De acuerdo con las ecuaciones 2.15 y 2.17, y considerando que la carga $w$ es igual a $M/EI$, la fuerza con-

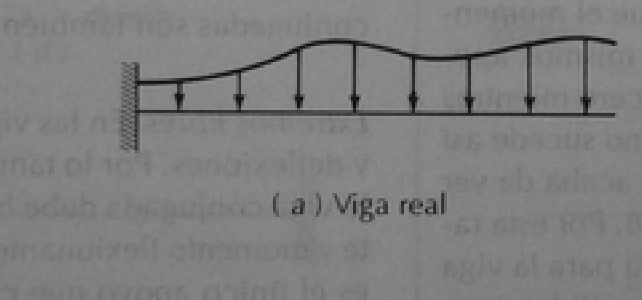
tante y el momento flexionante en la viga conjugada serán:

$$V_{conj} = \int \frac{M}{EI} dx \qquad (3.24)$$

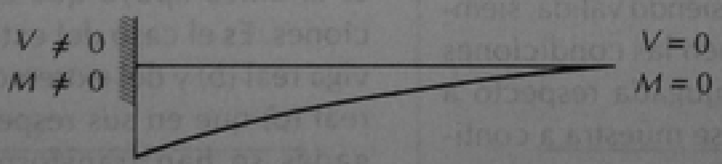
$$M_{conj} = \iint \frac{M}{EI} dx^2 \qquad (3.25)$$

Si se comparan ahora estas ecuaciones con las 3.17 y 3.18 se puede ver que la rotación $\theta$ en la viga real es igual a la fuerza cortante $V_{conj}$ en la viga conjugada y que la deflexión $y$ en la viga real es igual al momento flexionante $M_{conj}$ en la viga conjugada. Estas dos equivalencias se conocen como *teoremas de la viga conjugada*. De acuerdo con estos teoremas, para calcular la rotación y la deflexión en cualquier sección de una viga, se carga la viga conjugada con el diagrama de $M/EI$ y se calculan la fuerza cortante y el momento flexionante en esa sección. Los valores obtenidos serán las deformaciones de la viga real. Ya que en general se trazan diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante, se pueden obtener las rotaciones y deflexiones en cualquier sección de la viga real, lo que constituye la principal ventaja de este método.

En la demostración anterior se ha utilizado una viga libremente apoyada. En este caso, la viga real y la viga conjugada son iguales. Sin embargo, ésta es la excepción ya que en general las condiciones de apoyo de la viga real y de la conjugada son diferentes. Supóngase, por ejemplo, que se trata de un voladizo empotrado en su extremo izquierdo, figura 3.8-*a*. Como se indica en la figura 3.8-*b*, en el empotramiento del extremo iz-



( *a* ) Viga real




( *b* ) Diagrama de momentos

$\theta = 0$ $y = 0$ $\theta \neq 0$ $y \neq 0$

( *c* ) Viga real deformada

**Figura 3.8.** Deformaciones en un voladizo

quierdo la fuerza cortante y el momento flexionante tienen un valor diferente de cero, mientras que en el extremo libre de la derecha ambos valores son nulos. Por el contrario, en el extremo izquierdo la rotación y la deflexión son nulas, mientras que en el extremo derecho tienen un valor diferente de cero, figura 3.8-*c*. Ahora bien, si la viga conjugada estuviese empotrada también en su extremo izquierdo, la fuerza cortante y el momento flexionante serían nulos en el extremo derecho, lo cual indicaría que en este extremo no hay ni rotación ni deflexión, lo cual no es cierto como se ve en la figura 3.8-*c*. La explicación de esta discrepancia radica en que las constantes de integración de las ecuaciones 2.15 y 2.17 son diferentes a las de las ecuaciones 3.17 y 3.18, porque las condiciones de frontera son también diferentes, excepto en la viga libremente apoyada en que coinciden. En efecto, en esta viga la fuerza cortante tiene un valor diferente de cero en los apoyos mientras que el momento flexionante es nulo; en los mismos apoyos la rotación es diferente de cero mientras que la deflexión es nula. Pero no sucede así en otro tipo de vigas, como se acaba de ver para el voladizo de la figura 3.8. Por esta razón, la demostración planteada para la viga libremente apoyada sigue siendo válida, siempre y cuando se modifiquen las condiciones de apoyo de la viga conjugada respecto a las de la viga real, como se muestra a continuación.

### *3.5.2 Condiciones de apoyo de la viga conjugada*

El principio general para modificar las condiciones de apoyo consiste en tener en cuenta que si en la viga real hay rotaciones en un apoyo, en la viga conjugada debe haber fuerza cortante; si hay deflexiones en la viga real, debe haber momento flexionante en la viga conjugada; si por el contrario no hay estas deformaciones en la viga real, en la viga conjugada no debe haber fuerza cortante o momento flexionante, según el caso. De acuerdo con este principio, se muestran en la figura 3.9 las vigas conjugadas que corresponden a distintos tipos de vigas reales. A continuación se muestra cómo se ha aplicado el principio general enunciado para los apoyos de estas vigas.

*Extremos libremente apoyados*. Como permiten giros y no permiten deflexiones, en la viga conjugada deben ser apoyos libres, ya que en éstos hay fuerza cortante y no hay momento flexionante. Es el caso de los dos apoyos de la viga real (*a*), del extremo izquierdo de viga real (*d*) y de los extremos derechos de las vigas reales (*f*) y (*g*). En todos estos casos, los apoyos correspondientes de las vigas conjugadas son también apoyos libres.

*Extremos libres*. En las vigas reales hay giros y deflexiones. Por lo tanto, en los apoyos de la viga conjugada debe haber fuerza cortante y momento flexionante. El empotramiento es el único apoyo que cumple estas condiciones. Es el caso del extremo derecho de la viga real (*b*) y del extremo derecho de la viga real (*d*) que en sus respectivas vigas conjugadas se han transformado en empotramientos.

*Apoyos libres interiores*. Es el caso del apoyo derecho de la viga real (*d*). En este apoyo hay rotación pero no hay deflexión. En la viga conjugada debe haber fuerza cortante, pero no debe haber momento flexionante. Una articulación interior cumple este requisito, como se ve en la viga conjugada correspondiente.

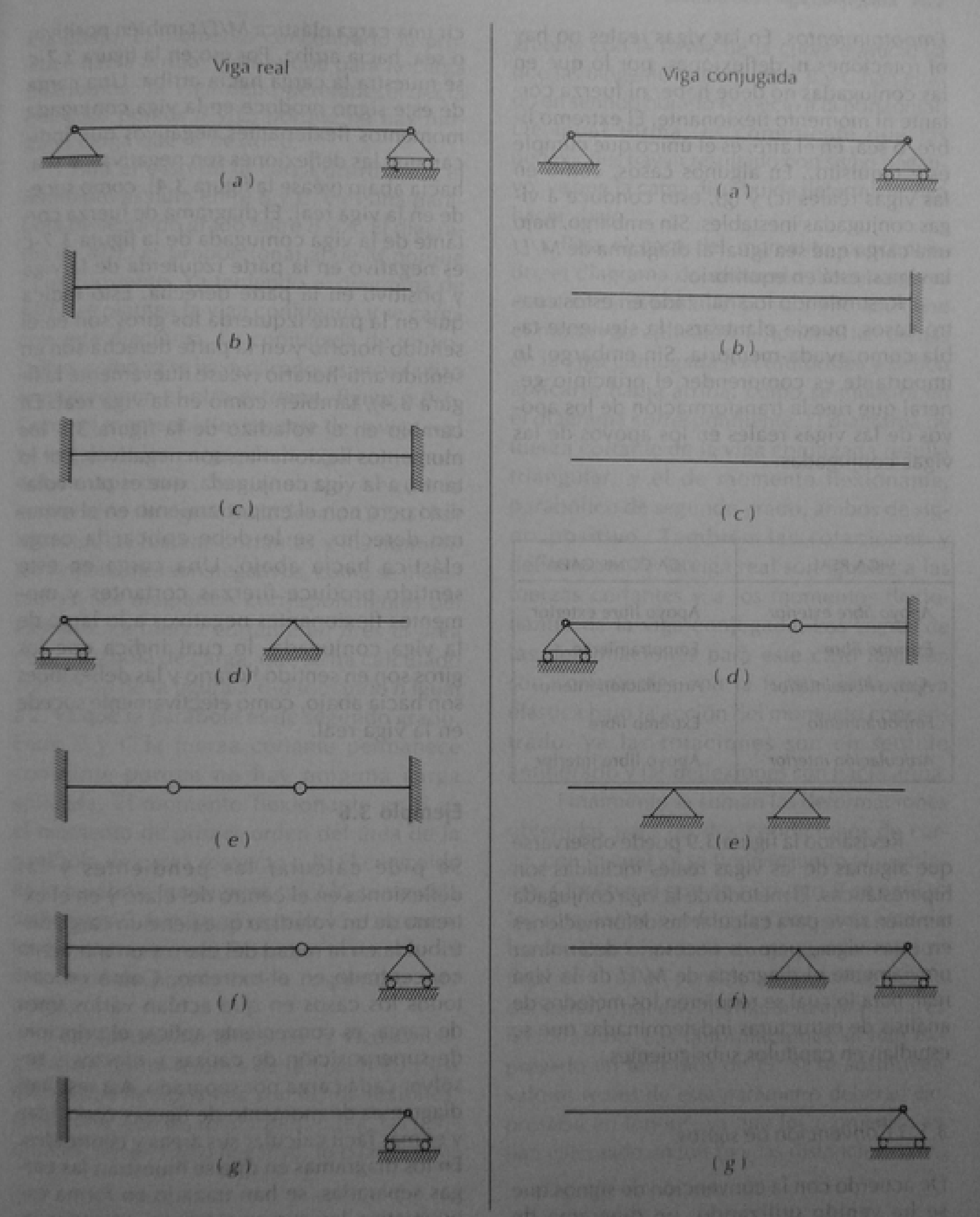



**Figura 3.9. Vigas conjugadas de diversos tipos de vigas reales**

*Empotramientos*. En las vigas reales no hay ni rotaciones ni deflexiones, por lo que en las conjugadas no debe haber ni fuerza cortante ni momento flexionante. El extremo libre, o sea, en el aire, es el único que cumple este requisito., En algunos casos, como en las vigas reales (c) y (g), esto conduce a vigas conjugadas inestables. Sin embargo, bajo una carga que sea igual al diagrama de $M/EI$ la viga sí está en equilibrio.

Resumiendo lo analizado en estos cuatro casos, puede plantearse la siguiente tabla como ayuda-memoria. Sin embargo, lo importante es comprender el principio general que rige la transformación de los apoyos de las vigas reales en los apoyos de las vigas conjugadas.

| VIGA REAL | VIGA CONJUGADA |
|---|---|
| *Apoyo libre exterior* | Apoyo libre exterior |
| *Extremo libre* | Empotramiento |
| *Apoyo libre interior* | Articulación interior |
| *Empotramiento* | Extremo libre |
| *Articulación interior* | Apoyo libre interior |

Revisando la figura 3.9 puede observarse que algunas de las vigas reales incluidas son hiperestáticas. El método de la viga conjugada también sirve para calcular las deformaciones en estas vigas, pero es necesario determinar previamente el diagrama de $M/EI$ de la viga real, para lo cual se requieren los métodos de análisis de estructuras indeterminadas que se estudian en capítulos subsiguientes.

### *3.5.3 Convención de signos*

De acuerdo con la convención de signos que se ha venido utilizando, un diagrama de momento flexionante positivo debe producir una carga elástica $M/EI$ también positiva, o sea, hacia arriba. Por eso en la figura 3.7-c se muestra la carga hacia arriba. Una carga de este signo produce en la viga conjugada momentos flexionantes negativos que indican que las deflexiones son negativas, o sea, hacia abajo (véase la figura 3.4), como sucede en la viga real. El diagrama de fuerza cortante de la viga conjugada de la figura 3.7-c es negativo en la parte izquierda de la viga y positivo en la parte derecha. Esto indica que en la parte izquierda los giros son en el sentido horario y en la parte derecha son en sentido anti-horario (veáse nuevamente la figura 3.4), también como en la viga real. En cambio en el voladizo de la figura 3.8 los momentos flexionantes son negativos. Por lo tanto, a la viga conjugada, que es otro voladizo pero con el empotramiento en el extremo derecho, se le debe aplicar la carga elástica hacia abajo. Una carga en este sentido produce fuerzas cortantes y momentos flexionantes negativos a lo largo de la viga conjugada, lo cual indica que los giros son en sentido horario y las deflexiones son hacia abajo, como efectivamente sucede en la viga real.

### Ejemplo 3.6

Se pide calcular las pendientes y las deflexiones en el centro del claro y en el extremo de un voladizo que tiene un carga distribuida en la mitad del claro y un momento concentrado en el extremo. Como en casi todos los casos en que actúan varios tipos de carga, es conveniente aplicar el principio de superposición de causas y efectos y resolver cada carga por separado. Así resultan diagramas de momento de figuras conocidas y es más fácil calcular sus áreas y centroides. En los diagramas en que se muestran las cargas separadas, se han trazado en forma esquemática las curvas elásticas. Mientras la carga distribuida produce una deflexión ha-

cia abajo, el momento concentrado la produce hacia arriba. Nótese que para la carga distribuida, la viga debe permanecer recta entre los puntos *B* y *C*, porque no hay ninguna carga que la flexione.

Para el caso de la carga distribuida, el momento es nulo entre *B* y *C*, y es una parábola de segundo grado entre *B* y *A*. El diagrama de *M/EI* es proporcional al de *M* porque *EI* es constante. Ya teniendo el diagrama de *M/EI*, se plantea la viga conjugada y se carga con este diagrama. La conjugada de un voladizo, como ya se ha explicado, es un voladizo empotrado en el otro extremo, figura 3.9-*b*. Como el momento flexionante de la viga real es negativo, las cargas de la viga conjugada deben aplicarse hacia abajo, según la convención de signos de la Sección 3.5.3. Por lo tanto, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes son negativos, como se muestran en los diagramas correspondientes del ejemplo. La fuerza cortante en *B* es el área de la parábola de carga, que se ha calculado con ayuda de la figura 3.6-*d* tomando *n* igual a 2, ya que la parábola es de segundo grado. Entre *B* y *C* la fuerza cortante permanece constante porque no hay ninguna carga aplicada. El momento flexionante en *B* es el momento de primer orden del área de la parábola de carga respecto a *B*. El centroide de la parábola también se calculó con ayuda de la figura 3.6-*d*. Igual se calculó el momento flexionante en *C*, pero tomando el momento de primer orden respecto a este punto.

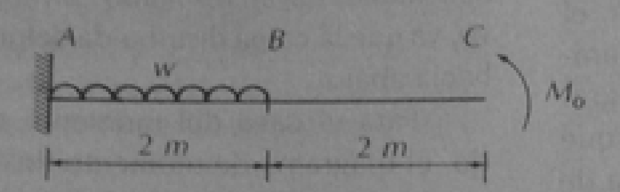
Las fuerzas cortantes de la viga conjugada son las rotaciones de la viga real, y los momentos flexionantes son las deflexiones. Obsérvese que las rotaciones, o sea, las pendientes, tienen signo negativo, lo cual es congruente con la forma de la curva elástica, ya que las tangentes a los puntos *B* y *C* han girado en sentido horario respecto a la horizontal. De igual forma, es congruente que las deflexiones hayan resultado con signo negativo, ya que la carga distribuida deforma la viga hacia abajo.

Para el caso del momento concentrado, el diagrama de momento flexionante es constante y es positivo, por el signo que tiene el momento aplicado. Entonces, las cargas de la viga conjugada son uniformes y deben aplicarse hacia arriba, como se muestra en el diagrama correspondiente. El diagrama de fuerza cortante de la viga conjugada resulta triangular, y el de momento flexionante, parabólico de segundo grado, ambos de signo positivo. También las rotaciones y deflexiones de la viga real son iguales a las fuerzas cortantes y a los momentos flexionantes de la viga conjugada. Los signos de las deformaciones para este caso también son congruentes con la forma de la curva elástica bajo la acción del momento concentrado, ya las rotaciones son en sentido antihorario y las deflexiones son hacia ariba.

Finalmente se suman las deformaciones obtenidas para las dos condiciones de carga, con lo cual ya se tiene resuelto el problema. Obsérvese que en el punto *B* se anulan las rotaciones producidas por cada una de las dos condiciones de carga, que la rotación final en *C* es en sentido antihorario, que la deflexión final en *B* es hacia abajo y en *C* es hacia arriba. Las deformaciones se han expresado en términos de *EI*. Si se sustituyen valores reales de este parámetro deberán expresarse en ton-m$^2$, ya que los momentos se han calculado en ton-m y las distancias en m.

## EJEMPLO 3.6. DEFORMACIONES EN UN VOLADIZO POR EL MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

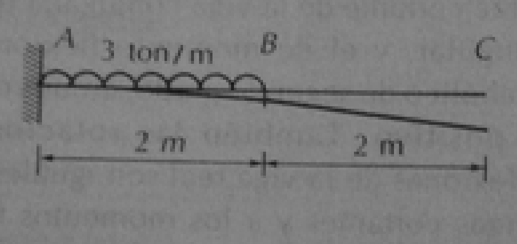
DATOS



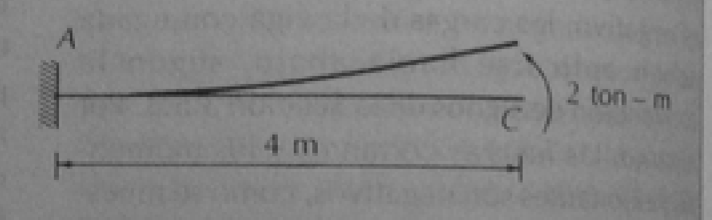

$EI$ = constante
$w$ = 3 ton/m
$M_o$ = 2 ton-m

Calcular la pendiente de la viga deformada y las deflexiones en los puntos $B$ y $C$.

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN



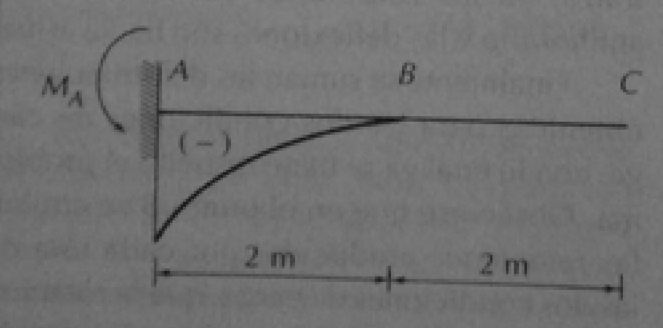

CASO A




CASO B

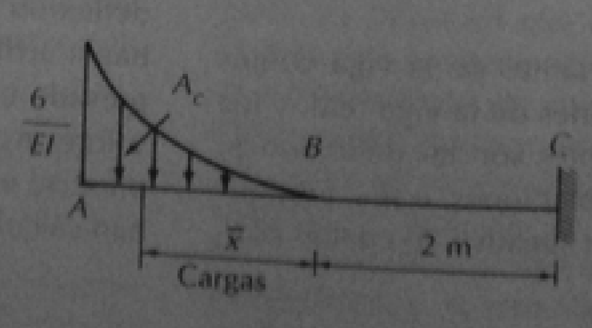
Caso A

Diagrama M/EI



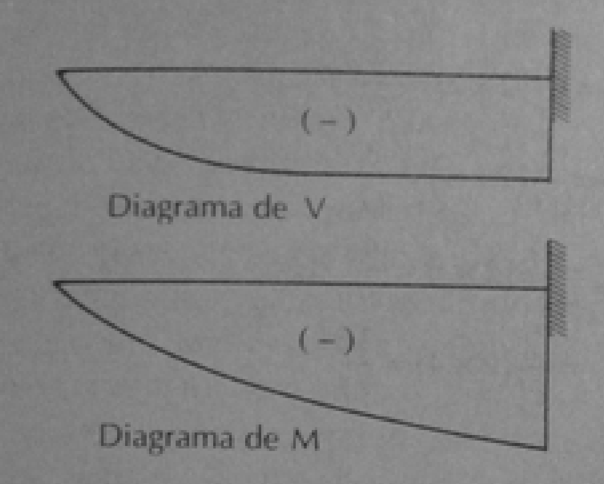

$$M_A = \frac{w\ell^2}{2} = \frac{3 \times 2^2}{2} = 6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Viga conjugada




Viga conjugada

**EJEMPLO 3.6** ***(continuación)***




$$V_B = V_C = A_C = -\frac{1}{EI}\left(\frac{6\times 2}{3}\right) = -\frac{4}{EI}$$

$$M_B = A_C\bar{x} = -\frac{1}{EI}\left(4\times\frac{3}{4}\times 2\right) = -\frac{6}{EI}$$

$$M_C = A_C(\bar{x}+2) = -\frac{4}{EI}\left(\frac{3}{4}\times 2 + 2\right) = -\frac{14}{EI}$$

Para el caso A:

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{4}{EI}\ \text{rad}$$

$$y_B = -\frac{6}{EI}\ m$$

$$y_C = -\frac{14}{EI}\ \text{m}$$

Caso B

$$M_A = 2\ \text{ton} - \text{m}$$

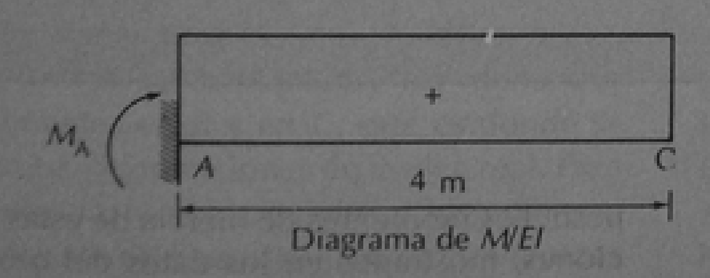
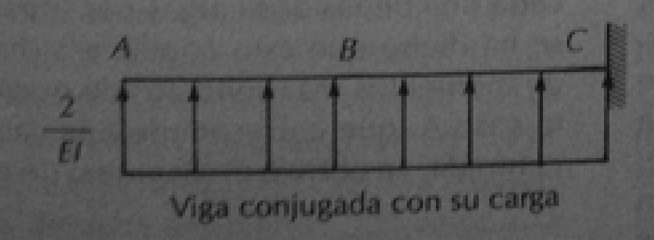


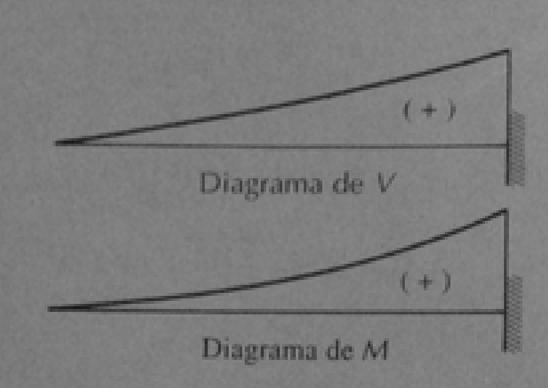

Diagrama de *M/EI*

Diagrama de *M/EI*




Viga conjugada con su carga

**EJEMPLO 3.6** ***(continuación)***




$$V_B = \frac{1}{EI}(2\times 2) = \frac{4}{EI}$$

$$V_C = \frac{1}{EI}(2\times 4) = \frac{8}{EI}$$

$$M_B = \frac{2}{EI}(2\times 1) = \frac{4}{EI}$$

$$M_C = \frac{2}{EI}(2\times 4) = \frac{16}{EI}$$

Para el caso B:

$$\theta_B = \frac{4}{EI}\text{ rad}$$

$$\theta_C = \frac{8}{EI}\text{ rad}$$

$$y_B = \frac{4}{EI}\text{ m}$$

$$y_C = \frac{16}{EI}\text{ m}$$

Para las dos cargas simultáneas:

$$\theta_B = 0$$

$$\theta_C = \frac{4}{EI}\text{ rad}$$

$$y_B = -\frac{2}{EI}\text{ m}$$

$$y_C = \frac{2}{EI}\text{ m}$$

**Ejemplo 3.7**

En este ejemplo se muestra la aplicación de la viga conjugada en el caso de una viga con una articulación intermedia. La viga es isostática, ya que tiene un apoyo libre y el otro, empotrado. Se pide calcular las rotaciones y las deflexiones en el punto de aplicación de la carga concentrada y en la articulación. La viga es de sección variable: entre las secciones *A* y *C* está fabricada con un perfil I rectangular de 305 mm de peralte y 66.9 kg/m, y entre las secciones *C* y *D* con un perfil del mismo peralte pero de mayor peso. Los momentos de inercia de estas secciones, mostrados en los datos del problema, se obtuvieron en el Manual del IMCA[6].

En este ejemplo también se aplicó el principio de superposición y se resolvió para cada una de las dos cargas por separado. Ya se ha dicho que esto conduce a diagramas de momentos más sencillos de operar. Para el caso A, que corresponde a la carga concentrada, se obtuvo el diagrama de momen-

[6] Instituto Mexicano de la Construcción en Acero. "Manual de Construcción en Acero, Vol. 1", pp. 62 y 63. LIMUSA–IMCA, 1987.

tos flexionantes considerando el tramo *AC* como libremente apoyado y aplicando la reacción en *C*, con signo cambiado, en el extremo del voladizo *CD*. Como el momento de inercia de la sección transversal es diferente en los dos tramos, y para trabajar con el mismo valor de *I*, se hizo igual a un valor $I_0$ al menor de los dos momentos de inercia, el del tramo *AC*, y se calculó el del otro tramo en función de $I_0$, resultando un valor de $1.52I_0$, como se muestra en la figura de los datos. De esta manera, el diagrama de *M/EI* quedó en función de $I_0$ en los dos tramos.

Para trazar la viga conjugada, se consideró que el apoyo *A* de la viga real, por ser un apoyo extremo libre, sigue siendo el mismo tipo de apoyo en la viga conjugada. La articulación interior *C* de la viga real se transforma en un apoyo interior. Y el empotramiento *D* se transforma en un extremo libre. (Ver la tabla de la Sección 3.5.2). De acuerdo con la convención de signos, el tramo positivo de *M/EI* se aplica como una carga hacia arriba en la viga conjugada, y el tramo negativo, como una carga hacia abajo.

Ya teniendo la viga conjugada con sus cargas, se calculan las reacciones en *A* y en *C*, y las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en *B* y en *C*, que es donde se piden las deformaciones de la viga real. Para calcular la fuerza cortante y el momento flexionante en *B* se consideraron las fuerzas a la izquierda de la sección, mientras que para calcularlos en *C*, se consideraron a la derecha con signo cambiado. De esta manera las operaciones son más sencillas. Es importante observar que en la sección *C* hay un cambio brusco en el diagrama de fuerza cortante, por efecto de la reacción en *C*. Por eso se calculó la fuerza cortante a la izquierda y a la derecha del punto *C*. El valor a la izquierda es igual al valor a la derecha menos la reacción en *C*.

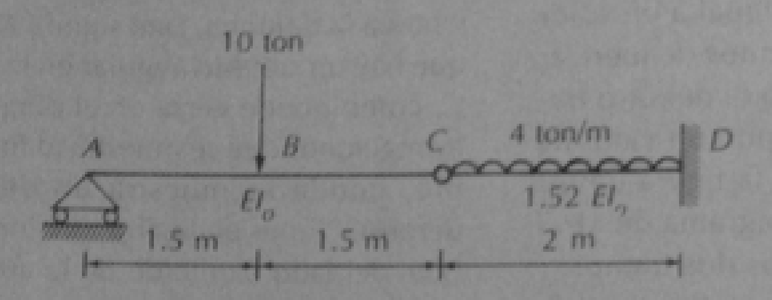
Las deformaciones de la viga real para el caso A son iguales a las fuerzas cortantes y momentos flexionantes de la viga conjugada. Nótese que así como hay dos fuerzas cortantes en el punto *C*, también hay dos rotaciones en la viga real, una a la izquierda y otra a la derecha. Esto significa físicamente que hay un cambio angular en la articulación *C*, como puede verse en el diagrama de deformaciones que se muestra al final del ejemplo, donde se muestra un detalle de las deformaciones en la articulación. Obsérvese que, del lado izquierdo de la articulación, el ángulo que va de la horizontal a la tangente en *C* tiene sentido antihorario, o sea, es positivo, como indica el valor calculado de $2.71/EI_0$. Del lado derecho de la articulación, también tiene sentido antihorario el ángulo de la horizontal a la tangente, y es mayor que del lado izquierdo; esto coincide con el valor calculado de $6.58/EI_0$. Se ve claro que las deflexiones son hacia abajo, como indica el signo negativo obtenido en los cálculos.

Para el caso B, el diagrama de $M/EI_0$ es negativo, por lo que la carga se aplica hacia abajo en la viga conjugada. El tramo *AC* debe permanecer recto, ya que no hay ninguna carga en el tramo. Esto se comprueba con los valores calculados de $\theta_B$ y de $\theta_{Ci}$ que son iguales, $-1.76/EI_0$. El ángulo que va de la horizontal a la tangente en la articulación *C* es horario, como se ve en el detalle al final del ejemplo, y por eso el valor es negativo. En cambio del lado derecho de la articulación, el giro es antihorario por lo que la rotación es positiva ($3.51/EI_0$). Las deflexiones son hacia abajo y por lo tanto son negativas.

Las deformaciones totales se han obtenido sumando las de los casos A y B. Al final se sustituyó el valor de $EI_0$, en ton-m$^2$, ya que los momentos se habían calculado en ton-m. Recuérdese que el valor de $EI_0$ es el del tramo *AC*.

## EJEMPLO 3.7. DEFORMACIONES DE UNA VIGA CON UNA ARTICULACIÓN INTERIOR POR EL MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

DATOS:




Calcular las rotaciones y las deflexiones en los puntos *B* y *C*.

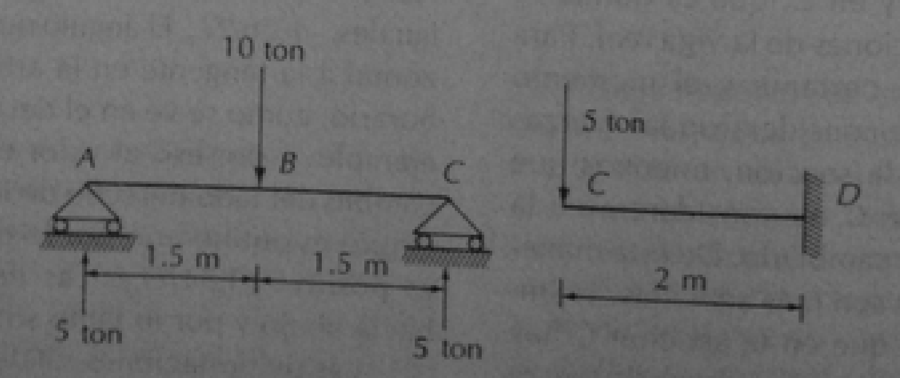
Entre *A* y *C* la viga es una IR de 305 mm × 66.9 kg/m, $I$=14568 cm$^4$

Entre *C* y *D* la viga es una IR de 305 mm × 96.7 kg/m, $I$=22185 cm$^4$

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

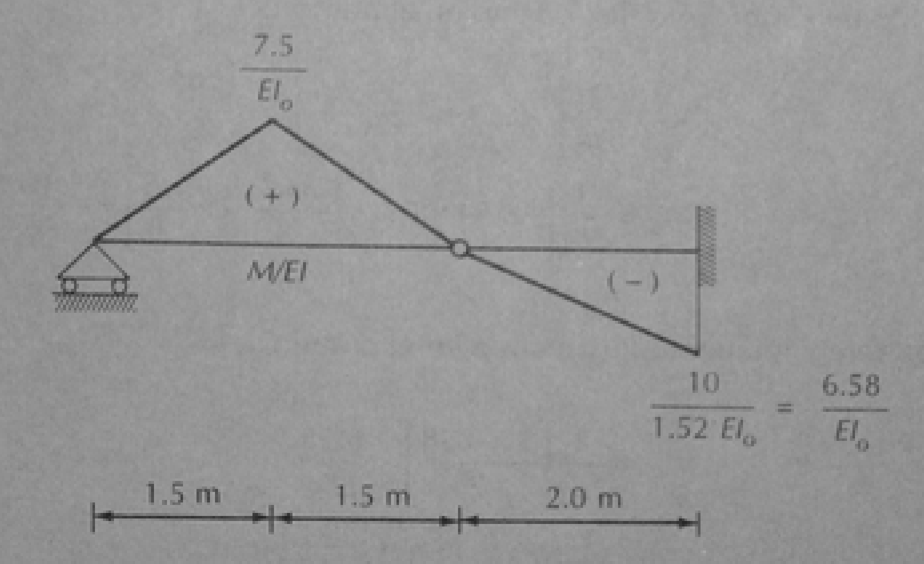
CASO A

DIAGRAMA DE *M/EI*

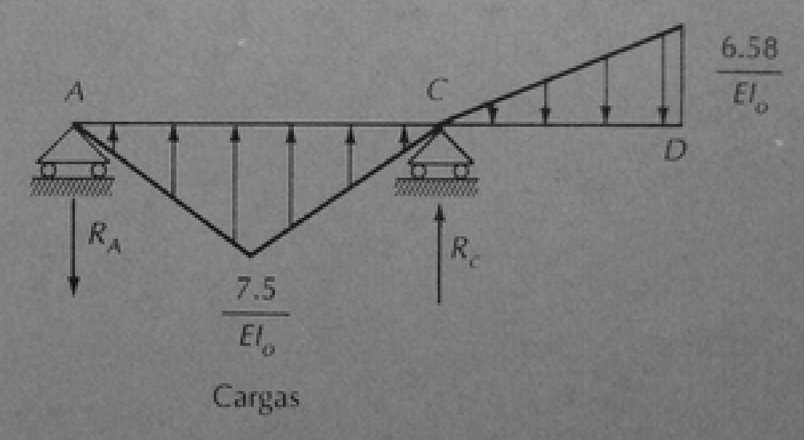



$$R_A = R_C = 5 \text{ ton}$$
$$M_B = 5 \times 1.5 = 7.5 \text{ ton-m}$$
$$M_D = 5 \times 2 = 10 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 3.7** ***(continuación)***




Viga conjugada




Cargas

Cálculo de las reacciones

$$\sum M_A = 0 = -3R_C + \left[-\frac{3\times 7.5}{2}\times 1.5 + \frac{6.58\times 2}{2}(3+1.33)\right]\frac{1}{EI_O}$$

$$R_C = 3.87\left(\frac{1}{EI_O}\right)\uparrow$$

$$\sum F_Y = -R_A + \left[\frac{3\times 7.5}{2} - \frac{6.58\times 2}{2} + 3.87\right]\frac{1}{EI_O} = 0$$

$$R_A = 8.54\left(\frac{1}{EI_O}\right)\downarrow$$

**EJEMPLO 3.7 *(continuación)***

Cortante y momento flexionante en el punto B:

$$V_B = \frac{1}{EI_O}\left[-8.54 + \frac{1.5 \times 7.5}{2}\right] = -\frac{2.91}{EI_O}$$

$$M_B = \frac{1}{EI_O}\left[-8.54 \times 1.5 + \frac{1.5 \times 7.5}{2} \times \frac{1.5}{3}\right] = -\frac{10}{EI_O}$$

Cortante y momento flexionante en el punto C:

$$V_{cd} = \frac{1}{EI_O}\left[\frac{2 \times 6.58}{2}\right] = \frac{6.58}{EI_O}$$

$$V_{ci} = \frac{1}{EI_O}[6.58 - 3.87] = \frac{2.71}{EI_O}$$

$$M_c = -\frac{1}{EI_O}\left[\frac{2 \times 6.58}{2} \times \frac{2}{3} \times 2\right] = -\frac{8.77}{EI_O}$$

Deformaciones para el caso A:

$$\theta_B = -\frac{2.91}{EI_O}$$

$$y_B = -\frac{10}{EI_O}$$

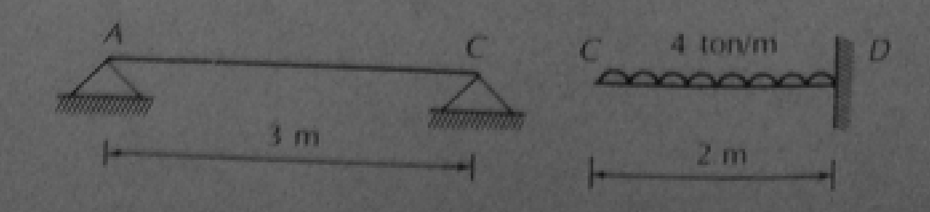
$$\theta_{cd} = \frac{6.58}{EI_O}$$

$$\theta_{ci} = \frac{2.71}{EI_O}$$

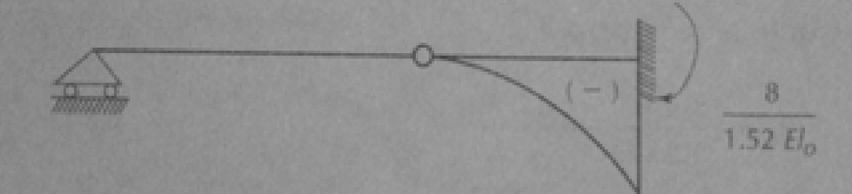
$$y_c = -\frac{8.77}{EI_O}$$

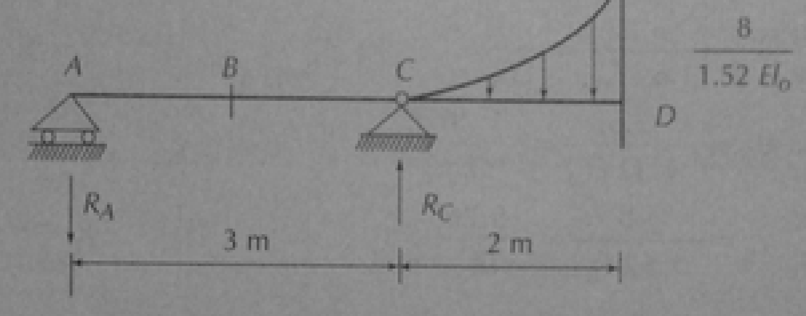
Caso B:

Diagrama de *M/EI*



**EJEMPLO 3.7 (continuación)**




Cálculo de reacciones:

$$\sum M_A = 0 = -3R_C + \left[\frac{1}{3}(8\times 2)\left(3+\frac{3}{4}\times 2\right)\right]\frac{1}{1.52\,EI_O}$$

$$R_C = \frac{8}{1.52\,EI_O}\uparrow$$

$$\sum F_y = -R_A + \left[8-\frac{1}{3}\times 8\times 2\right]\frac{1}{1.52\,EI_O}$$

$$R_A = \frac{2.67}{1.52\,EI_O}\downarrow$$

Cortante y momento flexionante en el punto B:

$$V_B = -\frac{2.67}{1.52\,EI_O}$$

$$M_B = -\frac{1}{1.52\,EI_O}(2.67\times 1.5) = -\frac{4}{1.52\,EI_O}$$

Cortante y momento flexionante en el punto C:

$$V_{cd} = \frac{1}{1.52\,EI_O}\left(\frac{1}{3}\times 8\times 2\right) = \frac{5.33}{1.52\,EI_O}$$

$$V_{ci} = \frac{1}{1.52\,EI_O}(5.33-8) = -\frac{2.67}{1.52\,EI_O}$$

$$M_c = -\frac{1}{1.52\,EI_O}\left(\frac{1}{3}\times 8\times 2\times\frac{3}{4}\times 2\right) = -\frac{8}{1.52\,EI_O}$$

**EJEMPLO 3.7 *(continuación)***

Deformaciones para el caso B

$$\theta_B = -\frac{2.67}{1.52\,EI_O} = -\frac{1.76}{EI_O}$$

$$y_B = -\frac{4}{1.52\,EI_O} = -\frac{2.63}{EI_O}$$

$$\theta_{cd} = \frac{5.33}{1.52\,EI_O} = \frac{3.51}{EI_O}$$

$$\theta_{ci} = -\frac{2.67}{1.52\,EI_O} = -\frac{1.76}{EI_O}$$

$$y_c = -\frac{8}{1.52\,EI_O} = -\frac{5.26}{EI_O}$$

Deformaciones totales

$$\theta_B = -\frac{4.67}{EI_O}$$

$$y_B = -\frac{12.63}{EI_O}$$

$$\theta_{cd} = \frac{10.09}{EI_O}$$

$$\theta_{ci} = \frac{0.95}{EI_O}$$

$$y_c = -\frac{14.03}{EI_O}$$

$$EI_O = 2 \times 10^6 \times 14568 = 29136 \times 10^6 \text{ kg-cm}^2 = 2913.6 \text{ ton-m}^2$$

$$\theta_B = -0.00160 \text{ rad}$$

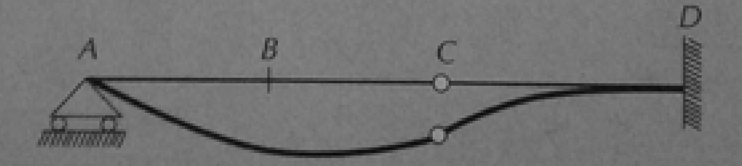
$$y_B = -0.0043 \text{ m}$$

$$\theta_{cd} = 0.0035 \text{ rad}$$

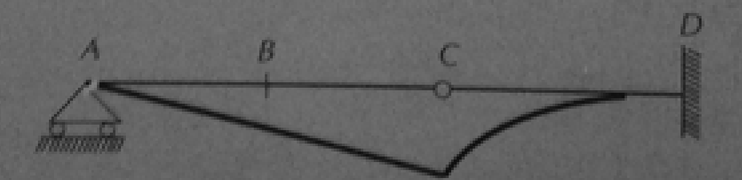
$$\theta_{ci} = 0.0003 \text{ rad}$$

$$y_c = -0.0048 \text{ m}$$

Esquema de deformaciones para el caso A:

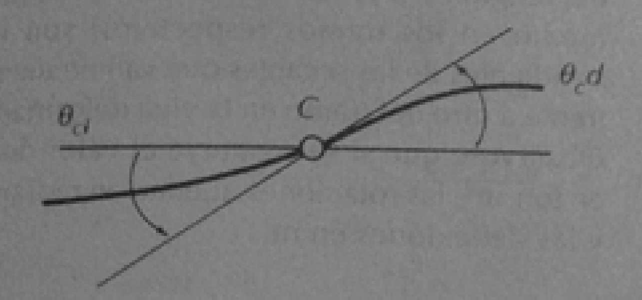



Esquema de deformaciones para el caso B:

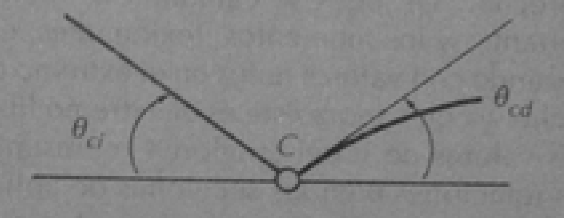


**EJEMPLO 3.7 *(continuación)***

Detalle de las deformaciones en la articulación para el caso A:




Detalle de las deformaciones en la articulación para el caso B:




## 3.6 Método de Newmark

En la Sección 2.10 se presentó el método de Newmark para el cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, y se dijo que era especialmente útil para casos de cargas irregulares.[7] El método puede ampliarse al cálculo de rotaciones y deflexiones. Una manera sencilla de hacerlo es combinándolo con el método de la viga conjugada. Ya que este método, como se vio en la sección anterior, se basa en el cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes en una viga conjugada, el método de Newmark puede usarse para calcular estas fuerzas y momentos, de la misma manera que se vio en la Sección 2.10. El método es ventajoso porque aun cuando la viga real tenga cargas sencillas, las cargas que se aplican a la viga conjugada, que son el diagrama de *M/EI*, ya resultan complicadas, como se pudo ver en el ejemplo 3.7 que se acaba de presentar. En el ejemplo 3.8 se ilustra la utilización del Método de Newmark para resolver la viga conjugada, aunque se advierte de antemano que no es de esta manera en la que se puede utilizar más eficientemente.

[7] Se recomienda al lector repasar la Sección 2.10 antes de estudiar el Método de Newmark para el cálculo de deformaciones.

**Ejemplo 3.8**

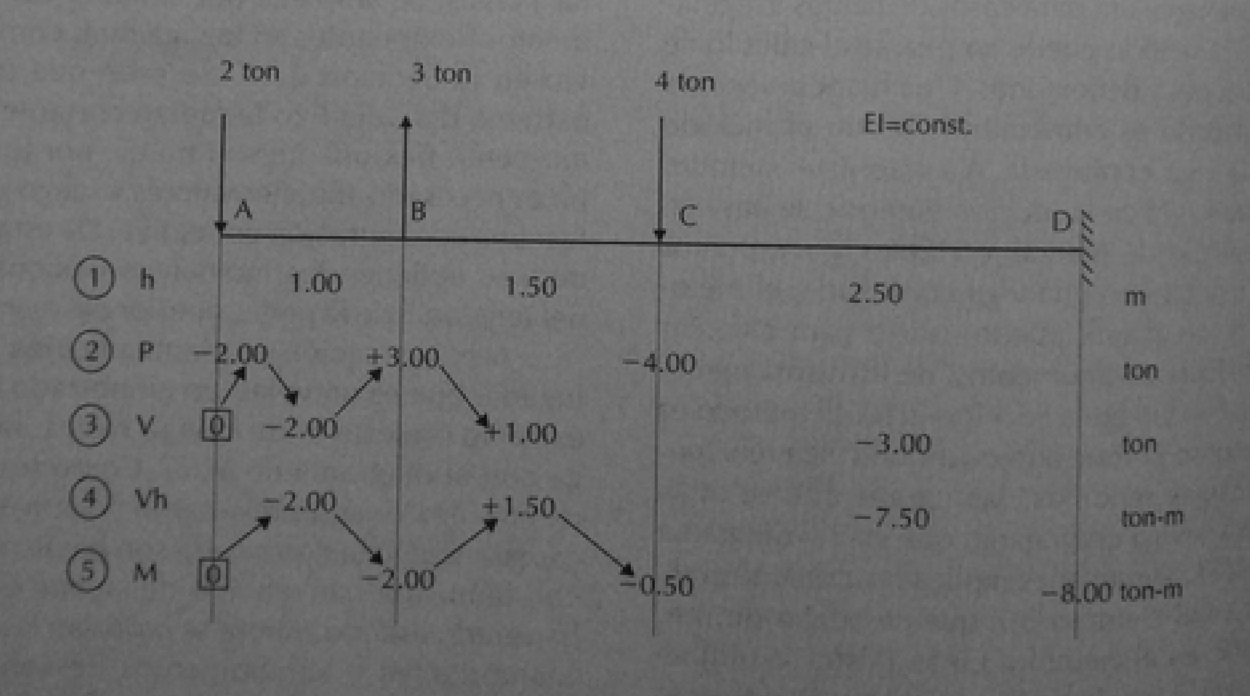
Se trata de un voladizo con cargas concentradas y se pide obtener las rotaciones y las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas. Se empieza por calcular los momentos flexionantes en la viga real, como se vio en la Sección 2.10. Se sabe que en el extremo del voladizo la fuerza cortante y el momento flexionante son nulos, por lo que no es necesario suponer valores y luego plantear una configuración correctiva. De esta manera se obtienen los momentos flexionantes del renglón 5 de la parte superior del ejemplo.

A continuación se plantea la viga conjugada, que es un voladizo empotrado en el extremo opuesto al de la viga real, y se carga con el diagrama de *M/EI*. Como los momentos flexionantes resultaron negativos, las cargas en la viga conjugada son hacia abajo, con la misma convención de signos que se ha venido usando. Ahora se calculan las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en esta viga. Los valores del renglón 2 representan las cargas distribuidas en las secciones correspondientes. A partir de estos valores, se calculan las cargas concentradas equivalentes del renglón 3 con las ecuaciones 2.21 y 2.22, ya que la distribución de cargas es lineal. Por ejemplo, la carga de –6.75 se obtuvo como:

$$P_{BC} = \frac{1.50[2(-2.00)-0.50]}{6} = \frac{-6.75}{6}$$

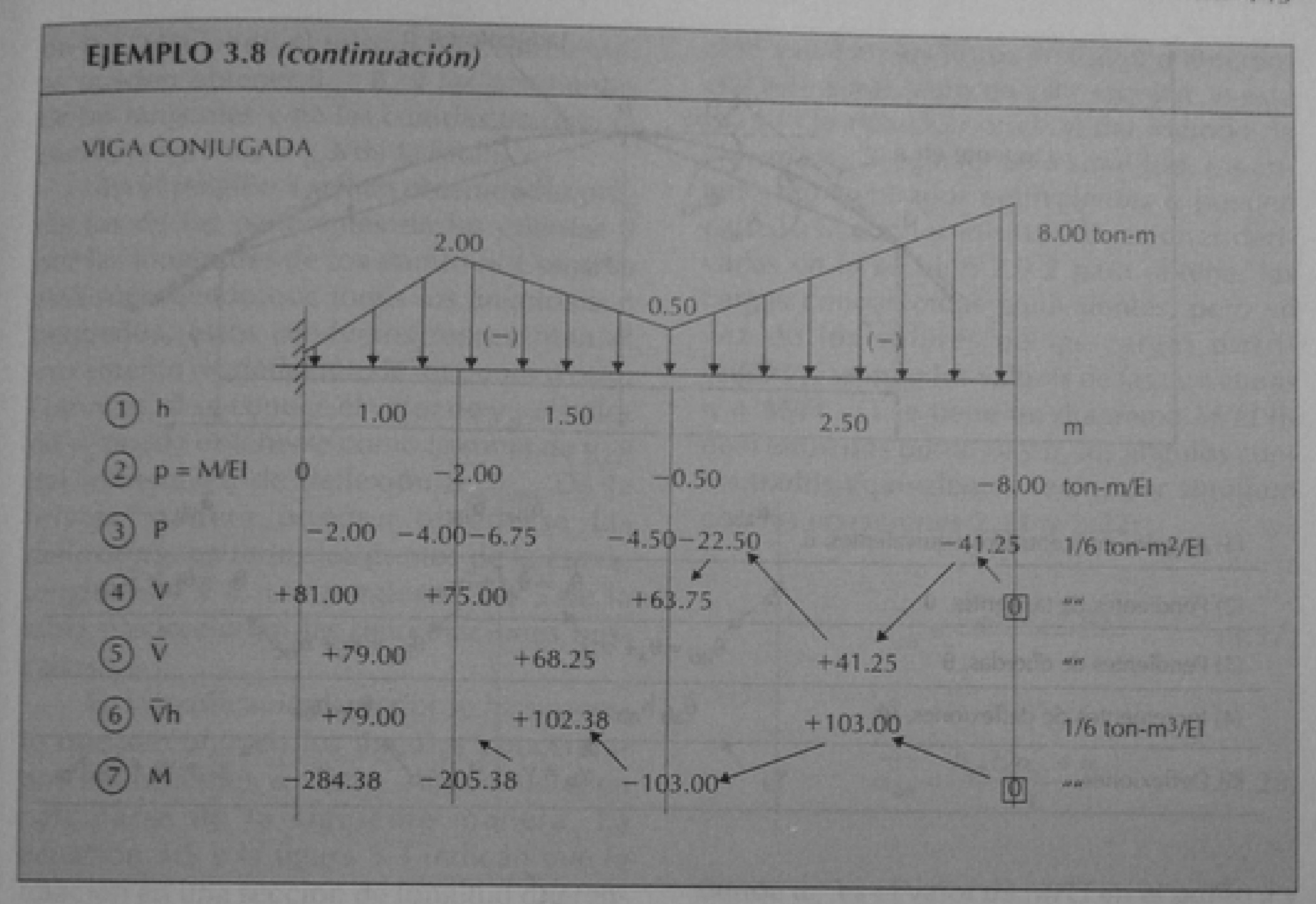
La constante 1/6 está factorizada a la derecha.[8] Después se calculan las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, empezando con valores nulos en el extremo derecho, ya que ahora éste es el extremo libre. Los valores de $V$ del renglón 4 representan las rotaciones $\theta$ en las secciones de aplicación de las cargas concentradas, y los valores de $M$ del renglón 7, las deflexiones en estos mismos puntos. Desde luego que la rotación y la deflexión en el empotramiento de la viga real son nulas. Los valores de $V$ del renglón 5 representan las rotaciones promedio en los tramos respectivos; son las pendientes de las secantes que van de un extremo a otro del tramo en la viga deformada. Obsérvese que si se sustituye el valor de $EI$ en ton-m$^2$, las rotaciones quedan en radianes y las deflexiones en m.

## EJEMPLO 3.8. CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES EN UN VOLADIZO POR EL MÉTODO DE NEWMARK Y LA VIGA CONJUGADA




[8] En todos los ejemplos del Método de Newmark, al hacer referencia a las cantidades que aparecen en las tablas, no se incluyen las cantidades y las unidades factorizadas a la derecha de la tabla.

**EJEMPLO 3.8 *(continuación)***




El Método de Newmark para el cálculo de deformaciones puede plantearse sobre la base de consideraciones puramente geométricas y es así como resulta más práctico y eficiente. Considérese un tramo de una curva cualquiera, como la mostrada con trazo grueso en la figura 3.10, que puede ser un tramo de una viga deformada. En este tramo se han marcado tres secciones *a*, *b* y *c*, las tangentes a la curva en estos tres puntos y las secantes o cuerdas que unen los puntos con líneas rectas. Entre los puntos *a* y *b*, la pendiente de la curva va cambiando gradualmente, de tal manera que el cambio angular total sería el ángulo formado por las tangentes en ambos puntos, $\theta_{ab}$. En la figura puede verse que este ángulo es igual a la suma de los ángulos formados por las tangentes y las cuerdas $\overline{\alpha_{ab}}$ y $\overline{\alpha_{ba}}$. Estos ángulos pueden entonces considerarse como cambios angulares concentrados cuya suma equivale al cambio angular gradual entre *a* y *b*. Puede verse la semejanza entre los cambios angulares concentrados equivalentes y las cargas concentradas equivalentes que se han usado en el cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. De igual manera, el cambio angular total entre los puntos *b* y *c*, $\theta_{bc}$, sería la suma de los ángulos concentrados equivalentes $\overline{\alpha_{bc}}$ y $\overline{\alpha_{cb}}$. La esencia del Método de Newmark para el cálculo de deformaciones, según se describe más adelante, consiste en sustituir las rotaciones continuas, $d\theta$, de la figura 3.3 por cambios angulares concentrados equivalentes y obtener la rotación entre dos secciones como la suma de estos ángulos en vez de obtenerla por integración aplicando la ecuación 3.19.

Si se conocen los ángulos concentrados equivalentes $\overline{\alpha}$ y la rotación y la defle-

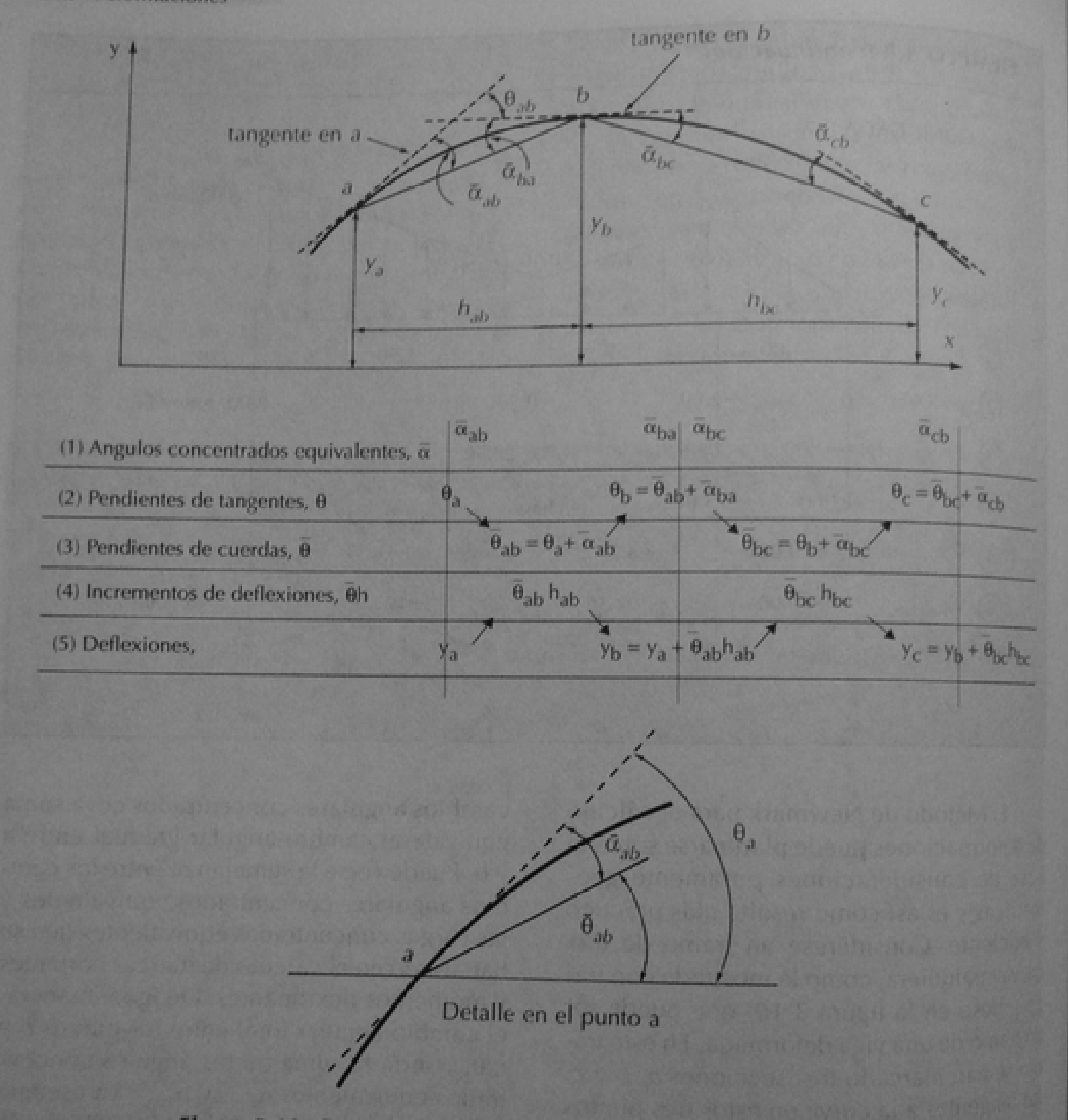



**Figura 3.10.** Construcción geométrica para el método de Newmark

xión de la curva en algún punto, pueden obtenerse las rotaciones y deflexiones en los otros puntos como se indica a continuación. En una tabla, como la mostrada en la figura 3.10, se anotan en el primer renglón los ángulos concentrados equivalentes $\bar{\alpha}$. Si se conoce $\theta_a$, la pendiente de la cuerda $\overline{\theta_{ab}}$ puede obtenerse sumando $\overline{\alpha_{ab}}$ a $\theta_a$ como se ve en el detalle del punto a mostrado en la parte inferior de la figura (obsérvese que tal como está la figura, el ángulo $\overline{\alpha_{ab}}$ es negativo porque el giro de la tangente a la cuerda tiene sentido horario). A continuación, se puede obtener la pendiente de la tangente en $b$, $\theta_b$ sumando el ángulo concentrado equivalente $\overline{\alpha_{ba}}$ a la pendiente ya encontra-

da $\overline{\theta_{ab}}$. Siguiendo el mismo procedimiento, se pueden obtener $\theta_{bc}$, $\theta_c$ y las pendientes de las tangentes y de las cuerdas en toda la curva, renglones 2 y 3 de la tabla.

En el renglón 4 se han obtenido los productos de las pendientes de las cuerdas $\theta$ por las longitudes de los tramos $h$. Como se está suponiendo que todos los ángulos son pequeños, estos productos representan el incremento de deflexión de un punto a otro. Entonces, si se conoce el valor de $y_a$, el valor de $y_b$ puede obtenerse como la suma de $y_a$ y del incremento de deflexión $\theta_{ab}h_{ab}$. De la misma manera pueden obtenerse las deflexiones en todos los puntos de la curva, renglones 4 y 5. Los renglones 2 y 5 de la tabla proporcionan las deformaciones buscadas.

En la explicación anterior se ha supuesto que se conocen los ángulos concentrados equivalentes $\overline{\alpha}$. Estos ángulos pueden calcularse de la siguiente manera. La ecuación 3.5 y la figura 3.3 indican que la rotación en una sección de longitud diferencial $dx$ es igual a

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad (3.5)$$

Si se considera ahora una viga con una carga distribuida de valor $p$, la carga total en una longitud $dx$ será:

$$dP = pdx \qquad (3.26)$$

Puede entonces establecerse una similitud entre las cargas distribuidas $p$ y los valores de $M/EI$, que son los recíprocos de los radios de curvatura, o sea, las curvaturas, según indica la ecuación 3.7. A estas curvaturas se les denominará con la letra $\alpha$ (en la Sección 3.2 se usó la letra $\kappa$ para referirse a la curvatura con el fin de respetar la notación usual en los libros de Cálculo Diferencial e Integral, pero en esta sección se está usando la notación original del Método de Newmark). Si se hace esta similitud, los ángulos concentrados equivalentes $\overline{\alpha}$ pueden calcularse con las mismas ecuaciones derivadas en la sección 2.9.2 para obtener las cargas concentradas equivalentes, pero en vez de los valores de las cargas distribuidas $p$ se usan los valores de las curvaturas $\alpha = M/EI$. Si se tiene un diagrama $M/EI$ lineal entre dos puntos $a$ y $b$, los ángulos concentrados equivalentes serán, por similitud con las ecuaciones 2.21 y 2.22:

$$\overline{\alpha_{ab}} = \frac{h_{ab}(2\alpha_a + \alpha_b)}{6} \qquad (3.27)$$

$$\overline{\alpha_{ba}} = \frac{h_{ab}(2\alpha_b + \alpha_a)}{6} \qquad (3.28)$$

donde $\alpha_a$ es el valor de $M/EI$ en el punto $a$ y $\alpha_b$ es el valor de $M/EI$ en el punto $b$.

Si se desea obtener directamente la suma de $\overline{\alpha_{ab}}$ y de $\overline{\alpha_{ba}}$ en el punto $b$ se puede usar una ecuación similar a la 2.23:

$$\overline{\alpha_b} = \frac{h_{ab}(\alpha_a + 4\alpha_b + \alpha_c)}{6} \qquad (3.29)$$

Si el diagrama de $M/EI$ no es lineal, sino que tiene una distribución cualquiera, pero continua, que se pueda aproximar por una parábola de segundo grado, los ángulos concentrados equivalentes se podrán calcular con ecuaciones similares a las 2.27, 2.28, 2.26 y 2.25 que quedarían, respectivamente, como:

$$\overline{\alpha_{ab}} = \frac{h_{ab}}{24}(7\alpha_a + 6\alpha_b - \alpha_c) \qquad (3.30)$$

$$\overline{\alpha_{ba}} = \frac{h_{ab}}{24}(3\alpha_a + 10\alpha_b - \alpha_c) \quad (3.31)$$

$$\overline{\alpha_{bc}} = \frac{h_{bc}}{24}(3\alpha_c + 10\alpha_b - \alpha_a) \quad (3.32)$$

$$\overline{\alpha_{cb}} = \frac{h_{bc}}{24}(7\alpha_c + 6\alpha_b - \alpha_a) \quad (3.33)$$

Y si se desea calcular el ángulo concentrado equivalente total en el punto *b*, como la suma de $\alpha_{ba}$ y de $\alpha_{bc}$ se puede usar una ecuación equivalente a la (2.29):

$$\overline{\alpha_b} = \frac{h}{12}(\alpha_a + 10\alpha_b + \alpha_c) \quad (3.34)$$

En este último caso, las longitudes de los tramos deberán ser iguales.

Se dijo anteriormente que además de los ángulos concentrados equivalentes, se requería conocer la rotación y la deflexión en algún punto de la viga. Esto puede deducirse de las condiciones de apoyo de la viga. Por ejemplo, si es un voladizo como el del ejemplo anterior, la rotación y la deflexión son nulas en el empotramiento. Si no se conocen en ningún punto, entonces se supone un valor cualquiera en uno de los apoyos, y después se revisan las condiciones de deformación en el otro apoyo. Si son incompatibles con las restricciones que impone este apoyo, se introduce una configuración correctiva, en forma semejante a como se hacía en el cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes cuando no se cumplían las condiciones de apoyo. En el cálculo de deformaciones, las configuraciones correctivas se basan en las restricciones a deformación en los apoyos, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

En resumen, el método aplicado al cálculo de deformaciones es igual al método aplicado al cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes si se hacen las siguientes equivalencias:

| CÁLCULO DE MOMENTOS Y FUERZAS CORTANTES | CÁLCULO DE ROTACIONES Y DEFLEXIONES |
|---|---|
| *Cargas distribuidas, p* | Curvaturas, $\alpha = M/EI$ |
| *Cargas concentradas equivalentes, P* | Ángulos concentrados equivalentes $\overline{\alpha}$ |
| *Fuerzas cortantes en las secciones, V* | Rotaciones en las secciones, $\theta$ |
| *Fuerzas cortantes en los tramos,* $\overline{V}$ | Rotaciones de las cuerdas, $\overline{\theta}$ |
| *Momentos flexionantes, M* | Deflexiones, *y* |
| *Revisión de M y V en los apoyos* | Revisión de $\theta$ y *y* en los apoyos |

**Ejemplo 3.9**

Se calculan las deformaciones en el voladizo del ejemplo anterior, pero sin plantear la viga conjugada, sino que usando las consideraciones geométricas planteadas en los párrafos precedentes. La obtención de los momentos flexionantes en los cinco primeros renglones es igual a la del ejemplo 3.8, así que no merece ningún comentario.

En el renglón 6 se han calculado las curvaturas $\alpha = M/EI$. Como $EI$ es constante, simplemente se ha factorizado a la derecha y los valores de este renglón son iguales a los del anterior. A partir de las curvaturas $\alpha$ se han calculado en el renglón 7 los ángulos concentrados equivalentes $\bar{\alpha}$. Ya que las cargas de la viga son concentradas, el diagrama de momentos es lineal, y el cálculo debe hacerse con las ecuaciones 3.27 y 3.28. Por ejemplo, el valor de −22.50 se ha calculado con la ecuación 3.27 de la siguiente manera:

$$\overline{\alpha_{3,4}} = \frac{2.50}{6}\left[2(-0.50)+(-8.00)\right] = \frac{-22.50}{6}$$

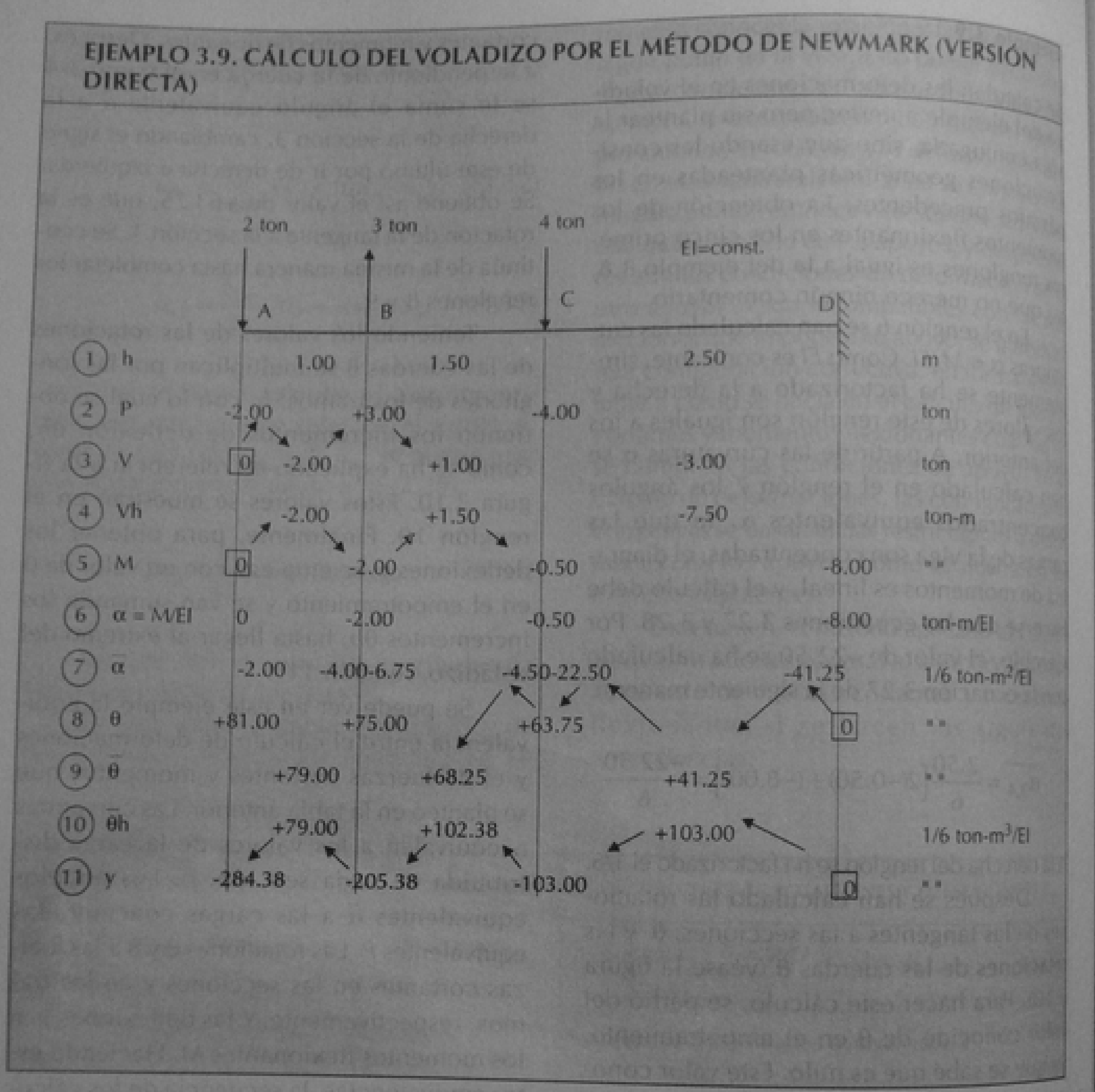
A la derecha del renglón se ha factorizado el 1/6.

Después se han calculado las rotaciones de las tangentes a las secciones, $\theta$ y las rotaciones de las cuerdas $\bar{\theta}$ (véase la figura 3.10). Para hacer este cálculo, se partió del valor conocido de $\theta$ en el empotramiento, ya que se sabe que es nulo. Este valor conocido se ha encerrado en un cuadro en el ejemplo. Al valor de $\theta$ en el empotramiento se le sumó el valor de $\bar{\alpha}$ en el mismo empotramiento, como se muestra con la pequeña flecha que va de 0 a −41.25. El valor que se obtiene es el de la rotación de la cuerda $\bar{\theta}$ en el tramo 3-4; como se está sumando de derecha a izquierda, se debe cambiar el signo, igual que en el cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Después, a la pendiente de la cuerda en el tramo 3-4 se le suma el ángulo equivalente $\bar{\alpha}$ a la derecha de la sección 3, cambiando el signo de este último por ir de derecha a izquierda. Se obtiene así el valor de +63.75, que es la rotación de la tangente a la sección 3. Se continúa de la misma manera hasta completar los renglones 8 y 9.

Teniendo los valores de las rotaciones de las cuerdas $\bar{\theta}$ se multiplican por las longitudes de los tramos, $h$, con lo cual se obtienen los incrementos de deflexión $\bar{\theta}h$, como se ha explicado en referencia a la figura 3.10. Estos valores se muestran en el renglón 10. Finalmente, para obtener las deflexiones $y$, se empieza con un valor de 0 en el empotramiento y se van sumando los incrementos $\bar{\theta}h$, hasta llegar al extremo del voladizo, renglón 11.

Se puede ver en este ejemplo la equivalencia entre el cálculo de deformaciones y el de fuerzas cortantes y momentos que se planteó en la tabla anterior. Las curvaturas $\alpha$ equivalen a los valores de la carga distribuida en cada sección, $p$. Los ángulos equivalentes $\bar{\alpha}$ a las cargas concentradas equivalentes $P$. Las rotaciones $\theta$ y $\bar{\theta}$ a las fuerzas cortantes en las secciones y en los tramos, respectivamente. Y las deflexiones $y$, a los momentos flexionantes $M$. Haciendo estas equivalencias, la secuencia de los cálculos es la misma, pero es importante observar que las condiciones de frontera sí son diferentes. Mientras que en el cálculo de fuerzas cortantes y momentos se partió de los valores conocidos de $V = 0$ y $M = 0$ en el extremo libre del voladizo, en el cálculo de deformaciones se partió de los valores conocidos $\theta = 0$ y $y = 0$ en el empotramiento.

## EJEMPLO 3.9. CÁLCULO DEL VOLADIZO POR EL MÉTODO DE NEWMARK (VERSIÓN DIRECTA)




En la figura 3.11 se muestra el significado físico de algunos de los valores que se han obtenido en el ejemplo 3.9. Con líneas llenas se han trazado las cuerdas que unen las secciones de la viga deformada y con líneas punteadas, las tangentes a las secciones (por claridad de la figura no se muestra la viga continua deformada). Empezando con la sección 4, el ángulo equivalente de −41.25 proporciona la rotación de la cuerda 3-4, ya que la pendiente es nula en el empotramiento. Este valor, sumado al ángulo equivalente de −22.50, ambos con signos cambiados, permite obtener la rotación de la tangente en la sección 3 respecto a la horizontal, o sea, +63.75. Continuando las sumas hacia la izquierda, se llega a la rotación en el extremo del voladizo de +81.00. Obsérvese que esta rotación debe ser positiva de acuerdo con la convención de signos, ya que la rotación de la horizontal a la tangente en la sección 1 es en sentido antihorario. La deflexión en el extremo del voladizo debe ser

negativa, porque de la horizontal a la curva se tiene un desplazamiento hacia abajo. Los valores mostrados en la figura 3.11 no incluyen el término que está factorizado a la derecha de la tabla, para que coincidan numéricamente con los del ejemplo. La figura 3.11 no está a escala.

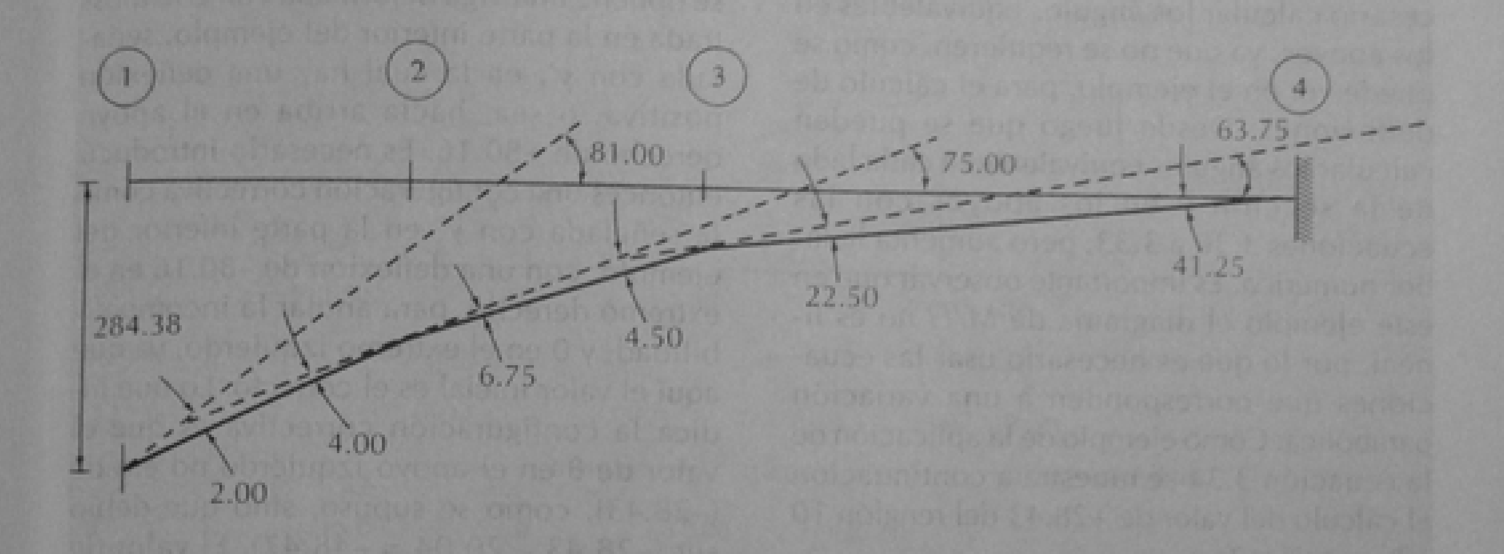



**Figura 3.11.** Algunos valores del ejemplo 3.9

**Ejemplo 3.10**

Se pide calcular las deflexiones en una viga libremente apoyada con una carga triangular y con momento de inercia variable. Por estos dos parámetros variables, la viga no es simétrica y es necesario introducir configuraciones correctivas tanto para el cálculo de momentos y fuerzas cortantes, como de rotaciones y deflexiones.

Para el cálculo de momentos y cortantes, se calcularon las cargas concentradas equivalentes totales en cada sección, con la ecuación 2.23. Así, la carga de –12.00 del renglón 4 se obtuvo de:

$$P_3 = \frac{2}{6}\left[1(-1.00) + 4(-2.00) + 1(-3.00)\right] = \frac{2}{6}(-12.0)$$

Como no se conoce la fuerza cortante en ningún punto, se supuso una fuerza cortante de +6.00 en el tramo 1-2, encerrada en un óvalo en el ejemplo. Al obtener el momento en el apoyo de la derecha resultó un valor de –36.00, por lo cual fue necesario introducir un momento correctivo de +36.00 en este apoyo, con una variación lineal hasta 0 en el apoyo izquierdo. De esta manera se obtuvieron los momentos finales en el renglón 8. Obsérvese que para el cálculo de deformaciones, sólo se requieren los momentos flexionantes en las secciones, y no las fuerzas cortantes. Por eso es suficiente con calcular las fuerzas equivalentes totales con la ecuación 2.23, y por la misma razón, no es necesario corregir las fuerzas cortantes supuestas en el renglón 5.

Al calcular las curvaturas $\alpha$ en el renglón 9, fue necesario considerar que el valor de $EI$ no es constante. Así que se dividió el valor de $M$ en cada sección entre el de $EI$ que aparece en el renglón 2. Por ejemplo, el valor de +2.50 en la sección 2 se calculó como 15/6.

Como no se piden en este ejemplo las rotaciones en las secciones, sino únicamen-

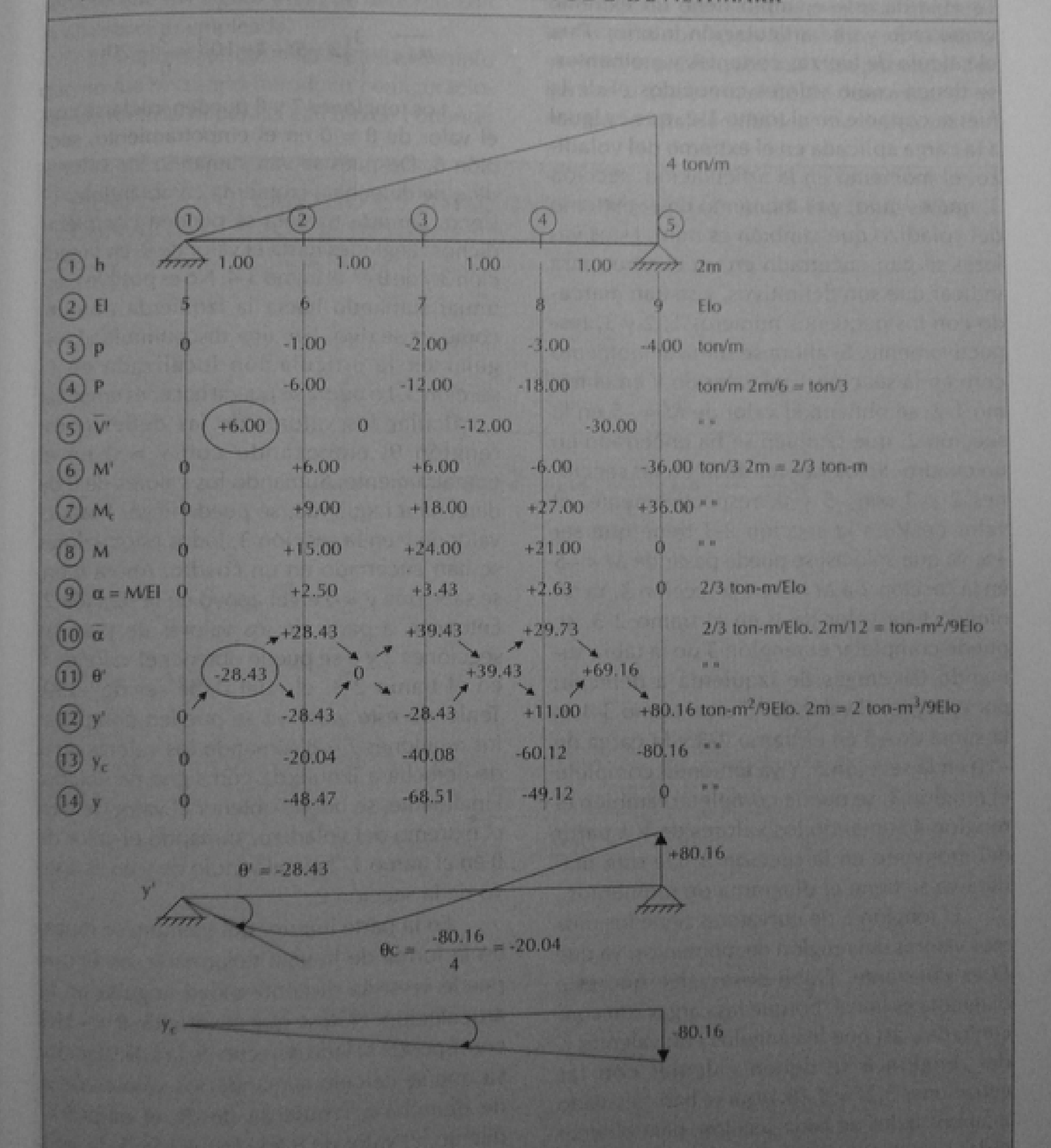
te las deflexiones, los ángulos equivalentes $\alpha$ se calcularon con la ecuación 3.34 que da el valor del ángulo equivalente total en cada sección. Por la misma razón, no es necesario calcular los ángulos equivalentes en los apoyos, ya que no se requieren, como se puede ver en el ejemplo, para el cálculo de deflexiones. Desde luego que se pueden calcular los ángulos equivalentes a cada lado de la sección y en los apoyos con las ecuaciones 3.30 a 3.33, pero aumenta la labor numérica. Es importante observar que en este ejemplo el diagrama de *M/EI* no es lineal, por lo que es necesario usar las ecuaciones que corresponden a una variación parabólica. Como ejemplo de la aplicación de la ecuación 3.34 se muestra a continuación el cálculo del valor de +28.43 del renglón 10 y la sección 2:

$$\overline{\alpha_2} = \frac{2}{12}\left[1(0) + 10(2.50) + 1(3.43)\right] = \frac{2}{12}(+28.43)$$

Al iniciar el renglón 11 se encuentra que no se conoce la rotación en ningún punto de la viga. Se supuso entonces una rotación cualquiera $\theta'$ en el tramo 1-2, en este caso de (–28.43), encerrada en un óvalo en el ejemplo. A partir de este valor, ya se puede calcular todo el renglón, sumando a los valores de $\theta'$, los valores de $\overline{\alpha}$, como se muestra con las flechas pequeñas. Después se calculan las deflexiones en el renglón 12, iniciando con un valor correcto de 0 en el apoyo izquierdo, y sumando los valores de $\theta'$ del renglón anterior; no se ha calculado un renglón con los valores de $\theta'h$, porque $h$ es constante en este ejemplo. Al terminar el renglón 12, se llega a una deflexión de +80.16 en el apoyo derecho, la cual es incorrecta ya que debe ser nula. Esta incompatibilidad de deformación en el apoyo derecho se debe a que el valor supuesto de (–28.43) no es correcto. Por eso se obtiene una viga deformada como la mostrada en la parte inferior del ejemplo, señalada con $y'$, en la cual hay una deflexión positiva, o sea, hacia arriba en el apoyo derecho de +80.16. Es necesario introducir entonces una configuración correctiva como la señalada con $y_c$ en la parte inferior del ejemplo, con una deflexión de –80.16 en el extremo derecho, para anular la incompatibilidad, y 0 en el extremo izquierdo, ya que aquí el valor inicial es el correcto. Lo que indica la configuración correctiva es que el valor de $\theta$ en el apoyo izquierdo no era de (–28.43), como se supuso, sino que debió ser (–28.43 – 20.04 = –48.47). El valor de –20.04 se obtiene dividiendo el valor de $y_c$ en el apoyo derecho entre los cuatro tramos de la viga. El lector puede comprobar que si se inicia el renglón 11 con –48.47, se llega a una deflexión nula en el apoyo derecho.

En este ejemplo se puede ver la equivalencia entre las configuraciones correctivas para cortantes y momentos, y para rotaciones y deflexiones. En las primeras, se restituyen las reacciones que debe haber en los apoyos, mientras que en las segundas, se restituyen las condiciones de deformación en los apoyos. También se puede ver la simplicidad del Método de Newmark en comparación con los métodos analíticos, sobre todo para cargas irregulares. La resolución de este problema por alguno de los métodos anteriores conduce a ecuaciones y cálculos muy complicados, ya que la ecuación del diagrama de momentos y la de *M/EI* son funciones difíciles de operar.

## EJEMPLO 3.10. CÁLCULO DE LAS DEFLEXIONES EN UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA CON CARGA TRIANGULAR. MÉTODO DE NEWMARK



## Ejemplo 3.11

La viga de este ejemplo tiene un extremo empotrado y una articulación interior. Para el cálculo de fuerzas cortantes y momentos, se tienen como valores conocidos el de la fuerza cortante en el tramo 1-2, que es igual a la carga aplicada en el extremo del voladizo, el momento en la articulación, sección 3, que es nulo, y el momento en el extremo del voladizo que también es nulo. Estos valores se han encerrado en un cuadro, para indicar que son definitivos, y se han marcado con los pequeños números 1, 2 y 3, respectivamente. Si ahora se suma al momento cero en la sección 1, el valor de $\overline{V}$ en el tramo 1-2, se obtiene el valor de $M = -5$ en la sección 2, que también se ha encerrado en un cuadro. Si los valores de $M$ en las secciones 2 y 3 son –5 y 0, respectivamente, el valor de $\overline{V}$ en la sección 2-3 tiene que ser +5, ya que sólo así se puede pasar de $M = -5$ en la sección 2 a $M = 0$ en la sección 3. Ya teniendo este valor de $\overline{V}$ en el tramo 2-3, se puede completar el renglón 3 de la tabla sumando las cargas de izquierda a derecha; por ejemplo, el valor de –5 en el tramo 3-4 es la suma de +5 en el tramo 2-3 y la carga de –10 en la sección 3. Y ya teniendo completo el renglón 3, se puede completar también el renglón 4 sumando los valores de $\overline{V}$ a partir del momento en la sección 3. De esta manera ya se tiene el diagrama de momentos.

El renglón 5 de curvaturas tiene los mismos valores del renglón de momentos, ya que $EI$ es constante. Debe observarse que este diagrama es lineal, porque las cargas son concentradas, así que los ángulos equivalentes $\overline{\alpha}$ del renglón 6 se deben calcular con las ecuaciones 3.27 y 3.28. Aquí se han calculado a ambos lados de cada sección, para obtener todas las rotaciones y porque hay una discontinuidad angular en la articulación interior. Por ejemplo, el valor de –20 a la derecha de la sección 4 se calculó como:

$$\overline{\alpha_{4,5}} = \frac{3}{6}\left[2(-5) + 1(-10)\right] = \frac{3}{6}(-20)$$

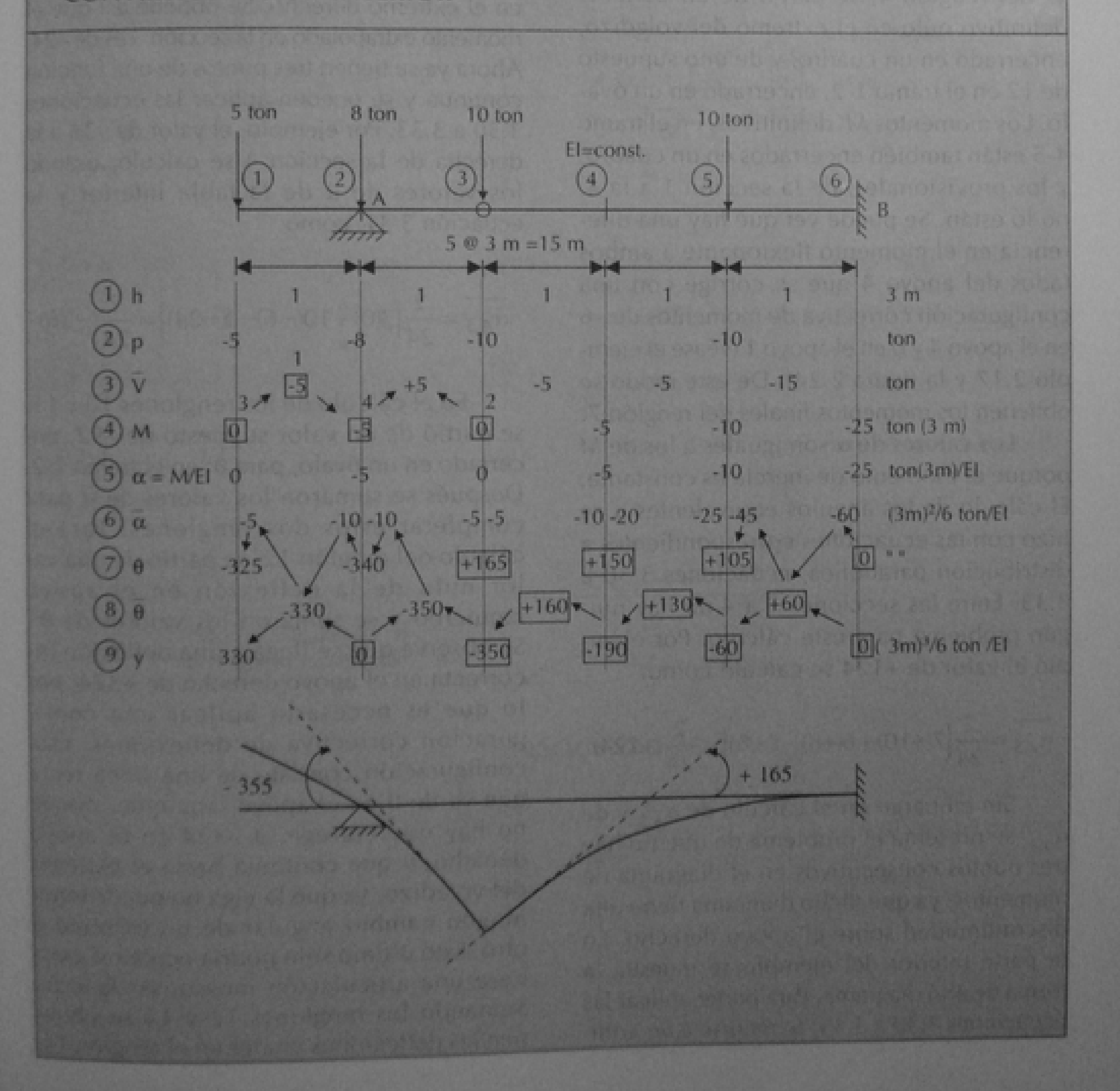
Los renglones 7 y 8 pueden iniciarse con el valor de $\theta = 0$ en el empotramiento, sección 6. Después se van sumando los valores de $\overline{\alpha}$ de derecha a izquierda cambiándoles el signo. De esta manera se pueden completar dichos renglones hasta el valor de $\theta$ en la sección 3 y de $\overline{\theta}$ en el tramo 3-4. No es posible continuar sumando hacia la izquierda porque, como ya se dijo, hay una discontinuidad angular en la articulación localizada en la sección 3. Lo que sí se puede hacer es empezar a calcular los valores de las deflexiones, renglón 9, empezando con $y = 0$ en el empotramiento. Sumando los valores de $\overline{\theta}$ de derecha a izquierda, se puede llegar hasta el valor de $y$ en la sección 3; todos estos valores se han encerrado en un cuadro. Ahora bien, se sabe que $y = 0$ en el apoyo de la sección 2. Entonces, a partir de los valores de $y$ en las secciones 2 y 3 se puede obtener el valor de $\overline{\theta}$ en el tramo 2-3, el cual debe ser de –350. Teniendo este valor ya se pueden completar los renglones 7 y 8 sumando los valores de $\overline{\alpha}$ de derecha a izquierda con signo cambiado. Finalmente, se puede obtener el valor de $y$ en el extremo del voladizo, sumando el valor de $\overline{\theta}$ en el tramo 1-2 al valor nulo de $y$ en el apoyo de la sección 2.

En la parte inferior del ejemplo se muestra la forma de la viga deformada, en la que puede verse la discontinuidad angular en la articulación. Nótese que el valor de $\theta = +165$ corresponde al lado derecho de la articulación, ya que se calculó sumando los valores de $\overline{\alpha}$ de derecha a izquierda desde el empotramiento. El valor de $\theta$ a la izquierda de la articulación se obtiene sumando al valor de $\overline{\theta}$ en el tramo 2-3, el de $\overline{\alpha}$ a la izquierda de la sec-

ción 3. Estos valores de θ se han señalado en la figura de la parte inferior del ejemplo. Obsérvese que los signos están de acuerdo con la convención empleada.

Es importante observar en este ejemplo que no fue necesario introducir configuraciones correctivas ni para el cálculo de cortantes y momentos, ni para el de rotaciones y deflexiones. Las condiciones de apoyo y de deformación permitieron completar el cálculo sin estas configuraciones. Esto no siempre es posible, por lo que cada caso particular deberá analizarse con el fin de determinar si es necesario introducirlas y cómo deben ser.

## EJEMPLO 3.11. CÁLCULO DE ROTACIONES Y DEFORMACIONES EN UNA VIGA CON ARTICULACIÓN INTERIOR



**Ejemplo 3.12**

La carga de esta viga es uniformemente distribuida, por lo que las cargas concentradas equivalentes del renglón 3 se calcularon con las ecuaciones 2.23 y 2.21, para las secciones 1 y 5, y con la ecuación 2.22 para las secciones 2, 3 y4, ya que en éstas se calculó la carga total.

Para el cálculo de las fuerzas cortantes $V'$ del renglón 4, se partió de un cortante definitivo nulo en el extremo del voladizo, encerrado en un cuadro, y de uno supuesto de 12 en el tramo 1-2, encerrado en un óvalo. Los momentos $M'$ definitivos, en el tramo 4-5 están también encerrados en un cuadro, y los provisionales, de la sección 1 a la 4, no lo están. Se puede ver que hay una diferencia en el momento flexionante a ambos lados del apoyo 4 que se corrige con una configuración correctiva de momentos de −6 en el apoyo 4 y 0 en el apoyo 1 (véase el ejemplo 2.17 y la figura 2.24). De este modo se obtienen los momentos finales del renglón 7.

Los valores de $\alpha$ son iguales a los de $M$ porque el momento de inercia es constante. El cálculo de los ángulos equivalentes $\overline{\alpha}$ se hizo con las ecuaciones correspondientes a distribución parabólica, ecuaciones 3.30 a 3.33. Entre las secciones 1 a 4 no hay ningún problema para este cálculo. Por ejemplo el valor de +124 se calculó como:

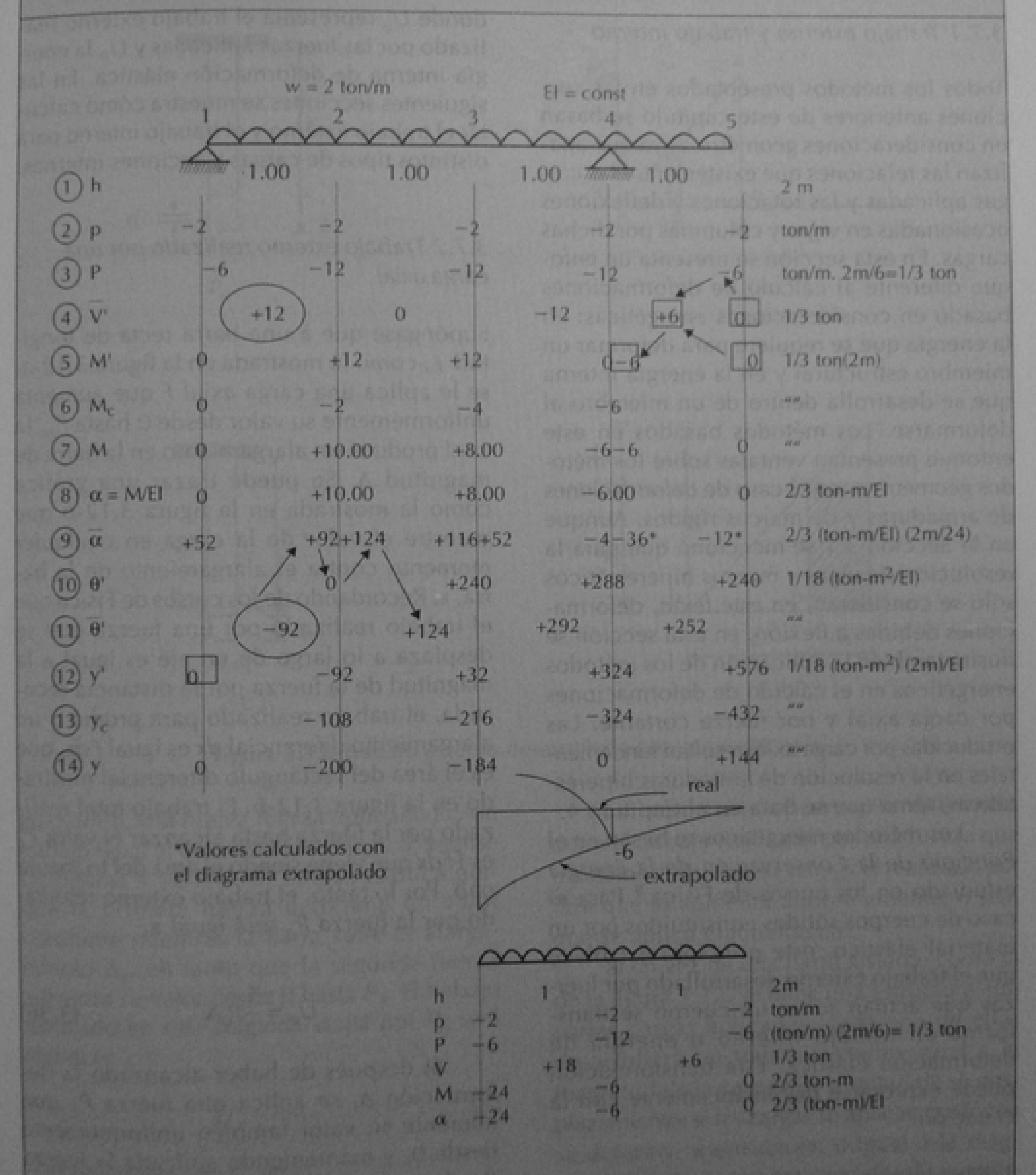
$$\overline{\alpha_{2,3}} = \frac{2}{24}\left[7(+10) + 6(+8) - 1(-6)\right] = \frac{2}{24}(+124)$$

Sin embargo en el cálculo de $\overline{\alpha_{4,5}}$ y de $\overline{\alpha_{5,4}}$ se presenta el problema de que no hay tres puntos consecutivos en el diagrama de momentos, ya que dicho diagrama tiene una discontinuidad sobre el apoyo derecho. En la parte inferior del ejemplo se muestra la forma de este diagrama. Para poder aplicar las ecuaciones 3.30 a 3.33, se recurre a un artificio que consiste en extrapolar el diagrama de momentos hacia la izquierda de la sección 4, como se muestra también en el croquis de la parte inferior. Para hacer esta extrapolación, se supone que el apoyo se recorre a la sección 3, y se trata la viga como un voladizo de las secciones 3 a 5. Esto se muestra en la tabla de la parte inferior, en la que se calculan las cargas equivalentes $P$; las fuerzas cortantes $V$, empezando con 0 en el extremo derecho; y los momentos $M$, empezando también con 0 en el extremo derecho. Se obtiene así que el momento extrapolado en la sección 3 es de −24. Ahora ya se tienen tres puntos de una función continua y se pueden aplicar las ecuaciones 3.30 a 3.33. Por ejemplo, el valor de −36 a la derecha de la sección 4 se calculó, usando los valores de $\alpha$ de la tabla inferior y la ecuación 3.31, como:

$$\overline{\alpha_{4,5}} = \frac{2}{24}\left[3(0) + 10(-6) - 1(-24)\right] = \frac{2}{24}(-36)$$

En el cálculo de los renglones 10 y 11, se partió de un valor supuesto de −92, encerrado en un óvalo, para $\theta'$ en el tramo 1-2. Después se sumaron los valores de $\overline{\alpha}$ para completar estos dos renglones. Para el cálculo del renglón 12, se partió de una valor nulo de la deflexión en el apoyo izquierdo y se sumaron los valores de $\theta'$. Se observa que se llega a una deflexión incorrecta en el apoyo derecho de +324, por lo que es necesario aplicar una configuración correctiva de deflexiones. Esta configuración consiste de una línea recta que va de 0 en el apoyo izquierdo, donde no hay que corregir, a −324 en el apoyo derecho, y que continúa hasta el extremo del voladizo, ya que la viga no puede tener ningún cambio angular de un extremo a otro. Esto último sólo podría ocurrir si existiese una articulación interior en la viga. Sumando los renglones 12 y 13 se obtienen las deflexiones finales en el renglón 14.

## EJEMPLO 3.12 CÁLCULO DE LAS DEFLEXIONES EN UNA VIGA CON DOS APOYOS Y UN VOLADIZO, MÉTODO DE NEWMARK



## 3.7 Cálculo de deformaciones por métodos energéticos

### 3.7.1 Trabajo externo y trabajo interno

Todos los métodos presentados en las secciones anteriores de este capítulo se basan en consideraciones geométricas ya que analizan las relaciones que existen entre las cargas aplicadas y las rotaciones y deflexiones ocasionadas en vigas y columnas por dichas cargas. En esta sección se presenta un enfoque diferente al cálculo de deformaciones basado en consideraciones energéticas: en la energía que se requiere para deformar un miembro estructural y en la energía interna que se desarrolla dentro de un miembro al deformarse. Los métodos basados en este enfoque presentan ventajas sobre los métodos geométricos en el caso de deformaciones de armaduras y de marcos rígidos. Aunque en la Sección 3.1 se mencionó que para la resolución de vigas y marcos hiperestáticos sólo se consideran, en este texto, deformaciones debidas a flexión, en esta sección se ilustra también la aplicación de los métodos energéticos en el cálculo de deformaciones por carga axial y por fuerza cortante. Las producidas por carga axial resultan fundamentales en la resolución de armaduras hiperestáticas, tema que se trata en el Capítulo 4.

Los métodos energéticos se basan en el *Principio de la Conservación de la Energía* estudiado en los cursos de Física.[9] Para el caso de cuerpos sólidos constituidos por un material elástico, este principio establece que el trabajo externo desarrollado por fuerzas que actúan sobre un cuerpo se transforma en trabajo interno o energía de deformación elástica. Esta transformación puede expresarse matemáticamente con la ecuación:

$$U_e = U_i \tag{3.35}$$

donde $U_e$ representa el trabajo externo realizado por las fuerzas aplicadas y $U_i$, la energía interna de deformación elástica. En las siguientes secciones se muestra cómo calcular el trabajo externo y el trabajo interno para distintos tipos de cargas y acciones internas.

### 3.7.2 Trabajo externo realizado por una carga axial

Supóngase que a una barra recta de longitud $\ell$, como la mostrada en la figura 3.12-a, se le aplica una carga axial $F$ que aumenta uniformemente su valor desde 0 hasta $P_0$, la cual produce un alargamiento en la barra de magnitud $\Delta$. Se puede trazar una gráfica como la mostrada en la figura 3.12-*b* que muestre el valor de la carga en cualquier momento contra el alargamiento de la barra, $x$. Recordando de los cursos de Física que el trabajo realizado por una fuerza que se desplaza a lo largo de un eje es igual a la magnitud de la fuerza por la distancia recorrida, el trabajo realizado para producir un alargamiento diferencial $dx$ es igual $Fdx$, que es el área del rectángulo diferencial mostrado en la figura 3.12-*b*. El trabajo total realizado por la fuerza hasta alcanzar el valor $P_0$ es $\int Fdx$ que viene siendo el área del triángulo *oab*. Por lo tanto, el trabajo externo realizado por la fuerza $P_0$ será igual a:

$$U_e = \frac{1}{2}P_0\Delta \tag{3.36}$$

Si después de haber alcanzado la deformación $\Delta$, se aplica otra fuerza $P_1$ que aumente su valor también uniformemente desde 0, y manteniendo aplicada la fuerza $P_0$, de tal manera que se produzca una deformación adicional $\Delta_1$, la fuerza $P_0$ realizará un trabajo externo igual al área del rectán-

[9] Véase, por ejemplo, Félix, Oyarzábal y Velasco, "Lecciones de Física", CECSA, 1972, México, pp. 169-177.

**Figura 3.12.** Trabajo externo desarrollado por una carga axial

gulo *adeb*, y la nueva fuerza aplicada $P_1$, un trabajo igual al área del triángulo *acd*; véanse las figuras 3.12-*c* y –*d*. Esto se explica porque la primera fuerza mantiene un valor constante mientras la barra sufre el alargamiento $\Delta_1$, en tanto que la segunda fuerza aumenta su valor desde 0 hasta $P_1$. El trabajo realizado en esta segunda etapa por $P_0$ será entonces

$$U'_e = P_0\Delta_1 \qquad (3.37)$$

y el realizado por $P_1$ será:

$$U'_e = \frac{1}{2}P_1\Delta_1 \qquad (3.38)$$

Es importante observar la diferencia entre el trabajo realizado por una fuerza que mantiene constante su valor, y el realizado por otra que lo aumenta uniformemente, o sea, que se aplica gradualmente.

Si en vez de una barra aislada, como la de la figura 3.12, se tiene una estructura con varias cargas aplicadas, cada una de ellas desarrollará un trabajo externo igual a la magnitud de la carga por la mitad de su desplazamiento, si las cargas se aplican conforme se deforma la estructura; o igual a la magnitud de la carga por todo el desplazamiento, si las cargas se aplican previamente al desplazamiento.

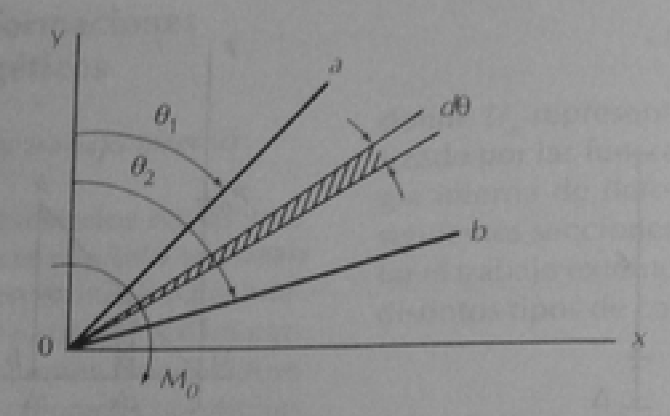



**Figura 3.13.** Trabajo externo desarrollado por un momento

### 3.7.3 Trabajo externo realizado por un momento

Supóngase ahora que una recta *oa*, figura 3.13, se hace girar por la acción de un momento $M$ hasta la posición *ob*, de tal manera que $M$ aumenta uniformemente desde 0 hasta $M_0$. Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, el trabajo realizado por el momento será igual a:

$$U_e = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} M_0 \theta \qquad (3.39)$$

Si después se aplica otro momento $M_1$ que produzca una rotación adicional $\theta_1$, manteniendo constante el valor de $M_0$, el trabajo realizado por $M_0$ será:

$$U'_e = M_0 \theta_1 \qquad (3.40)$$

y el realizado por $M_1$ será:

$$U''_e = \frac{1}{2} M_1 \theta_1 \qquad (3.41)$$

Si en una estructura existen varios momentos aplicados, el trabajo externo total será la suma de los trabajos desarrollados por cada uno de ellos.

### 3.7.4 Trabajo interno en una barra bajo carga axial

En las dos secciones anteriores se han establecido ecuaciones para calcular el trabajo externo. En ésta y en la siguiente se establecerán ecuaciones para calcular el trabajo interno $U_i$. Si la barra de la figura 3.12-a tiene una sección transversal de área $A$, la fuerza axial $P_0$ producirá esfuerzos axiales de magnitud $\sigma = P_0 / A$. Si el material es elástico, como se ha venido suponiendo, estos esfuerzos causarán deformaciones unitarias $\varepsilon = \sigma / E$. Sustituyendo el valor de $\sigma$, se obtiene $\varepsilon = P_0/AE$. El alargamiento total de la barra, $\Delta$, es igual a la deformación unitaria, $\varepsilon$, multiplicada por la longitud inicial, $\ell$. Sustituyendo el valor de $\varepsilon$ ya calculado se obtiene:

$$\Delta = \frac{P_0 \ell}{AE} \qquad (3.42)$$

Sustituyendo este valor de $\Delta$ en la ecuación 3.36 y tomado en cuenta que según la ecuación 3.35 el trabajo interno es igual al externo, se llega a la siguiente expresión para calcular el trabajo interno o energía elástica de deformación en una barra sometida a carga axial:

$$U_i = \frac{P_0^2 \ell}{2AE} \qquad (3.43)$$

Si una estructura está constituida por varias barras sujetas a carga axial, como una armadura, el trabajo interno total será la suma de los trabajos internos de cada barra, lo cual puede expresarse como:

$$U_i = \sum \frac{P_o^2 \ell}{2AE} \qquad (3.44)$$

### *3.7.5 Trabajo interno en un elemento sujeto a flexión*

Al plantear la Teoría de la Viga Elástica en la Sección 3.2, con referencia a la figura 3.3, se obtuvo la ecuación 3.17 que se reproduce a continuación:

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx \qquad (3.17)$$

Sustituyendo este valor de $\theta$ en la ecuación 3.39, considerando que el momento aplicado es $M$ (función de $x$),que la integración debe hacerse a todo lo largo de la viga de la figura 3.3-*a*, y que el trabajo interno es igual al externo:

$$U_i = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (3.45)$$

Esta ecuación permite calcular la energía elástica de deformación en una viga o en una columna sujetas a flexión. Si una estructura tiene varias vigas o varias columnas, el trabajo interno total será la suma de los trabajos internos de todos los miembros.

Las expresiones obtenidas para calcular el trabajo externo desarrollado por fuerzas y momentos, y el trabajo interno o energía de deformación acumulada en elementos sujetos a carga axial y a momento flexionante, permiten plantear métodos para el cálculo de rotaciones y deflexiones. Los métodos estudiados generalmente son tres: el llamado método del principio del trabajo y la energía, en el que sencillamente se igualan el trabajo externo y el interno; el método del principio del trabajo virtual, en el que se introduce una fuerza ficticia; y el método basado en el Primer Teorema de Castigliano. El segundo es el más sencillo y el más usado en la práctica, por lo que es el presentado con mayor detalle en este texto. Sin embargo, el conocimiento de los otros dos métodos es importante para comprender la amplia aplicación de los métodos energéticos en el análisis estructural.

### *3.7.6 Método del Principio del Trabajo y la Energía*

En este método se plantea una ecuación que exprese el trabajo realizado por una carga, que es el trabajo externo, y otra que exprese el trabajo desarrollado internamente. La primera queda en función de la deflexión en el punto de aplicación de la carga, y la segunda, en función del momento flexionante o de las cargas axiales producidas por la fuerza aplicada. Al igualar ambos trabajos, queda una ecuación cuya incógnita es la deflexión buscada. A continuación se ilustra con un ejemplo.

**Ejemplo 3.13**

Se calcula la deflexión en el centro del claro de una viga libremente apoyada con una carga concentrada en el mismo punto. El trabajo externo es el desarrollado por la carga concentrada al deformarse la viga. Por analogía con lo que sucede en una barra con carga axial (sección 3.7.2), el trabajo externo es igual a la magnitud de la carga por la distancia que recorre, o sea, $^1/_2\ P\Delta$.

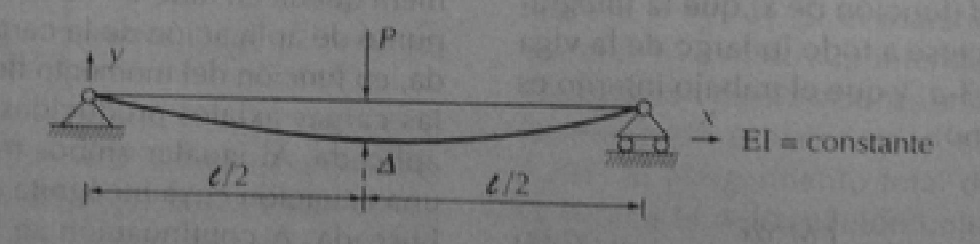
El trabajo interno se calcula con la ecuación 3.45. En cualquier sección de la viga

comprendida entre el apoyo de la izquierda y el centro del claro, el momento flexionante es igual a la reacción, $P/2$, multiplicada por la distancia $x$ al apoyo. La integración se hizo entre el apoyo y el centro del claro y, por simetría, se duplicó para obtener el trabajo en toda la viga. Si la carga no hubiese estado en el centro del claro, se integraría por separado entre el apoyo izquierdo y el punto de aplicación de la carga, y entre este punto y el apoyo derecho; o bien, se hubiese cambiado el origen de coordenadas al apoyo derecho. Finalmente se igualaron el trabajo externo y el interno y se despejó el valor de la deflexión $\Delta$.

Se puede ver en este ejemplo que el método que se está ilustrando tiene limitaciones importantes. Si la viga hubiese tenido varias cargas aplicadas, al calcular el trabajo externo hubiesen aparecido varias incógnitas, las deflexiones bajo cada una de las cargas, y el problema resultaría irresoluble. También hay que observar que sólo permite calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga. Por estas razones es un método poco usado en la práctica. Sin embargo, permite visualizar claramente el fundamento de los métodos energéticos.

**EJEMPLO 3.13. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN EL CENTRO DE UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA POR EL MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA**

DATOS:




TRABAJO EXTERNO:

$$U_e = \frac{1}{2}P\Delta$$

TRABAJO INTERNO:

$$U_i = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad \text{(ecuación 3.45)}$$

$$M = \frac{P}{2}x \qquad (0 \leq x \leq \ell/2$$

**EJEMPLO 3.13** ***(continuación)***

$$U_i = 2\int_0^{\ell/2} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)^2 x^2 dx}{2EI}$$

$$U_i = \frac{1}{4}\frac{P^2}{EI}\int_0^{\ell/2} x^2 dx = \frac{1}{4}\frac{P^2}{EI}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\ell/2}$$

$$U_i = \frac{1}{96}\frac{P^2}{EI}\ell^3$$

IGUALANDO EL TRABAJO EXTERNO Y EL INTERNO

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{1}{96}\frac{P^2}{EI}\ell^3$$

$$\Delta = \frac{1}{48}\frac{P\ell^3}{EI}$$

### *3.7.7 Método del Principio del Trabajo Virtual*

Este es el método más general y más usado en la práctica. Se puede aplicar a cualquier tipo de estructuras, permite calcular deflexiones y rotaciones sin aumentar mucho la labor numérica, y también se pueden obtener con su aplicación las deformaciones causadas por efectos de cambios de temperatura o defectos de construcción. Se llama del trabajo virtual porque se fundamenta, como se verá a continuación, en la aplicación a la estructura de una carga virtual, o sea, inexistente en la realidad, y en el cálculo del trabajo desarrollado por esta carga virtual.

Supóngase un cuerpo de forma cualquiera, como el mostrado con línea llena en la figura 3.14-a, al que se aplican gradualmente cargas concentradas, *P*, en varios puntos *A*, *B*, *C*, de tal manera que lo deforman hasta adquirir la silueta mostrada con línea punteada en la misma figura. Estas fuerzas externas producen fuerzas internas en el cuerpo, que se denominarán fuerzas *S*, que se muestran en la figura actuando sobre un elemento de longitud $\ell$, el cual se deforma por la acción de estas fuerzas. Supóngase también que se desea calcular la deflexión en otro punto cualquiera, *D*, del cuerpo mostrado.

Se calcularán primero el trabajo externo de las fuerzas *P* y el trabajo interno de las fuerzas *S* en el cuerpo de la figura 3.14-a. El primero, de acuerdo con lo expuesto en la Sección 3.7.2, será:

$$U_{ea} = \frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C \quad (3.46)$$

y el trabajo interno, de acuerdo con la Sección 3.7.4, será:

$$U_{ia} = \sum \frac{1}{2} S\,(d\ell) \quad (3.47)$$

Igualando los trabajos externo e interno:

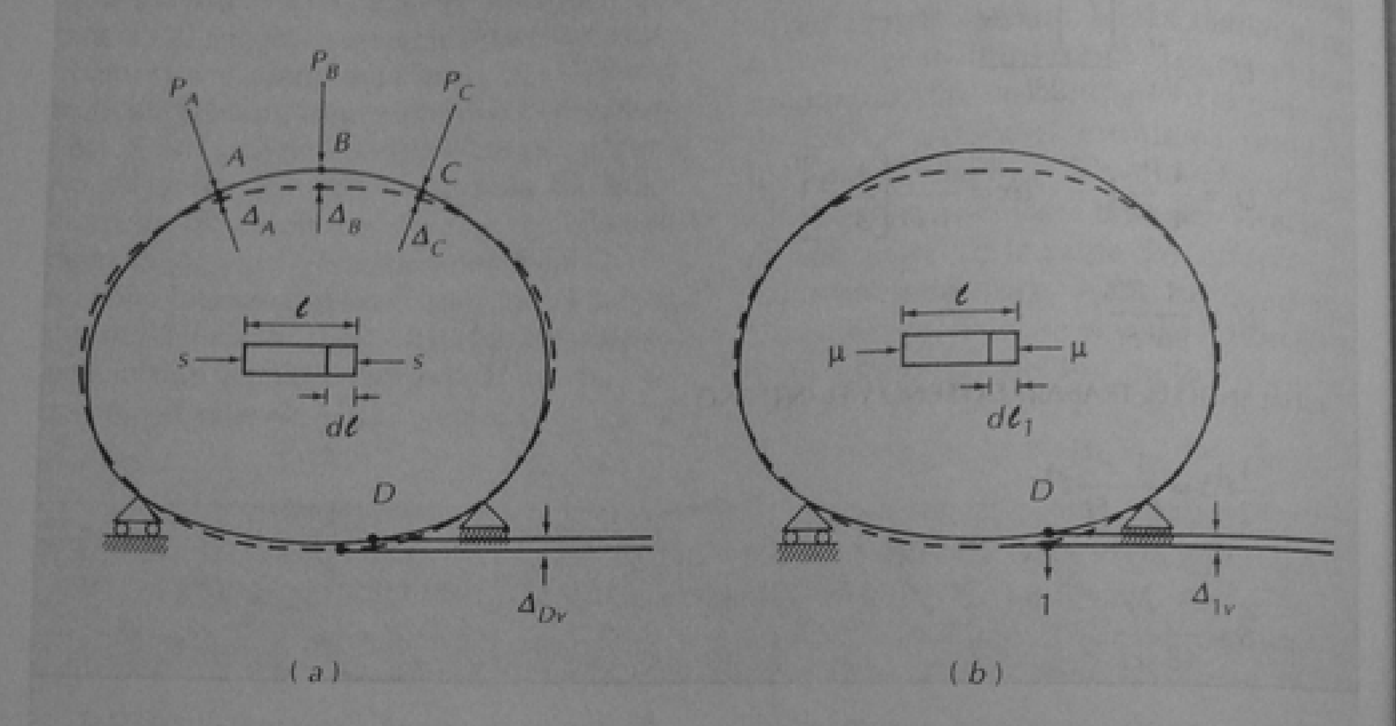



**Figura 3.14.** Principio del trabajo virtual en un cuerpo cualquiera

$$\frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C = \frac{1}{2}\sum S(d\ell) \tag{3.48}$$

Supóngase ahora que al mismo cuerpo se le aplica, también gradualmente, una carga virtual en el punto en el que se desea calcular la deflexión, en este caso, en el punto *D*. Esta carga puede tener cualquier valor, pero por conveniencia se hace unitaria. Su dirección debe ser la misma que la dirección en que se desea conocer la deflexión del punto. Así, si se desea conocer la componente vertical de la deflexión en *D*, señalada como $\Delta_{Dv}$ en la figura 3.14-*a*, la carga virtual unitaria se aplica en dirección vertical, como se muestra en la figura 3.14-*b*. La carga virtual produce fuerzas virtuales en el interior del cuerpo que se han denominado fuerzas $\mu$ en la figura mencionada. De la misma manera que se hizo para el caso de la figura 3.14-*a*, se pueden igualar el trabajo externo de la carga virtual unitaria y el trabajo interno de las fuerzas $\mu$. Se obtiene:

$$\frac{1}{2}(1)(\Delta_{1v}) = \frac{1}{2}\sum \mu(d\ell_1) \tag{3.49}$$

Sumando los trabajos externos correspondientes a las figuras 3.14-*a* y -*b*, e igualando la suma a la de los trabajos internos, o sea, sumando los primeros miembros de las ecuaciones 3.48 y 3.49, e igualando la suma a la de los segundos miembros, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(P_A\Delta_A + P_B\Delta_B + P_C\Delta_C) + \frac{1}{2}(1)(\Delta_{1v}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum S(d\ell) + \frac{1}{2}\sum \mu(d\ell_1) \tag{3.50}$$

Ahora, aplíquese primero la carga virtual unitaria, como en la figura 3.14-*b*, y man-

teniendo constante esta carga, aplíquense gradualmente las cargas $P$ de la figura 3.14-*a*. Calculando los trabajos externos e internos para estas dos etapas e igualándolos se obtiene:

$$\frac{1}{2}(1)(\Delta_{1v}) + \frac{1}{2}(P_A\Delta_A + P_B\Delta_B + P_C\Delta_C) + (1)(\Delta_{Dv})$$

$$= \frac{1}{2}\sum \mu\,(d\ell_1) + \frac{1}{2}\sum S\,(d\ell) + \sum \mu\,(d\ell) \quad (3.51)$$

Obsérvese que el término $(1)(\Delta_{Dv})$ que aparece al final del primer miembro de esta ecuación expresa el trabajo realizado por la carga virtual unitaria mientras se aplican las cargas $P$. Restando el primer miembro y el segundo miembro de la ecuación 3.50 de los correspondientes miembros de la ecuación 3.51, se obtiene la siguiente ecuación fundamental del método del trabajo virtual:

$$(1)(\Delta_{Dv}) = \sum \mu(d\ell) \quad (3.52)$$

Esta ecuación permite calcular la deflexión buscada $\Delta_{Dv}$ como la suma de los productos de las fuerzas $\mu$, producidas por la carga virtual unitaria, y las deformaciones axiales $d\ell$ producidas por las fuerzas externas $P$. En las siguientes secciones se mostrará cómo calcular estas fuerzas y deformaciones para distintos tipos de estructuras. Antes debe observarse que la carga virtual puede colocarse en cualquier punto y en cualquier dirección del cuerpo, lo que permite calcular la deflexión también en cualquier punto y dirección. También debe notarse que la carga virtual puede tener cualquier unidad (kg, kN, lb, etc.), pues como la unidad que se escoja aparece en ambos miembros de la ecuación 3.52, se elimina. Por esta razón se suele no asignarle ninguna unidad en los cálculos. La carga virtual puede sustituirse por un momento virtual, y entonces se obtendrán las rotaciones en cualquier punto del cuerpo en que se coloque el momento. La ecuación correspondiente queda en la forma:

$$(1)(\theta_D) = \sum \mu(d\ell) \quad (3.53)$$

donde $\theta_D$ representa la rotación en un punto cualquiera $D$.

## DEFLEXIONES EN ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

En esta sección se muestra cómo pueden calcularse las deflexiones en armaduras producidas por cargas aplicadas, por cambios de temperatura en los miembros o por defectos de fabricación debido a los cuales las longitudes de los miembros no sean iguales a las teóricas.

Supóngase que en la armadura de la figura 3.15-*a*, sujeta a cargas cualesquiera $P_1$, $P_2$ y $P_3$, se desea calcular la deflexión vertical en el nudo $L_1$ y la deflexión o desplazamiento horizontal del nudo $U_1$. Para el primer caso, siguiendo el procedimiento general planteado en la sección anterior, se aplica una carga virtual unitaria vertical en el nudo $L_1$, como se indica en la figura 3.15-*b*, y se utiliza la ecuación 3.52 para calcular la deflexión buscada. Con relación a esta ecuación, $\Delta_{Dv}$ será la deflexión en $L_1$ ya que en este punto se colocó la carga virtual; $\mu$ serán los esfuerzos producidos por la carga unitaria en los miembros de la armadura, equivalentes a los de la figura 3.14-*b*; $d\ell$ serán las deformaciones axiales en cada miembro de la armadura, ya que dichos miembros son equivalentes a los elementos de longitud $\ell$ de la figura 3.14; y la sumatoria $\Sigma$ se lleva a través de todos los miembros de la armadura. Los esfuerzos $\mu$ se pueden calcular resolviendo la armadura de la figura 3.15-*b* por el método de los nudos o el de las secciones (véase la Sección 2.8), sin que sea necesario asignarle una unidad específica a la carga

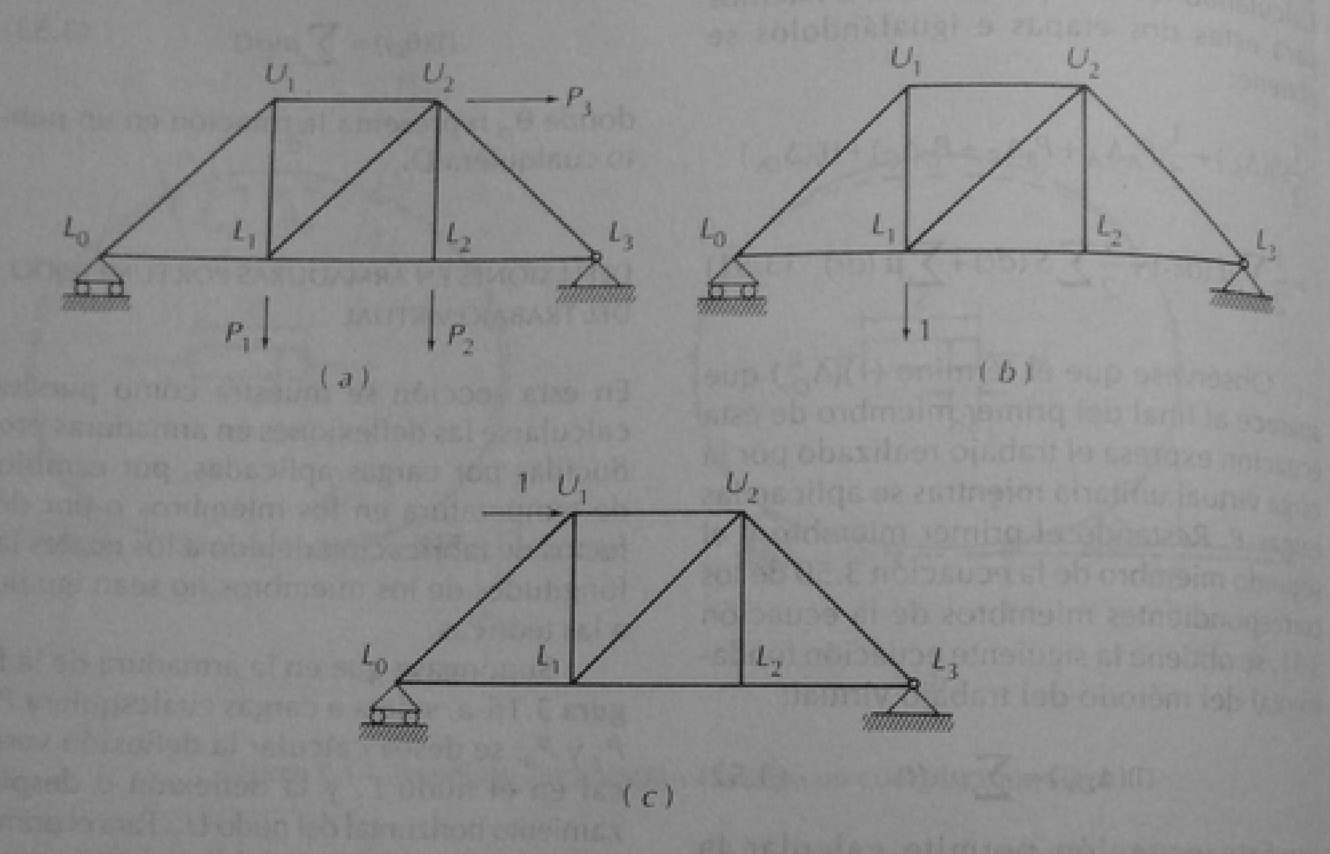



**Figura 3.15.** Deflexiones en armaduras producidas por cargas

virtual, como kilogramos o toneladas. Y las deformaciones $d\ell$ en cada miembro se pueden calcular con la ecuación 3.42 de la Sección 3.7.4, observando que el término $\Delta$ de dicha ecuación equivale al término $d\ell$ de la figura 3.14 (es la deformación axial de un elemento); que la carga $P_0$ equivale a las fuerzas $S$ producidas por las cargas en cada miembro de la armadura, las cuales pueden calcularse, por lo tanto, resolviendo la armadura de la figura 3.15-*a*; que el término $A$ viene siendo el área de la sección transversal de cada miembro de la armadura; y el término $E$, el módulo de elasticidad correspondiente. Haciendo las equivalencias mencionadas, la ecuación general 3.52 se transforma en la siguiente ecuación para calcular deflexiones en armaduras producidas por cargas:

$$\Delta = \sum \frac{\mu S \ell}{AE} \tag{3.54}$$

donde, resumiendo lo explicado anteriormente:

- $\Delta$, deflexión en el punto de aplicación de la carga virtual unitaria, en la dirección de la carga;
- $\mu$, fuerzas producidas por la carga virtual unitaria en los miembros de la armadura (figura 3.15-*b*);
- $S$, fuerzas producidas por las cargas reales en los miembros de la armadura (figura 3.15-*a*);
- $\ell$, longitud de cada miembro;
- $A$, área de la sección transversal de cada miembro; y

$E_i$ módulo de elasticidad de cada miembro, que suele ser constante.

La sumatoria se hace para todos los miembros de la armadura.

La deflexión horizontal en el nudo $U_1$ se determina de manera semejante. En este caso, las fuerzas μ serán las producidas en los miembros de la armadura por la carga virtual mostrada en la figura 3.15-*c*. Las fuerzas *S* siguen siendo las producidas por las cargas reales de la figura 3.15-*a*. En ambos casos, el sentido de la carga virtual puede ser cualquiera. Si la sumatoria resulta positiva, el sentido escogido fue correcto y la deflexión tendrá también ese sentido. En caso contrario, la deflexión tendrá el sentido opuesto al asignado a la carga virtual. Si en un nudo dado se determinan la deflexión vertical y la horizontal, la resultante de ambas será la deflexión total en magnitud y dirección.

**Ejemplo 3.14**

Calcular la deflexión vertical y la deflexión horizontal en el nudo $L_4$ de la armadura mostrada. Se trata de determinar cuánto se desplaza verticalmente y horizontalmente el extremo de una armadura que trabaja en voladizo. Todas las barras del perímetro tienen un área de $2A_o$ mientras que las de la parte interior tienen un área de la mitad, es decir, un área de $A_0$.

En primer término se han calculado las fuerzas *S*, o sea, las fuerzas en cada barra producidas por las cargas reales que actúan sobre la armadura. Para hacer este cálculo, primero se determinaron las reacciones en los apoyos y después, por el método de los nudos, las fuerzas en cada barra. Se siguió el procedimiento de calcular las componentes vertical y horizontal de la fuerza total en cada barra. Para mayor claridad de la secuencia de cálculo, se han encerrado en un círculo las fuerzas conocidas en cada nudo. Por ejemplo, en el nudo $U_1$, que fue el primero que se resolvió, ya se conocían las reacciones en el apoyo, por suma de fuerzas horizontales igual a cero se determinó la componente horizontal en la barra $U_1$-$U_2$, después se calculó la componente vertical de acuerdo a la inclinación de la barra, y por último la fuerza en la barra $U_1$-$L_1$ por suma de fuerzas verticales igual a cero. Obsérvese que después de resolver los nudos $U_1$, $L_1$ y $L_2$ fue necesario pasar al nudo $L_4$ pues en los otros había más de dos incógnitas por nudo. En un croquis, al final de esta parte, se muestran todas las fuerzas *S*. Aquí ya se han colocado las fuerzas totales calculadas a partir de las componentes horizontal y vertical. Por ejemplo, la fuerza de 44.72 kN en la barra $U_1$-$U_2$ es la resultante de las componentes de 40 y 20 kN en el nudo $U_1$.

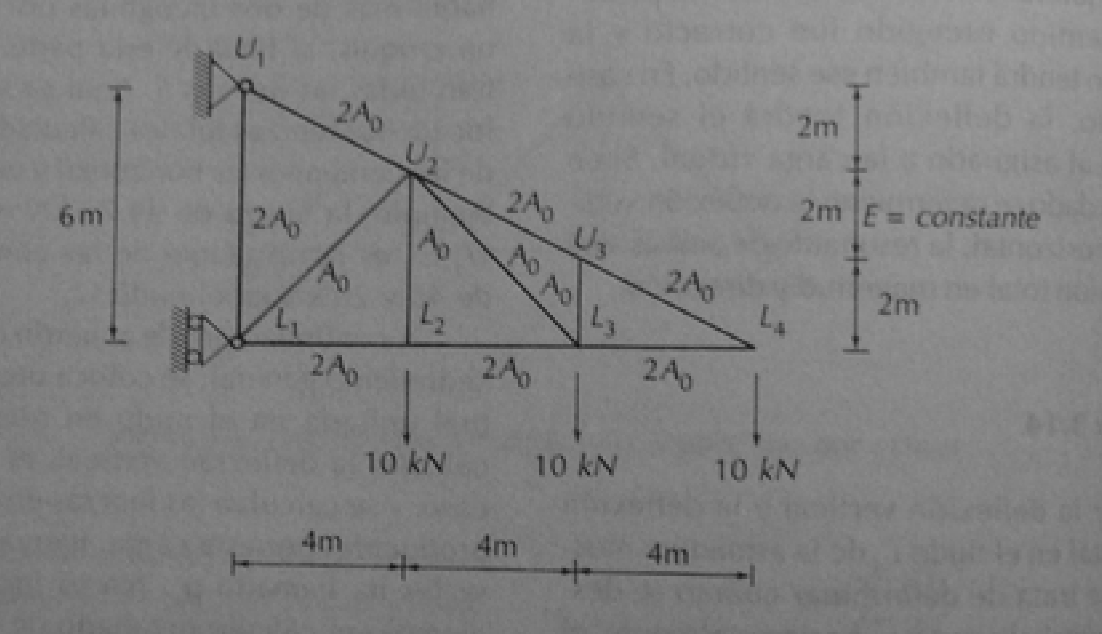
A continuación, de acuerdo con el procedimiento general, se coloca una carga virtual unitaria en el nudo en que se desea calcular la deflexión vertical, el $L_4$ en este caso, y se calculan las fuerzas en cada barra producidas por esta carga, fuerzas a las que se les ha llamado $\mu_v$. No se incluye en el ejemplo el cálculo detallado de las fuerzas $\mu_v$, pero en realidad es tan sencillo que puede hacerse mentalmente sobre el mismo croquis, ya que varias fuerzas resultan nulas. Después se hace lo mismo colocando una carga virtual unitaria horizontal en $L_4$, para calcular las fuerzas denominadas $\mu_h$ en el ejemplo.

Teniendo las fuerzas *S*, $\mu_v$ y $\mu_h$, se aplica la ecuación 3.54 para calcular las deflexiones, con las fuerzas $\mu_v$ para la deflexión vertical y con las fuerzas $\mu_h$ para la horizontal. Los cálculos se muestran en la tabla incluida al final del ejemplo, que es igual a la obtenida con una hoja de cálculo Excel. Con este programa resulta muy sencillo calcular las dos últimas columnas de la tabla, pero desde

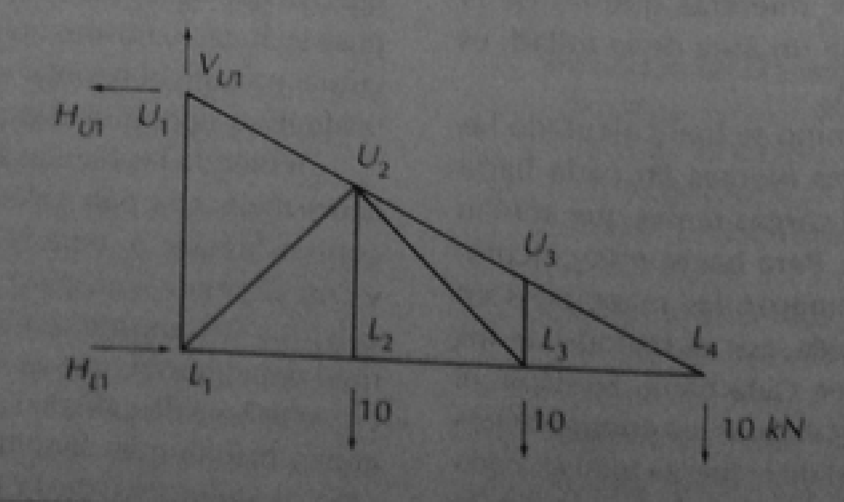
luego que el cálculo puede hacerse también manualmente. Obsérvese que las fuerzas de tensión en las barras de la armadura tienen signo positivo y las de compresión, signo negativo. El signo negativo en la sumatoria de la última columna indica que la deflexión es de signo contrario al de la carga virtual horizontal que se colocó en el nudo $L_4$, o sea, que el nudo se desplaza hacia la izquierda. Nótese también que los términos $A_0$ y $E$ quedan factorizados en los cálculos de la tabla. En caso de sustituirse por valores reales, el área deberá expresarse en $m^2$ y el módulo de elasticidad en $kN/m^2$.

## EJEMPLO 3.14. CALCULAR LA DEFLEXIÓN VERTICAL Y LA DEFLEXIÓN HORIZONTAL EN EL NUDO $L_4$ DE LA ARMADURA MOSTRADA

DATOS:




CÁLCULO DE FUERZAS S



**EJEMPLO 3.14** ***(continuación)***

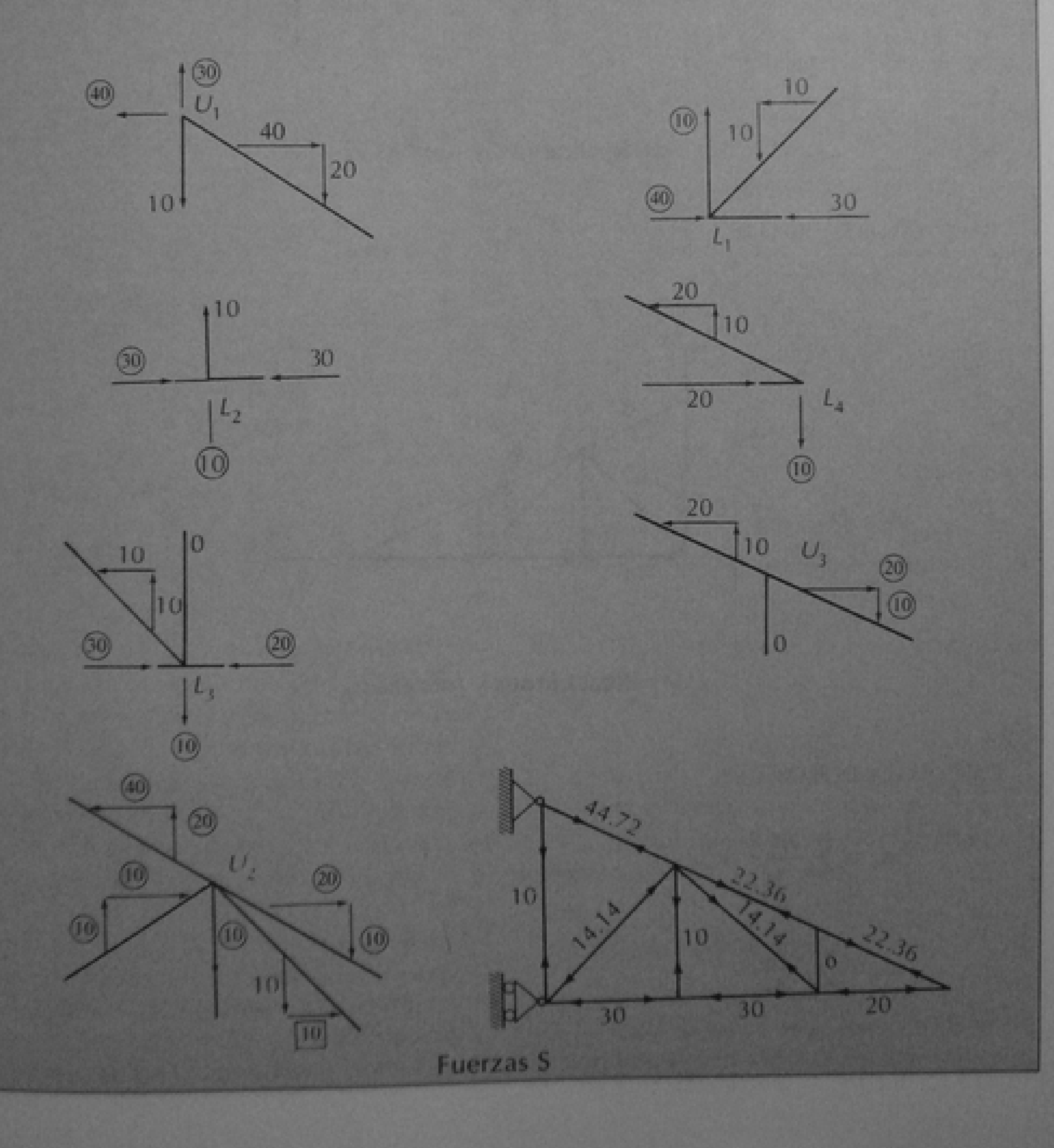
De $\Sigma F_y = 0$, $\quad V_{U1} = 30 \text{ kN} \uparrow$

De $\Sigma M_{L1} = 0$, $\quad -6\,H_{U1} + 10 \times 4 + 10 \times 8 + 10 \times 12 = 0$

$$H_{U1} = 40 \text{ kN} \leftarrow$$

De $\Sigma F_x = 0$, $\quad H_{L1} = 40 \text{ kN} \rightarrow$

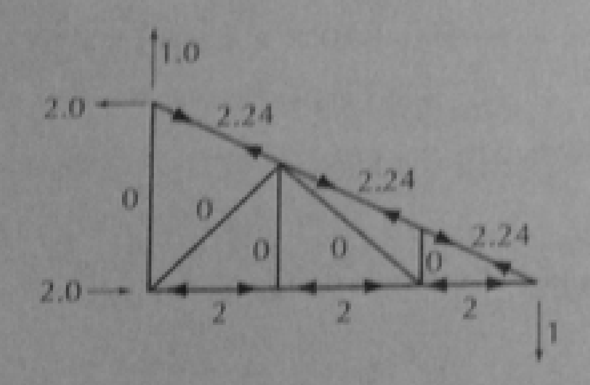
Se resuelve la armadura por el método de los nudos




**Fuerzas S**

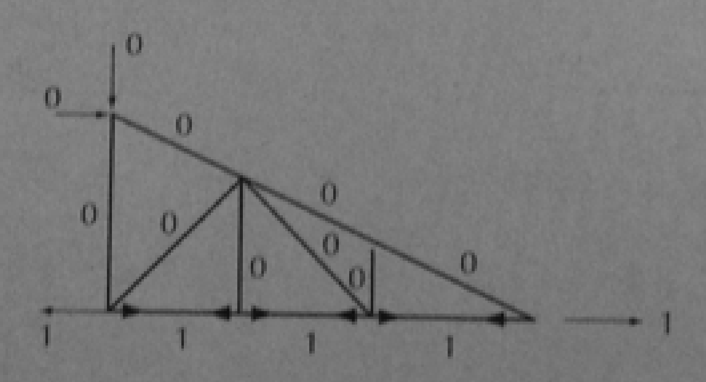
## EJEMPLO 3.14 *(continuación)*

CÁLCULO DE FUERZAS $\mu_V$




Reacciones y fuerzas $\mu_V$

CÁLCULO DE FUERZAS $\mu_H$




Reacciones y fuerzas $\mu_h$

CÁLCULO DE DEFLEXIONES

$$\Delta_V = \sum \frac{S\mu_V \ell}{AE}$$

$$\Delta_h = \sum \frac{S\mu_h \ell}{AE}$$

**EJEMPLO 3.14** ***(continuación)***

| MIEMBRO | $\ell$ (m) | $A_0$ | S (kN) | $\mu_v$ | $\mu_h$ | $S\mu_v \ell / A_0$ | $S\mu_h \ell / A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U1-U2 | 4.47 | 2 | 44.72 | 2.24 | 0 | 223.886208 | 0 |
| U2-U3 | 4.47 | 2 | 22.36 | 2.24 | 0 | 111.943104 | 0 |
| U3-L4 | 4.47 | 2 | 22.36 | 2.24 | 0 | 111.943104 | 0 |
| L1-L2 | 4 | 2 | –30 | –2 | 1 | 120 | –60 |
| L2-L3 | 4 | 2 | –30 | –2 | 1 | 120 | –60 |
| L3-L4 | 4 | 2 | –20 | –2 | 1 | 80 | –40 |
| U1-L1 | 6 | 2 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| L1-U2 | 5.66 | 1 | –14.14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| L2-U2 | 4 | 1 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| L3-U2 | 5.66 | 1 | 14.14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| L3-U3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| SUMAS | | | | | | 767.772416 | –160 |

$$\Delta_v = \frac{1}{A_0 E}(767.77) \downarrow \text{(m)}$$

$$\Delta_h = \frac{1}{A_0 E}(160) \leftarrow \text{(m)}$$

El cálculo de deflexiones producidas por cambios de temperatura en los miembros de una armadura puede hacerse de la siguiente manera. Si se examina el miembro de la derecha de la ecuación 3.52, puede verse que los esfuerzos $\mu$ se determinan, igual que en el caso anterior, colocando una carga virtual unitaria en el punto en el que se desea conocer la deflexión. El término $d\ell$ en este miembro es el alargamiento o el acortamiento que sufre cada barra de la armadura por el cambio de temperatura. Si se representa con la letra $\alpha$ el coeficiente de dilatación del material de la armadura y por $\Delta T$ el cambio de temperatura, la deformación de una barra será:

$$d\ell = (\alpha)(\Delta T)(\ell) \qquad (3.55)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 3.52 y llamándole $\Delta$ a la deflexión buscada se obtiene:

$$(1)(\Delta) = \sum (\mu)(\alpha)(\Delta T)(\ell) \qquad (3.56)$$

En algunas ocasiones, los miembros de una armadura se fabrican de una longitud

distinta a la correspondiente a una situación normal, bien sea por defectos de fabricación, o porque intencionalmente se desea dar una contraflecha a la armadura, como suele suceder en puentes. En estos casos, puede usarse también la ecuación 3.52, pero el valor de $d\ell$ será la diferencia entre el valor real de la longitud de cada miembro y su valor teórico.

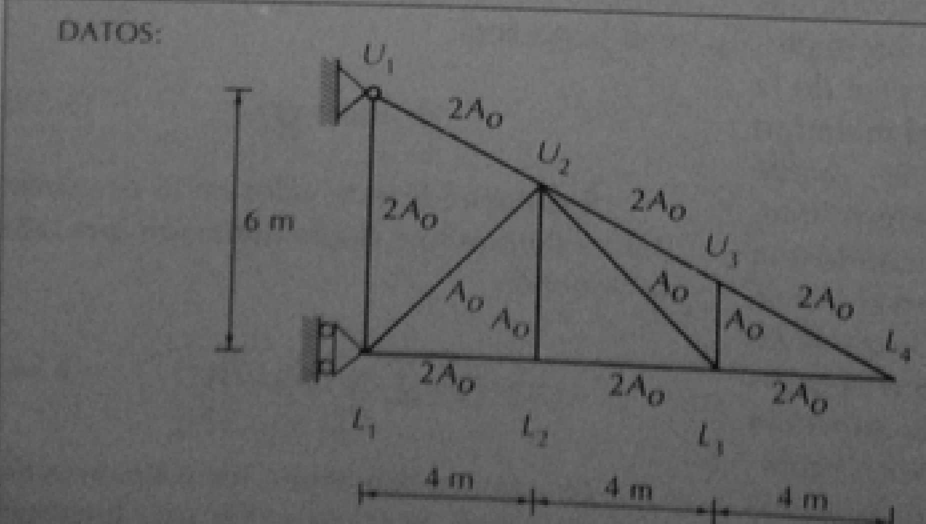
**Ejemplo 3.15**

En la misma armadura del ejemplo anterior ocurren los cambios de temperatura en los distintos miembros que se señalan en el enunciado, y se desea calcular la deflexión vertical que producen estos cambios en el extremo de la misma.

Como se desea calcular la deflexión vertical en el nudo $L_4$, en este nudo se coloca una carga virtual unitaria en dirección vertical. Los esfuerzos μ de la ecuación 3.56 son los producidos por esta carga virtual y coinciden con los esfuerzos $\mu_v$ calculados en el ejemplo anterior. El coeficiente de dilatación del acero, material con el cual está fabricada la armadura, es de $1.2 \times 10^{-5}$/°C, lo cual significa que por cada grado centígrado de cambio de temperatura el material sufre una deformación unitaria de $1.2 \times 10^{-5}$. Los valores de $\Delta T$ y de $\ell$ varían para los distintos miembros, por lo cual se hace una tabla semejante a la del ejemplo anterior. Obsérvese que los valores de las áreas de cada miembro y del módulo de elasticidad no intervienen en los cálculos. La sumatoria de la última columna de la tabla proporciona el valor del segundo miembro de la ecuación 3.54 y por lo tanto, la deflexión buscada. Obsérvese que como los esfuerzos μ no tienen unidades, según se ha explicado antes, la deflexión tiene las mismas unidades del término $\ell$. Nótese también que los cambios de temperatura en las barras interiores y en la barra $U_1$-$L_1$ no afectan a la deflexión en el extremo. Como el resultado es positivo, la deflexión tiene el mismo signo que la carga virtual aplicada, o sea, hacia abajo. El signo de $\Delta T$ es tal, que los incrementos de temperatura, que producen alargamiento, son positivos, igual que los esfuerzos de tensión.

**EJEMPLO 3.15. CALCULAR LA DEFLEXIÓN VERTICAL DEL NUDO $L_4$ DE LA ARMADURA DEL EJEMPLO ANTERIOR SI LAS CUERDAS INFERIOR Y SUPERIOR EXPERIMENTAN UN AUMENTO DE TEMPERATURA DE 40° C, LA CUERDA VERTICAL $U_1$ $L_1$ UN AUMENTO DE 10° C Y LAS CUERDAS INTERIORES UN AUMENTO DE 5° C. SUPÓNGASE QUE LAS CUERDAS DE LA PERIFERIA ESTÁN FORMADAS POR DOS ÁNGULOS DE LADOS IGUALES DE 51 × 6 MM Y LAS CUERDAS INTERIORES POR UN ÁNGULO DE LAS MISMAS DIMENSIONES**

DATOS:



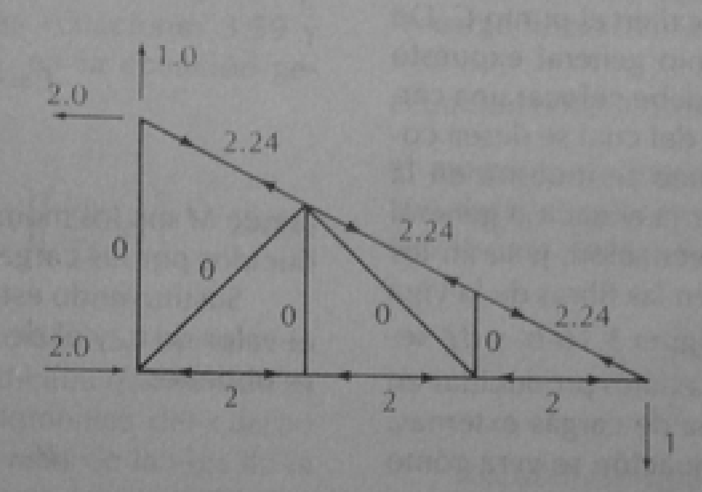

$A_0 = 6.06$ cm²

$\alpha = 1.2\ (10^{-5})$/°C

$E = 200\ 000$ MPa

**EJEMPLO 3.15 *(continuación)***

CÁLCULO DE FUERZAS $\mu_v$




| MIEMBRO | $\ell$ (m) | μ | α (10⁻⁵)/°C | ΔT | (μ) (α) (ΔT) $\ell$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *U1-U2* | 4.47 | 2.24 | 1.2 | 40 | 480.6144 |
| *U2-U3* | 4.47 | 2.24 | 1.2 | 40 | 480.6144 |
| *U3-L4* | 4.47 | 2.24 | 1.2 | 40 | 480.6144 |
| *L1-L2* | 4 | –2 | 1.2 | 40 | –384 |
| *L2-L3* | 4 | –2 | 1.2 | 40 | –384 |
| *L3-L4* | 4 | –2 | 1.2 | 40 | –384 |
| *U1-L1* | 6 | 0 | 1.2 | 10 | 0 |
| *L1-U2* | 5.66 | 0 | 1.2 | 5 | 0 |
| *L2-U2* | 4 | 0 | 1.2 | 5 | 0 |
| *L3-U2* | 5.66 | 0 | 1.2 | 5 | 0 |
| *L3-U3* | 2 | 0 | 1.2 | 5 | 0 |
| SUMAS | | | | | 289.8432 |

$\Delta = (289.84)\,(10^{-5}) = 0.0029$ m

## DEFLEXIONES Y ROTACIONES EN VIGAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Supóngase que se tiene una viga libremente apoyada, figura 3.16-*a*, con un sistema de cargas cualquiera $P_1$, $P_2$, $P_3$ y se desea calcular la deflexión vertical en el punto *C*. De acuerdo con el principio general expuesto en la Sección 3.7.7, se debe colocar una carga unitaria en el punto del cual se desea conocer la deflexión, como se muestra en la figura 3.16-*b*, y aplicar la ecuación general 3.52. Respecto a esta ecuación, μ serán los esfuerzos producidos en las fibras de la viga por la carga unitaria, figura 3.16-*b*, y $d\ell$ serán las deformaciones axiales producidas en las fibras por el sistema de cargas externas, figura 3.16-*a*. A continuación se verá cómo calcular estos valores.

Respecto a las deformaciones $d\ell$, se pueden calcular como el producto de la deformación unitaria ε por la longitud inicial del elemento *dx*, figura 3.16-*a*, de tal manera que

$$d\ell = \varepsilon(dx) \qquad (3.57)$$

Las deformaciones ε son iguales al esfuerzo entre el módulo de elasticidad, por lo que $\varepsilon = f/E$. El esfuerzo en un elemento diferencial *dA* como el mostrado en la figura 3.16-a se puede calcular con la ecuación de flexión:

$$f = \frac{M}{I}y \qquad (3.58)$$

donde *M* son los momentos flexionantes producidos por las cargas reales *P*.

Sustituyendo este valor del esfuerzo en el valor de ε, y el de ε en la ecuación 3.57, se obtiene:

$$d\ell = \frac{My}{EI}dx \qquad (3.59)$$

Las fuerzas internas μ de la figura 3.16-*b* son iguales a los esfuerzos producidos por la carga virtual unitaria multiplicados por el área diferencial *dA*. Los esfuerzos se pueden calcular con la ecuación de flexión 3.58, por lo que

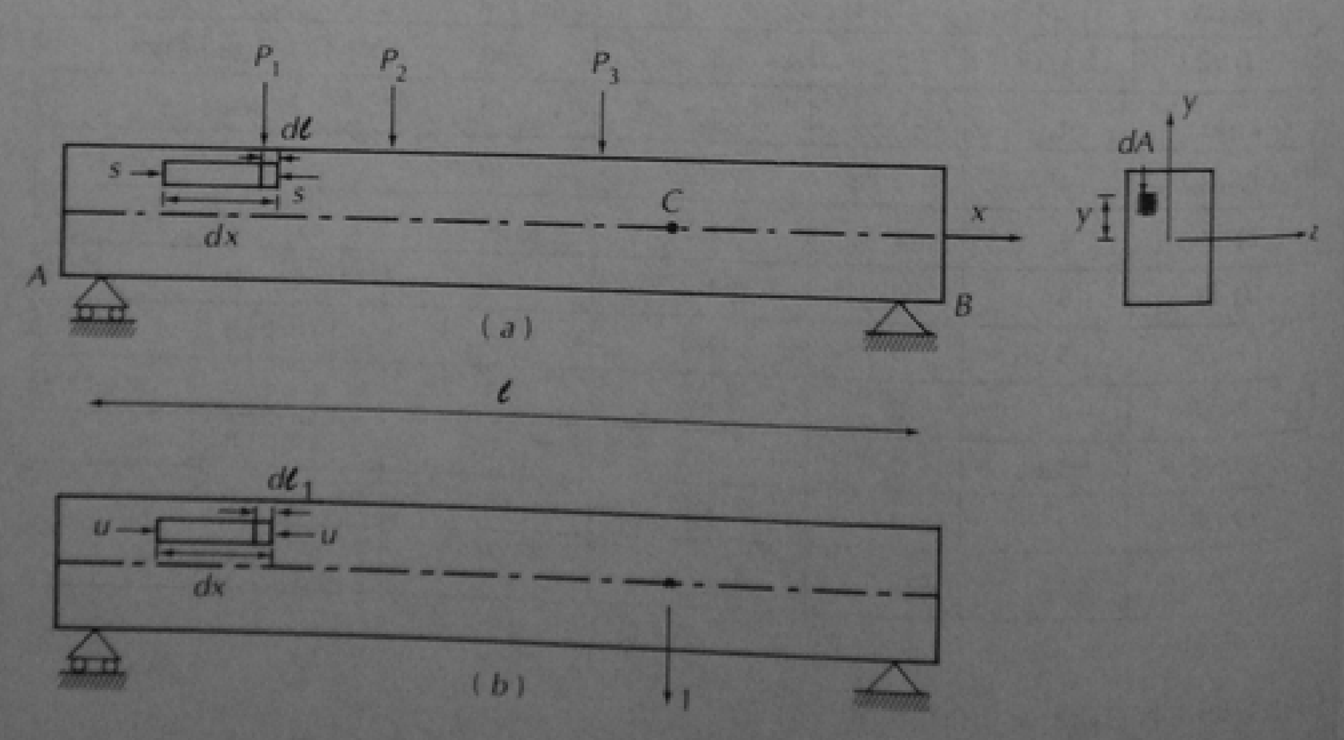



**Figura 3.16.** Deflexiones en vigas producidas por cargas

$$\mu = \frac{my}{I} dA \qquad (3.60)$$

donde $m$ son los momentos producidos por la carga virtual unitaria.

Sustituyendo los valores de $d\ell$ y de $\mu$ proporcionados por las ecuaciones 3.59 y 3.60, respectivamente, en la ecuación general 3.52:

$$1\Delta = \sum\left(\frac{my}{I} dA\right)\left(\frac{My}{EI} dx\right) \qquad (3.61)$$

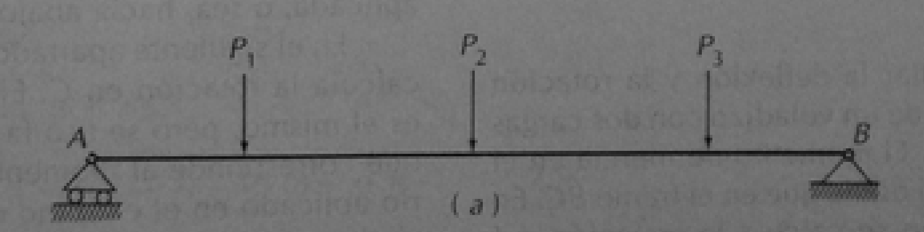
Al deducir la ecuación 3.52 se mencionó que la sumatoria indicaba que se debían considerar todos los elementos del cuerpo de la figura 3.14. En el caso de la viga de la figura 3.16, la sumatoria se debe sustituir por una integral que abarque toda la longitud de la viga y otra que abarque toda el área de la sección transversal. Haciendo esta sustitución se obtiene:

$$1\Delta = \int_0^{\ell} \frac{Mm\,(dx)}{EI^2} \int_A y^2 dA \qquad (3.62)$$

Finalmente, eliminando las unidades de la carga virtual en ambos miembros de la ecuación 3.62 y observando que $\int_A y^2 dA$ es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, se obtiene la ecuación utilizada para fines prácticos:

$$\Delta = \int_0^{\ell} \frac{Mm\,(dx)}{EI} \qquad (3.63)$$

Recuérdese que en esta ecuación el término $M$ representa la ecuación del momento flexionante producido por las cargas reales $P$, mientras que el término $m$, la ecuación del momento flexionante producido por la carga virtual unitaria colocada en el punto



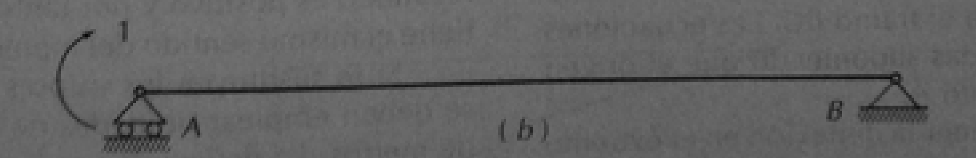




**Figura 3.17.** Rotación en una viga

en que desea conocer la deflexión Δ, en la dirección de la deflexión buscada.

El mismo razonamiento seguido para obtener la ecuación 3.63 puede aplicarse para calcular la rotación o giro en un punto de una viga. Por ejemplo, si se desea conocer la rotación en el extremo *A* de la viga de la figura 3.17-*a*, se aplica un momento virtual unitario en ese extremo, como se muestra en la figura 3.17-*b*, y los esfuerzos μ producidos por este momento se sustituyen en la ecuación 3.53. La ecuación equivalente a la 3.63 queda en la forma:

$$\theta = \int_0^l \frac{Mm\,(dx)}{EI} \tag{3.64}$$

En este caso, *m* representa la ecuación del diagrama de momento flexionante producido por el momento virtual unitario aplicado a la viga en el punto donde se desea conocer la rotación. En los siguientes ejemplos se ilustra el cálculo de deflexiones y rotaciones en vigas por el método del trabajo virtual.

**Ejemplo 3.16**

Se pide calcular la deflexión y la rotación en el extremo de un voladizo con dos cargas concentradas. El momento de inercia en el tramo *AB* es el doble que en el tramo *BC*. En primer término se calcula la ecuación del momento flexionante, *M*, producido por las cargas reales aplicadas al voladizo. Es necesario establecer una ecuación para el tramo *AB* y otra para el tramo *BC*. Las ecuaciones están planteadas suponiendo que el origen está en el punto *A*.

Para obtener la deflexión en el extremo del voladizo, se aplica una carga virtual unitaria en dicho punto y se plantea la ecuación para el término *m* que se usará en la ecuación 3.63. En este caso es una sola ecuación para toda la longitud de la viga. Como se pide la deflexión vertical, la carga virtual se aplica en esta dirección. Después se aplica un momento virtual unitario en el mismo extremo del voladizo para obtener la ecuación de *m* que se usará en la ecuación 3.64. En este caso el momento resulta constante en toda la longitud de la viga.

A continuación se sustituyen los valores de *M* y de *m* en la ecuación 3.63. Es necesario en este caso aplicar la ecuación para el tramo *AB* y para el tramo *BC* por separado, ya que tanto la ecuación de *M* como el momento de inercia son diferentes en cada tramo. En el primer tramo la integración se ha llevado a cabo entre los límites 0 y 3, que es el valor de *x* para los puntos *A* y *B*, y en el segundo tramo, entre los límites 3 y 6, valores de *x* para los puntos *B* y *C*. Obsérvese que para el tramo *AB* se usó un momento de inercia de 2*I* y para el tramo *BC*, un momento de inercia de *I*. $\Delta_1$ y $\Delta_2$ representan la contribución a la deflexión total de los momentos flexionantes en los dos tramos mencionados. La deflexión total $\Delta_C$ es la suma de estas dos contribuciones. El resultado tiene signo positivo, lo cual indica que el sentido de la deflexión es el mismo de la carga virtual aplicada, o sea, hacia abajo en este caso.

En el siguiente apartado del ejemplo se calcula la rotación en *C*. El procedimiento es el mismo, pero se usó la ecuación de *m* que corresponde al momento virtual unitario aplicado en el extremo del voladizo, la cual se sustituyó en la ecuación 3.64. Obsérvese que también se usó 2*I* en el tramo *AB* e *I* en el tramo *BC*. Nuevamente el resultado es positivo y por tanto la rotación tiene el mismo sentido del momento virtual.

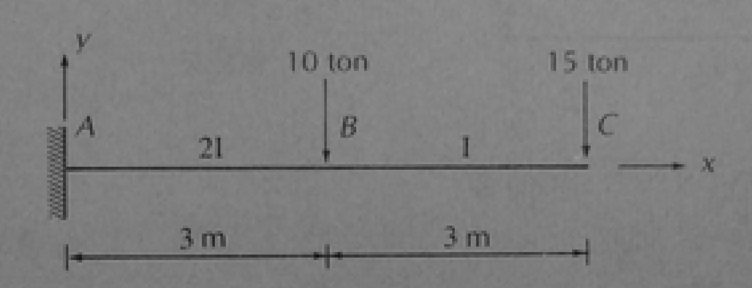
Si se sustituyen los valores de *E* y de *I*, se deben emplear unidades de toneladas y de metros. La deflexión quedará expresada en metros y la rotación, en radianes.

En la resolución comentada, el origen de coordenadas se mantuvo en el punto *A* y las ecuaciones de *M* y de *m* para los dos tra-

mos corresponden a este origen. Por lo general resulta más conveniente mover el origen de coordenadas al pasar de un tramo a otro, y el resultado sigue siendo el mismo. Esto se ilustra en la parte final del ejemplo. La deflexión $\Delta_1$ y la rotación $\theta_1$ se calculan igual, con el origen de coordenadas en *A*. Pero para el tramo *BC* se ha movido el origen de coordenadas al punto *C*. Las ecuaciones de *M* y de *m* resultan diferentes y los límites de integración cambian, pero los valores de $\Delta_2$ y de $\theta_2$ son los mismos. Obsérvese que el cambio del origen de coordenadas simplifica las ecuaciones y la sustitución de los límites de integración.

## EJEMPLO 3.16. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN VERTICAL Y LA ROTACIÓN EN EL EXTREMO DE UN VOLADIZO POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

DATOS:



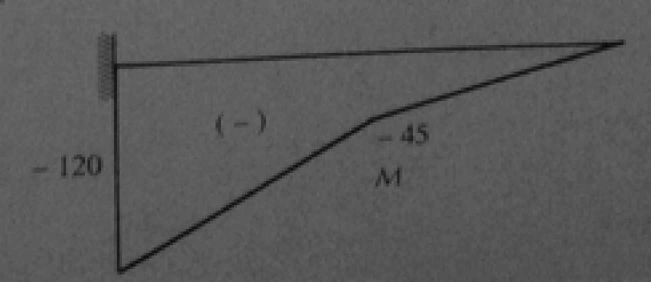

CÁLCULO DE *M*:

Para $0 \leq x \leq 3$

$$M = -15\,(6 - x) - 10\,(3 - x) = -120 + 25x$$

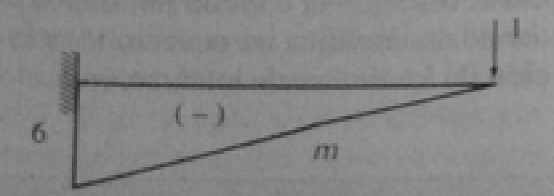
Para $3 \leq x \leq 6$

$$M = -15\,(6 - x) = -90 + 15x$$



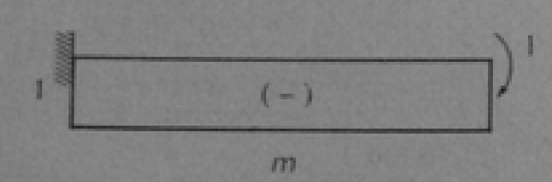
**EJEMPLO 3.16 *(continuación)***

CÁLCULO DE *m* PARA DEFLEXIONES:




$$m = -(1)(6 - x) = -6 + x$$

CÁLCULO DE *m* PARA ROTACIONES:




$$m = -1$$

CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN EL EXTREMO:

Para $0 \leq x \leq 3$

$$\Delta_1 = \int_0^3 \frac{(-120 + 25x)(-6 + x)}{2EI} dx \qquad \text{(ecuación 3.63)}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^3 (25x^2 - 270x + 720)\, dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{25}{3} x^3 - 135x^2 + 720x \right]_0^3 = \frac{1}{EI}(585)$$

Para $3 \leq x \leq 6$

$$\Delta_2 = \int_3^6 \frac{(-90 + 15x)(-6 + x)}{EI} dx \qquad \text{(ecuación 3.63)}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_3^6 (15x^2 - 180x + 540)\, dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[ 5x^3 - 90x^2 + 540x \right]_3^6 = \frac{1}{EI}(135)$$

$$\Delta_c = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\Delta_c = \frac{1}{EI}(720) \downarrow$$

**EJEMPLO 3.16** ***(continuación)***

CÁLCULO DE LA ROTACIÓN EN EL EXTREMO:

Para $0 \le x \le 3$

$$\theta_1 = \int_0^3 \frac{(-120+25x)(-1)}{2EI}\,dx \qquad \text{(ecuación 3.64)}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^3 (-25x+120)\,dx$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2EI}\left[-\frac{25}{2}x^2+120x\right]_0^3 = \frac{1}{EI}(123.75)$$

Para $3 \le x \le 6$

$$\theta_2 = \int_3^6 \frac{(-90+15x)(-1)}{EI}\,dx \qquad \text{(ecuación 3.64)}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{15}{2}x^2+90x\right]_3^6 = \frac{1}{EI}(67.5)$$

$$\theta_c = \theta_1+\theta_2$$

$$\theta_c = \frac{1}{EI}(191.25) \curvearrowright$$

RESOLUCIÓN CAMBIANDO EL ORIGEN EN EL TRAMO BC

$\Delta_1$ y $\theta_1$ son iguales



origen en el punto C

**EJEMPLO 3.16** ***(continuación)***

$$M_{BC} = -15x$$

$$m_{BC} = -x \text{ (para deflexiones)}$$

$$m_{BC} = -1 \text{ (para rotaciones)}$$

$$\Delta_2 = \int_0^3 \frac{(-15x)(-x)}{EI} dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI}\int_0^3 15x^2 dx = \frac{1}{EI}\left[5x^3\right]_0^3 = \frac{1}{EI}(135)$$

$$\theta_2 = \int_0^3 \frac{(-15x)(-1)}{EI} dx$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{15}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{EI}(67.5)$$

**Ejemplo 3.17**

Se trata de una viga libremente apoyada con un voladizo y carga uniformemente distribuida en la que se desea calcular la deflexión y la rotación en un punto situado a 2 m del apoyo de la derecha, punto *B*. Primero se plantean las ecuaciones del momento *M* producido por la carga externa. La función de *M* es diferente entre los apoyos y en el voladizo, por lo que es necesario plantear dos ecuaciones. Entre los apoyos, se colocó el origen de coordenadas en el apoyo izquierdo, y en el voladizo, en el extremo. En el primer caso, a la variable se le denominó $x_1$, y el segundo caso, $x_2$. Es conveniente usar notaciones distintas para la variable cuando se cambia el origen de coordenadas.

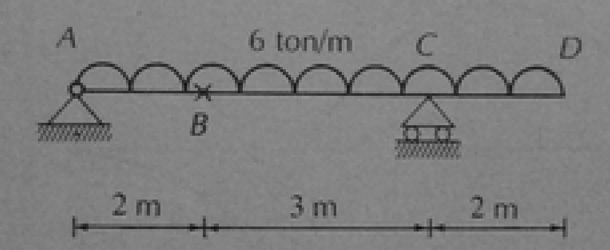
A continuación, para calcular la deflexión en el punto *B*, se colocó una carga unitaria en dicho punto y se planteó la ecuación del momento *m*. En este caso, se tiene una función entre el apoyo izquierdo y el punto de aplicación de la carga, y otra función distinta entre este último punto y el apoyo derecho. Obsérvese que entre el apoyo derecho y el extremo del voladizo la carga unitaria no produce momento. Con el fin de calcular la rotación, se siguió un procedimiento análogo, pero colocando un momento unitario en el punto *B* en vez de una carga unitaria. También en este caso, se tienen funciones distintas para *m* entre el apoyo izquierdo y el punto *B*, y entre éste y el apoyo derecho.

Después se sustituyeron las ecuaciones de *M* y de *m* en la ecuación 3.63 para obtener la deflexión buscada. Aunque la función de *M* es continua entre los apoyos, es necesario hacer la integración por separado entre *A* y *B*, y entre *B* y *C*, porque la función de *m* sí

cambia. Resulta conveniente trazar los diagramas de *M* y de *m* para ver claramente donde hay cambio de función, como se ha hecho en el ejemplo. Nótese que como *m* es nula entre *C* y *D*, la integral del producto *Mm* también es nula. Esto no significa que la presencia del voladizo no influya en la deflexión del punto *B*, ya que el diagrama de *M* sería diferente si no hubiese voladizo. En forma análoga se obtuvo la rotación en el punto *B*. Tanto la deflexión como la rotación resultaron positivas, lo que indica que el sentido de la carga unitaria y el del momento unitario aplicados corresponden a los de la deformación de la viga.

## EJEMPLO 3.17. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN VERTICAL Y DE LA ROTACIÓN EN UNA VIGA CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

DATOS:




$EI$ = constante

Calcular la deflexión y la rotación en el punto *B*

CÁLCULO DE *M*:

6 ton/m

X

$R_A$ $R_c$

De $\Sigma M_A = 0$

$-5R_c + 6 \times 7 \times 3.50 = 0$

$R_c = 29.4$ ton ↑

**EJEMPLO 3.17** ***(continuación)***

De $\Sigma F_y = 0$

$R_A + 29.4 - 6 \times 7 = 0$

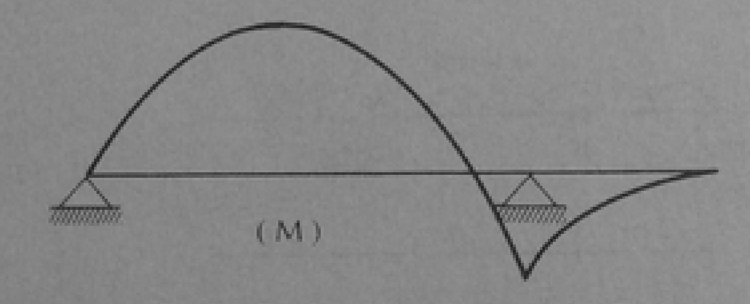
$R_A = 12.6$ ton ↑

Para $0 \leq x_1 \leq 5$

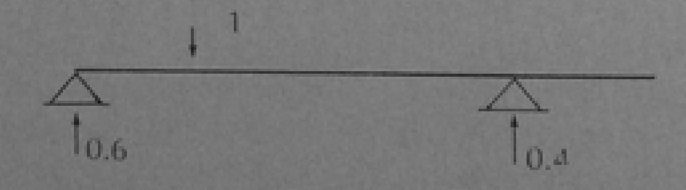
$$M = 12.6x_1 - \frac{6x_1^2}{2}$$

Para $0 \leq x_2 \leq 2$

$$M = -\frac{6x_2^2}{2}$$




CÁLCULO DE $m$ PARA DEFLEXIONES




Para $0 \leq x_1 \leq 2$

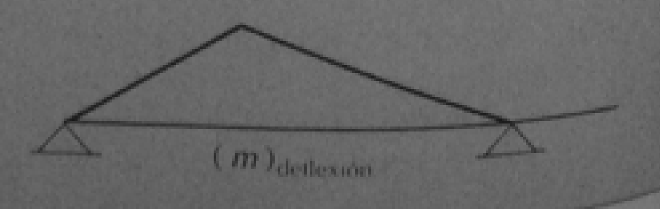
$m = 0.6\, x_1$

Para $2 \leq x_1 \leq 5$

$m = 0.6\, x_1 - 1(x_1 - 2) = -0.4x_1 + 2$

Para $0 \leq x_2 \leq 2$

$m = 0$

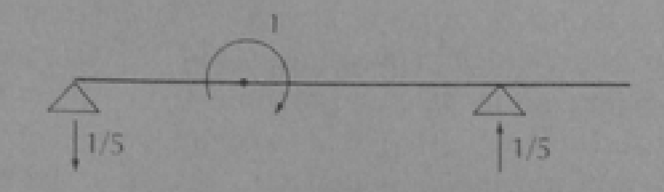


**EJEMPLO 3.17** ***(continuación)***

CÁLCULO DE $m$ PARA ROTACIONES

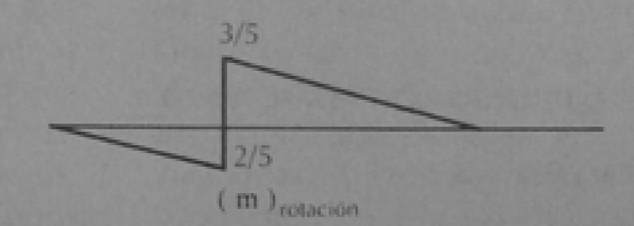
Para $0 \le x_1 \le 2$

$$m = -\frac{1}{5}x_1$$




Para $2 \le x_1 \le 5$

$$m = -\frac{1}{5}x_1 + 1$$




CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN EL PUNTO B

Para $0 \le x_1 \le 2$

$$\Delta_1 = \int_0^2 \frac{(12.6x_1 - 3x_1^2)(0.6x_1)}{EI} dx \qquad \text{(ecuación 3.63)}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI}\int_0^2 (-1.8x_1^3 + 7.56x_1^2)\, dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI}\Big[-0.45x_1^4 + 2.52x_1^3\Big]_0^2 = \frac{1}{EI}(12.96)$$

Para $2 \le x_1 \le 5$

$$\Delta_2 = \int_2^5 \frac{(12.6x_1 - 3x_1^2)(-0.4x_1 + 2)}{EI} dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI}\int_2^5 (1.2x_1^3 - 11.04x_1^2 + 25.2x_1)\, dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI}\Big[0.3x_1^4 - 3.68x_1^3 + 12.6x_1^2\Big]_2^5 = \frac{1}{EI}(16.74)$$

**EJEMPLO 3.17** ***(continuación)***

Para $0 \leq x_2 \leq 2$ (tramo CD), $\Delta_3 = 0$

$$\Delta_{total} = \frac{1}{EI}(12.96 + 16.74)$$

$$\Delta_{total} = \frac{29.70}{EI} \downarrow$$

CÁLCULO DE LA ROTACIÓN EN EL PUNTO *B*

Para $0 \leq x_1 \leq 2$

$$\theta_1 = \int_0^2 \frac{(12.6x_1 - 3x_1^2)(-0.2x_1)}{EI} dx \qquad \text{(ecuación 3.64)}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI}\int_0^2 (0.6x_1^3 - 2.52x_1^2)\, dx$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI}\left[0.15x_1^4 - 0.84x_1^3\right]_0^2 = \frac{1}{EI}(-4.32)$$

Para $2 \leq x_1 \leq 5$

$$\theta_2 = \int_2^5 \frac{(12.6x_1 - 3x_1^2)(-0.2x_1 + 1)}{EI} dx$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}\int_2^5 (0.6x_1^3 - 5.52x_1^2 + 12.6x_1)\, dx$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}\left[0.15x_1^4 - 1.84x_1^3 + 6.3x_1^2\right]_2^5 = \frac{1}{EI}(8.37)$$

Para $0 \leq x_2 \leq 2$ (tramo CD), $\theta_3 = 0$

$$\theta_{total} = \frac{1}{EI}(-4.32 + 8.37) = \frac{4.05}{EI} \curvearrowright$$

DEFLEXIONES Y ROTACIONES EN MARCOS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

El método del trabajo virtual presenta claras ventajas sobre los otros métodos estudiados en este capítulo cuando se trata de calcular las deformaciones en marcos. El procedimiento es igual al utilizado para el cálculo de deformaciones en vigas, pero la integración planteada en las ecuaciones 3.63 y 3.64 se lleva a cabo a través de todos los miembros que componen el marco. Desde luego que dentro de cada miembro resulta necesario hacer la integración en distintos tramos, si las funciones de *M* o de *m* no son continuas a lo largo del miembro. En el siguiente ejemplo se ilustra lo que se acaba de mencionar.

**Ejemplo 3.18**

Se pide calcular el desplazamiento horizontal del apoyo *E* y la rotación del apoyo *A*. El primero es un apoyo libre y el segundo, uno articulado. El marco es isostático ya que tiene tres incógnitas en los apoyos y existen tres ecuaciones de equilibrio. El momento de inercia de la viga es el doble del de la columna.

Primero se resuelve el marco para obtener las ecuaciones de momentos flexionantes en la columna y en la viga. Previamente, ha sido necesario calcular las reacciones en los apoyos. Las ecuaciones de momento se han obtenido por tramos en los que la función no varía. Así, en la columna *AC*, se ha obtenido una ecuación entre los puntos *A* y *B*, y otra entre los puntos *B* y *C*, ya que la carga concentrada de 10 ton hace que cambie la ecuación de momentos. Se ha usado un origen de coordenadas en el punto *A* para la columna, y un origen distinto en el punto *E* para la viga. Se ha dibujado el diagrama de momentos flexionantes para ver con claridad los cambios de la función. Obsérvese que se ha seguido la convención de signos de la Sección 2.9.2 al dibujar el diagrama de momentos.

A continuación, ya que se desea calcular el desplazamiento horizontal del punto *E*, se coloca una carga virtual unitaria en dicho punto en la misma dirección horizontal, y se calculan las ecuaciones de los momentos *m* producidos por esta fuerza. En este caso, las funciones de *m* son continuas a lo largo de la viga y de la columna ya que no hay fuerzas intermedias. También se ha trazado el diagrama de momentos flexionantes correspondiente.

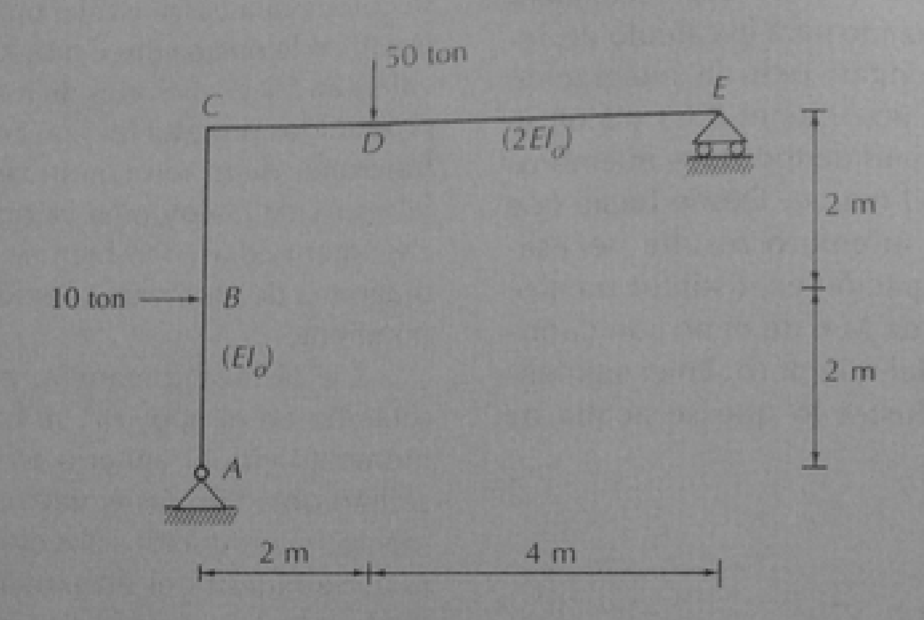
De la misma manera, para obtener la rotación en el apoyo *A* se ha colocado un momento virtual unitario en dicho apoyo y se han obtenido las ecuaciones de los momentos *m* producidos por este momento virtual. Se muestra el diagrama de momentos flexionantes correspondiente.

Después se han sustituido las ecuaciones de *M* y de *m* (correspondiente a la fuerza virtual horizontal) en la ecuación 3.63 para obtener la deflexión en *E*. Nótese que la sustitución se ha hecho por tramos en los que no cambia ninguna de las dos funciones. Así, en la columna *AC* ha sido necesario considerar dos tramos, el *AB* y el *AC*, ya que la función de *M* no es continua en toda la columna, aunque lo sea la de *m*. En total, fue necesario hacer la integración en cuatro tramos. La deflexión total viene siendo la suma de las cuatro integraciones. Obsérvese que en la columna se usó un momento de inercia *I*, mientras que en la viga se usó 2*I*.

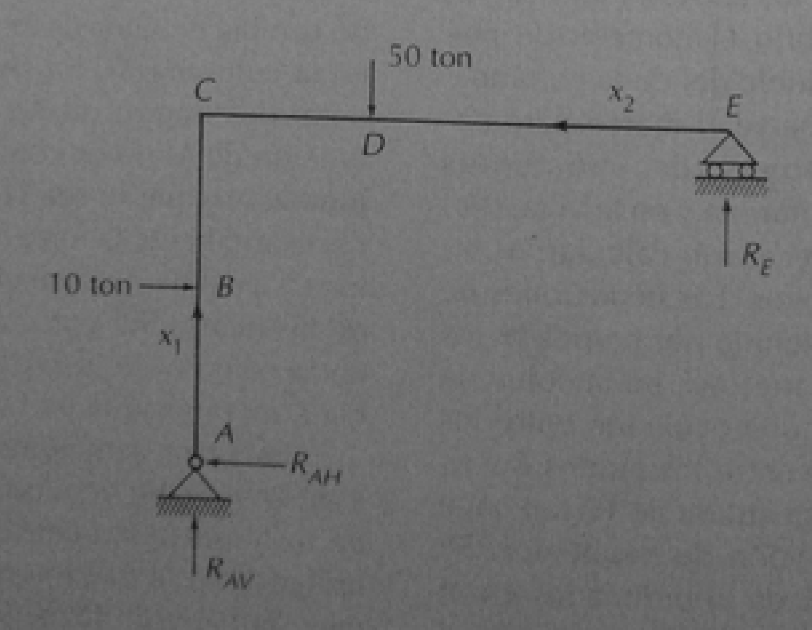
En forma semejante se calculó la rotación en *A* sustituyendo las funciones de *M* y de *m* (correspondiente al momento virtual unitario) en la ecuación 3.64. También fue necesario dividir la estructura en cuatro tramos y calcular la rotación total como la suma de las cuatro integraciones.

## EJEMPLO 3.18. CALCULAR LA DEFLEXIÓN HORIZONTAL EN EL PUNTO *E* Y LA ROTACIÓN EN EL PUNTO *A* DEL MARCO MOSTRADO

DATOS:




CÁLCULO DE *M*



**EJEMPLO 3.18** ***(continuación)***

De $\Sigma M_A = 0$

$$-6\,R_E + 2 \times 10 + 2 \times 50 = 0$$

$$R_E = 20 \text{ ton} \uparrow$$

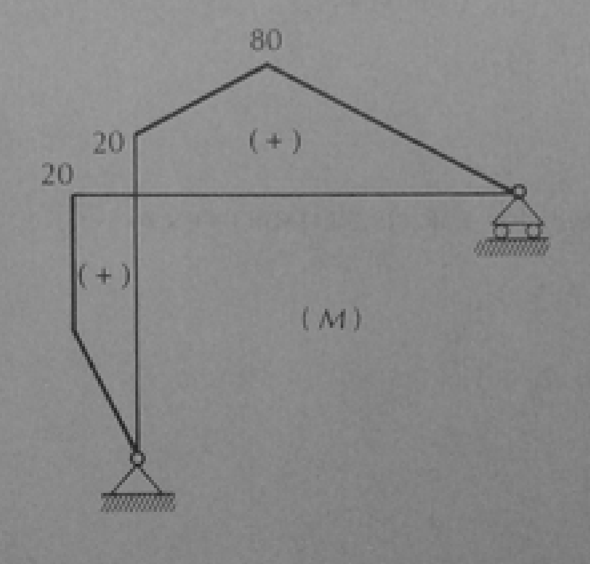
De $\Sigma F_x = 0$

$$R_{AH} = 10 \text{ ton} \leftarrow$$

De $\Sigma F_y = 0$

$$R_{AV} = -50 + 20 = 0$$

$$R_{AV} = 30 \text{ ton} \uparrow$$




Para $0 \le x_1 \le 2$

$$M = 10x_1$$

Para $2 \le x_1 \le 4$

$$M = 10x_1 - 10\,(x_1 - 2) = 20$$

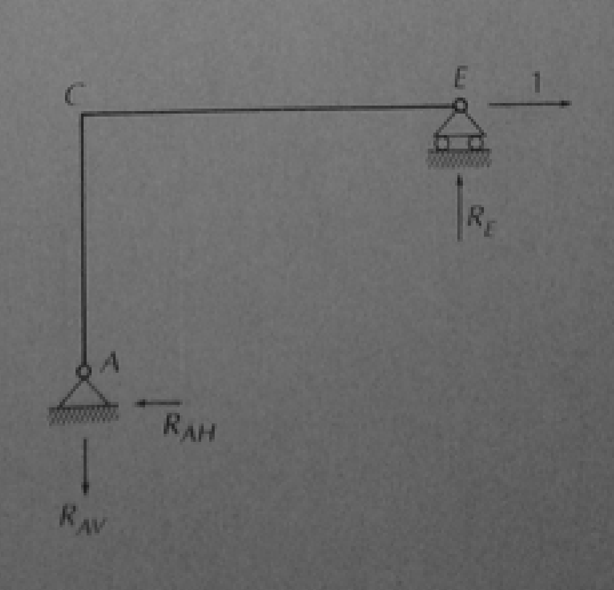
Para $0 \le x_2 \le 4$

$$M = 20x_2$$

Para $4 \le x_2 \le 6$

$$M = 20x_2 - 50\,(x_2 - 4) = 200 - 30x_2$$

CÁLCULO DE $m$ PARA LA DEFLEXIÓN EN $E$




De $\Sigma M_A = 0$

$$-6\,R_E + 4 \times 1 = 0$$

$$R_E = \frac{2}{3} \uparrow$$

De $\Sigma F_y = 0$

$$R_{AV} = \frac{2}{3} \downarrow$$

**EJEMPLO 3.18** ***(continuación)***

De $\Sigma F_x = 0$

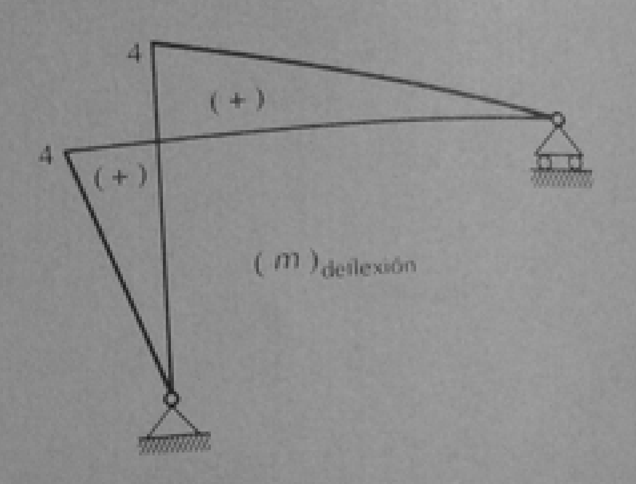
$R_{AH} = 1 \leftarrow$

Para $0 \leq x_1 \leq 4$

$m = x_1$

Para $0 \leq x_2 \leq 6$

$$m = \frac{2}{3} x_2$$




CÁLCULO DE *m* PARA LA ROTACIÓN EN *A*

De $\Sigma M_A = 0$

$-6\ R_E + 1 = 0$

$$R_E = \frac{1}{6} \uparrow$$

De $\Sigma F_y = 0$

$$R_{AV} = \frac{1}{6} \downarrow$$

De $\Sigma F_x = 0$

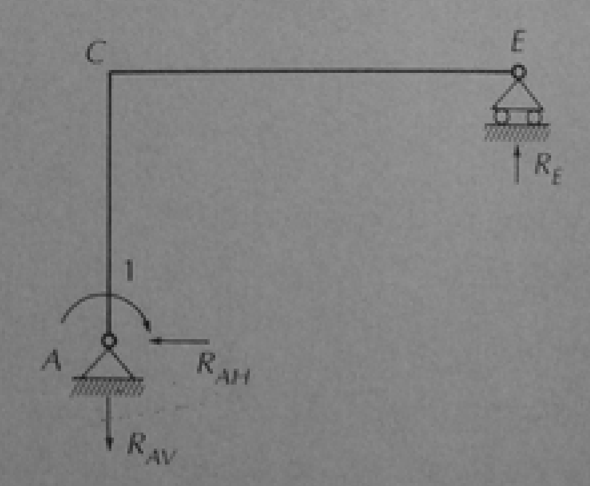
$R_{AH} = 0$

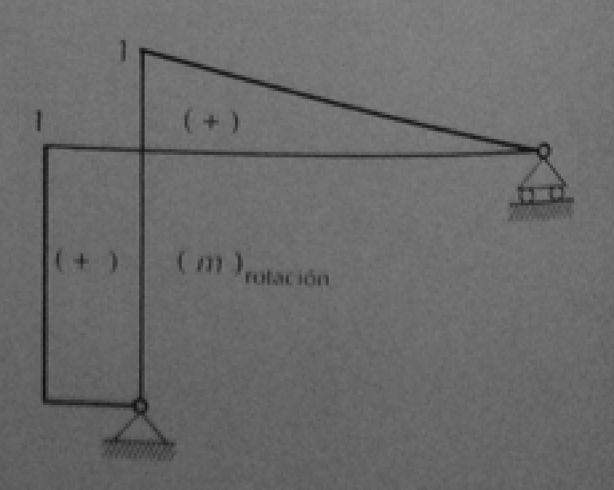
Para $0 \leq x_1 \leq 4$

$m = 1$

Para $0 \leq x_2 \leq 6$

$$m = \frac{1}{6} x_2$$



**EJEMPLO 3.18** ***(continuación)***

CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN *E*

Tramo *AB*

$$\Delta_1 = \int_0^2 \frac{(10x_1)(x_1)}{EI_0} dx \qquad \text{(ecuación 3.63)}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_0} \int_0^2 (10x_1^2)\, dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_0} \left[ \frac{10}{3} x_1^3 \right]_0^2 = \frac{1}{EI_0}(26.67)$$

Tramo *BC*

$$\Delta_2 = \int_2^4 \frac{(20)(x_1)dx}{EI_0}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI_0} \left[ \frac{20}{2} x_1^2 \right]_2^4 = \frac{1}{EI_0}(120)$$

Tramo *ED*

$$\Delta_3 = \int_0^4 \frac{(20x_2)(\frac{2}{3}x_2)}{2EI_0} dx$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2EI_0} \int_0^4 \left( \frac{40}{3} x_2^2 \right) dx$$

$$\Delta_3 = \frac{20}{3EI_0} \left[ \frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^4 = \frac{1}{EI_0}(142.22)$$

**EJEMPLO 3.18** ***(continuación)***

Tramo *DC*

$$\Delta_4 = \int_4^6 \frac{(200-30x_2)(\frac{2}{3}x_2)}{2EI_0}\,dx$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2EI_0}\int_4^6 \left(-20x_2^2 + 133.33x_2\right)dx$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2EI_0}\left[-6.67x_2^3 + 66.67x_2^2\right]_4^6 = \frac{1}{EI_0}(159.78)$$

$$\Delta_{total} = \frac{1}{EI_0}(26.67 + 120.00 + 142.22 + 159.78) = \frac{448.67}{EI_0} \rightarrow$$

CÁLCULO DE LA ROTACIÓN EN *A*

Tramo *AB*

$$\theta_1 = \int_0^2 \frac{(10x_1)(1)}{EI_0}dx \qquad \text{(ecuación 3.64)}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI_0}\int_0^2 10x_1\,dx$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI_0}\left[5x_1^2\right]_0^2 = \frac{1}{EI_0}(20)$$

Tramo *BC*

$$\theta_2 = \int_2^4 \frac{(20)(1)}{EI_0}dx$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI_0}\left[20x\right]_2^4 = \frac{1}{EI_0}(40)$$

**EJEMPLO 3.18** ***(continuación)***

Tramo *ED*

$$\theta_3 = \int_0^4 \frac{(20x_2)(\frac{1}{6}x_2)}{2EI_0}\,dx$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2EI_0}\int_0^4 \left(\frac{20}{6}x_2^2\right)dx$$

$$\theta_3 = \frac{10}{6EI_0}\int_0^4 x^2\,dx$$

$$\theta_3 = \frac{10}{6EI_0}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{1}{EI_0}(35.55)$$

Tramo *DC*

$$\theta_4 = \int_4^6 \frac{(200-30x_2)(\frac{1}{6}x_2)}{2EI_0}\,dx$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2EI_0}\int_4^6 \left(-5x_2^2 + 33.33x_2\right)dx$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2EI_0}\left[-\frac{5}{3}x_2^3 + 16.67x_2^2\right]_4^6 = \frac{1}{EI_0}(40.03)$$

$$\theta_{total} = \frac{1}{EI_0}(20.00 + 40.00 + 35.55 + 40.03) = \frac{135.58}{EI_0} \;\curvearrowright$$

INTEGRALES DE MOHR

Se puede observar en las ecuaciones 3.63 y 3.64, así como en los tres últimos ejemplos, que en el cálculo de deflexiones y rotaciones por el método del trabajo virtual es necesario integrar el producto de las funciones de momentos flexionantes *M* y *m*. Para simplificar el procedimiento de integración, se han elaborado tablas que permiten obtener directamente el resultado de la integración a partir de los diagramas de momentos que se presentan con más frecuencia en la práctica. Estas tablas se conocen con el nombre de tablas de integrales de Mohr. En la tabla 3.1 se presenta una de estas tablas que se usa de la siguiente manera. Una vez determinados los diagramas de momentos *M* y *m*, y seleccionado el tramo en el que se va a plantear la integración del producto de las dos funciones, se entra a una columna de la tabla que corresponda al diagrama de *M* y a un renglón que corresponda al diagrama de *m*, o viceversa. La intersección de la columna y el renglón seleccionados proporciona el resultado de la integración del producto, o sea, de la $\int_0^s Mm(ds)$, donde *s* es la longitud del tramo en que se efectúa la integración, como se ve en la tabla. Como el valor de *EI* que aparece en las ecuaciones 3.63 y 3.64 suele ser constante, el uso de la tabla de integrales de Mohr simplifica el uso del método del trabajo virtual.

Al aplicar la tabla 3.1 debe tenerse cuidado en que los diagramas de momentos correspondan realmente a los de la tabla. Por ejemplo, los diagramas producidos por cargas distribuidas deben ser parábolas de segundo grado; si las cargas no están distribuidas uniformemente las parábolas correspondientes no son de segundo grado y ya no puede aplicarse la tabla mostrada. También debe observarse que las ordenadas de las parábolas corresponden al vértice de la parábola; si el diagrama de momentos no corresponde a una parábola completa o a una media parábola, la ordenada no será la del vértice y la tabla tampoco podrá aplicarse directamente. Cuando se seleccionen triángulos en un renglón y en una columna, deberá observarse si los vértices están en el mismo extremo o en extremos opuestos del tramo. En el caso de trapecios, los subíndices 1 corresponden siempre al extremo izquierdo y los subíndices 2, al extremo derecho. En general, los diagramas de momentos pueden subdividirse para que caigan en alguno de los casos incluidos en la tabla, pero en ocasiones esto complica tanto el procedimiento que resulta preferible hacer la integración, que como se ha visto en los ejemplos, suele ser del tipo $\int x^n(dx)$. En el ejemplo siguiente se ilustra la aplicación de la tabla de integrales de Mohr.

**Ejemplo 3.19**

Se resuelve el mismo problema del ejemplo anterior, pero usando la tabla de integrales de Mohr. Los primeros pasos son los mismos, por lo que no se repiten en este ejemplo. Es decir, se obtienen las ecuaciones de los momentos *M*, de los momentos *m* correspondientes a la carga virtual en *E* y de los momentos *m* correspondientes al momento virtual en *A*. También se trazan los diagramas de momentos flexionantes correspondientes a estas ecuaciones.

Después se utilizan las tablas para obtener los resultados de la integración señalada en la ecuación 3.63 para el cálculo de la deflexión en *E*. En el tramo *AB*, el diagrama de *M* es un triángulo con vértice en *A* y el diagrama de *m* es otro triángulo con el vértice también en *A*, como se puede ver en el ejemplo 3.18. Por lo tanto, se entra al segundo renglón y a la segunda columna de

la tabla 3.1, que corresponden a triángulos con el vértice en el mismo extremo, y se determina que el resultado de la integración es $\frac{1}{3}(sik)$, donde $s$ es la longitud del tramo, 2m, $i$ es la altura de uno de los triángulos, 20 en el diagrama de $M$, y $k$ es la altura del otro triángulo, 2 en el diagrama de $m$. El resultado, 26.67, debe dividirse entre el valor de $EI$ para la columna según se indica en la ecuación 3.63.

Para el tramo $BC$, el diagrama de $M$ es un rectángulo y el de $m$ es un trapecio. Por lo tanto, se entra al primer renglón de la tabla y a la segunda columna, y en la intersección se puede ver que el resultado de la integración es $\frac{1}{2}si(k_1 + k_2)$, donde $s$ es la longitud del tramo, 2m, $i$ es la altura del rectángulo, 20 en el diagrama de $M$, y $k_1$ y $k_2$ las alturas del trapecio, 2 y 4 en el diagrama de $m$. De manera similar, para el tramo $ED$ hay que combinar dos triángulos con el vértice en el mismo extremo, y para el tramo $DC$, dos trapecios.

Con el mismo procedimiento se ha calculado la rotación en $A$, combinando por tramos los diagramas de $M$ y de $m$ para momento virtual unitario en $A$. Tanto para la deflexión como para la rotación, los valores calculados son iguales a los del ejemplo 3.18, excepto por los ajustes en los decimales.

**EJEMPLO 3.19. RESOLVER EL EJEMPLO 3.18 USANDO LA TABLA DE INTEGRALES DE MOHR**

Los datos y los diagramas de $M$ y de $m$ son iguales a los del ejemplo 3.18 y no se repiten aquí.

CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN $E$

Tramo $AB$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{3}sik\right)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{3} \times 2 \times 20 \times 2\right) = \frac{1}{EI_0}(26.67)$$

**EJEMPLO 3.19** ***(continuación)***

Tramo *BC*

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI_0}\left[\frac{1}{2} si\ (k_1 + k_2)\right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI_0}\left[\frac{1}{2} \times 2 \times 20(2+4)\right] = \frac{1}{EI_0}(120)$$

Tramo *ED*

$$\Delta_3 = \frac{1}{2EI_0}\left(\frac{1}{3} si\ k\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2EI_0} \times \frac{1}{3}\left(4 \times 80 \times \frac{8}{3}\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI_0}(142.22)$$

Tramo *DC*

$$\Delta_4 = \frac{1}{2EI_0}\left[\frac{1}{6} s(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)\right]$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2EI_0} \times \frac{1}{6} \times 2\left[2 \times 20 \times 4 + 20 \times \frac{8}{3} + 80 \times 4 + 2 \times 80 \times \frac{8}{3}\right]$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{EI_0}(160)$$

$$\Delta_{total} = \frac{1}{EI_0}(26.67 + 120 + 142.22 + 160) = \frac{448.89}{EI_0}$$

**EJEMPLO 3.19** ***(continuación)***

CÁLCULO DE LA ROTACIÓN EN *A*

Tramo *AB*

$$\theta_1 = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{2}sik\right)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{2}\times 2\times 20\times 1\right) = \frac{1}{EI_0}(20)$$

Tramo *BC*

$$\theta_2 = \frac{1}{EI_0}(sik)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI_0}(2\times 20\times 1) = \frac{1}{EI_0}(40)$$

Tramo *ED*

$$\theta_3 = \frac{1}{2EI_0}\left(\frac{1}{3}sik\right)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2EI_0}\left(\frac{1}{3}\times 4\times 80\times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{EI_0}(35.55)$$

Tramo *DC*

$$\theta_4 = \frac{1}{2EI_0}\left[\frac{1}{6}s(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)\right]$$

$$\theta_4 = \frac{1}{2EI_0}\left[\frac{1}{6}\times 2\left(2\times 20\times 1 + 20\times\frac{2}{3} + 80\times 1 + 2\times 80\times\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$\theta_4 = \frac{1}{EI_0}(40)$$

$$\theta_{total} = \frac{1}{EI_0}(20+40+35.55+40) = \frac{1}{EI_0}(135.55)$$

### 3.7.8 Método de Castigliano

El ingeniero italiano Alberto Castigliano publicó dos importantes teoremas en 1876 que permiten calcular las deformaciones elásticas en estructuras. El primer teorema, que es el más usado, establece lo siguiente:

> "La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a una de las acciones aplicadas es igual al desplazamiento a lo largo de esa acción"

El desplazamiento al que se hace referencia puede ser lineal o angular, o sea, puede ser una deflexión o una rotación. Si se denomina Δ a este desplazamiento, $P$ a la acción aplicada, que puede ser una fuerza o un momento, y $U_i$ a la energía de deformación o trabajo interno (Sección 3.7.1), el primer teorema de Castigliano puede escribirse:

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P} \qquad (3.65)$$

Para demostrar la ecuación 3.65, considérese la viga mostrada en la figura 3.18 sujeta a dos cargas concentradas. Sea $M_1$ el momento flexionante en cualquier sección de la viga producido por la carga $P_1$ y sea $M_2$ el momento flexionante en la misma sección producido por la carga $P_2$. Si se denomina por $m_1$ al momento producido por una carga unitaria aplicada en la misma sección que $P_1$, y por $m_2$ al momento producido por una carga unitaria aplicada en la misma sección que $P_2$, el momento total en la sección cualquiera producido por las dos cargas $P_1$ y $P_2$ será igual a:

$$M = M_1 + M_2 = m_1P_1 + m_2P_2 \qquad (3.66)$$

Ahora, derivando la ecuación 3.45 obtenida en la sección 3.7.5, con respecto a $P_1$, se obtiene:

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1}\int_0^{\ell}\frac{M^2dx}{2EI} = \int_0^{\ell}\frac{M(\partial M/\partial P_1)dx}{EI} \qquad (3.67)$$

Derivando la ecuación 3.66 con respecto a $P_1$ y sustituyendo el resultado en la ecuación 3.67[10]:

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_1} = \int_0^{\ell}\frac{Mm_1dx}{EI} \qquad (3.68)$$

De acuerdo con la ecuación 3.63, el segundo miembro de esta ecuación es igual a la deflexión en el punto de aplicación de la carga unitaria que produce el momento $m_1$, por lo que

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_1} \qquad (3.69)$$

que es la ecuación que quería demostrarse. Para encontrar entonces la deflexión $\Delta_1$ en el punto de aplicación de la carga $P_1$, en dirección de la carga, se sustituye la ecuación 3.67 en la 3.69 y se obtiene:

$$\Delta_1 = \int_0^{\ell}\frac{M(\partial M/\partial P_1)\,dx}{EI} \qquad (3.70)$$

De manera semejante, derivando respecto a $P_2$, se obtiene que la deflexión en el punto de aplicación de esta carga es:

$$\Delta_2 = \int_0^{\ell}\frac{M(\partial M/\partial P_2)dx}{EI} \qquad (3.71)$$

[10] El lector recordará que al derivar una función de varias variables respecto a una de ellas, las demás se consideran constantes, por lo que su derivada es cero. Véase, por ejemplo, Granville, W.A. "Cálculo Diferencial e Integral", LIMUSA, 1985, pp. 541 a 547.

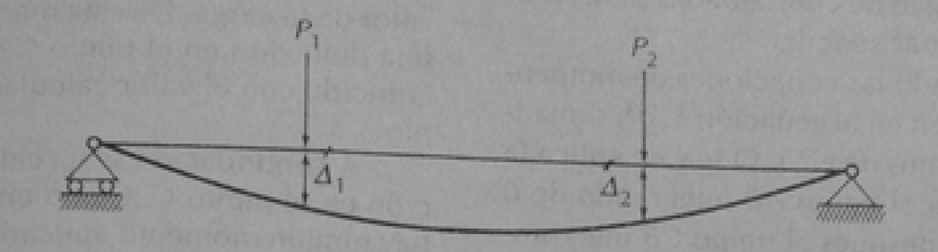



**Figura 3.18.** Viga para la demostración del Teorema de Castigliano

Se puede ver que estas ecuaciones son muy semejantes a la ecuación 3.63 usada en el método del trabajo virtual, pero en vez de la función de momento *m* producida por el momento virtual unitario, se usa la derivada parcial del momento producido por las cargas externas.

Puede suceder que en el punto en el que se desea calcular la deflexión no haya ninguna carga aplicada. En este caso, se introduce una carga ficticia, *P'*, en ese punto, se deriva respecto a esta carga, y al final se le asigna un valor nulo. También pueden calcularse rotaciones, en vez de deflexiones. Para esto, se deriva respecto a un momento aplicado en el punto en que se desea calcular la rotación; este momento puede ser real o ficticio. Si es ficticio, al final se le asigna un valor de cero.

El teorema de Castigliano puede usarse también para calcular las deflexiones en armaduras. La obtención de las ecuaciones correspondientes es similar a la presentada para el caso de vigas. Dichas ecuaciones quedan en la forma:

$$\Delta_1 = \sum \frac{S(\partial S / \partial P_1)L}{AE} \qquad (3.72)$$

y

$$\Delta_2 = \sum \frac{S(\partial S / \partial P_2)L}{AE} \qquad (3.73)$$

en las cuales $\Delta_1$ y $\Delta_2$ son las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas $P_1$ y $P_2$, $S$ son las fuerzas en las barras de la armadura producidas por las cargas aplicadas, $L$ es la longitud de cada barra, $A$ es su área transversal y $E$ su módulo de elasticidad.

**Ejemplo 3.20**

Se calcula la deflexión y la rotación en el extremo volado de una viga con dos apoyos. La deflexión se ha calculado en el ejemplo 3.5 por el método de los Teoremas de Mohr.

En primer término se calculan las reacciones y las ecuaciones de momento flexionante. Nótese que a la carga aplicada en el extremo de la viga, donde se desea calcular la deflexión, se le ha llamado $P_1$, sin asignarle su valor numérico. Esto es así porque de otra manera no se podría derivar respecto a $P_1$ ya que no sería una variable. Las ecuaciones de momento flexionante se han obtenido por separado para el tramo *AB* y para el tramo *BC*, porque la función no es continua en toda la viga. En el tramo *BC* se

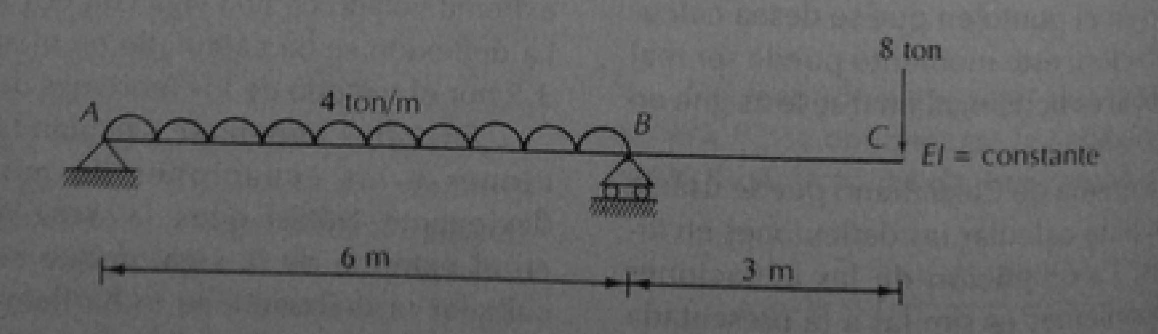
cambió el origen de coordenadas para tener una función más sencilla.

Ya teniendo las ecuaciones de momento, se sustituyen en la ecuación 3.70, sumando los dos tramos de viga. O sea, se aplica la ecuación para el tramo *AB* integrando de 0 a 6, se aplica después al tramo *CB* integrando de 0 a 3, y se suman las dos integrales. Aquí se puede ver que si se hubiese asignado el valor de 8 ton a la carga $P_1$ desde un principio, las derivadas parciales $\partial M_1/\partial P_1$ y $\partial M_2/\partial P_2$ serían iguales a cero y el método no funcionaría. En cambio, como se ha planteado, los resultados de las integraciones quedan en función de $P_1$, y después de sustituir los límites de integración se incorpora el valor de la carga. De esta manera se obtiene una deflexión en el punto C de 108/EI, que coincide con el valor calculado en el ejemplo 3.5.

A continuación se ha calculado la rotación en el punto C. Como en este punto no hay ningún momento aplicado, se introduce el momento ficticio $M'$, cuyo valor se hace cero al final de la operación. A la carga concentrada se le asigna su valor desde el principio, ya que ahora no se derivará respecto a *P* sino respecto a *M*, como está planteado en la primera ecuación de $\theta_C$. Al igual que en el cálculo de la deflexión, después de sustituir los límites de integración, se hace $M' = 0$ con lo cual se obtiene la rotación en C de 48/EI.

**EJEMPLO 3.20. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN Y LA ROTACIÓN EN EL EXTREMO DE UNA VIGA CON DOS APOYOS Y UN VOLADIZO APLICANDO EL TEOREMA DE CASTIGLIANO**

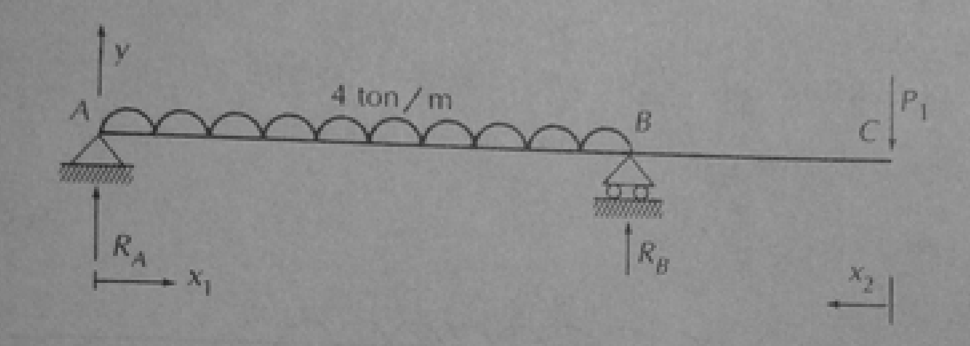
DATOS:



**EJEMPLO 3.20 *(continuación)***

CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN EN C

ECUACIONES DE MOMENTOS




$$R_A = 12 - \frac{P_1(3)}{6}$$

$$R_B = 12 + \frac{P_1(9)}{6}$$

Para $0 \leq x_1 \leq 6$

$$M_1 = R_A x_1 - \frac{4x_1^2}{2}$$

$$M_1 = 12x_1 - 0.5P_1x_1 - 2x_1^2$$

Para $0 \leq x_2 \leq 3$

$$M_2 = -P_1x_2$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^6 M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_1} dx_1 + \int_0^3 M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_1} dx_2\right] \qquad \text{(ecuación 3.70)}$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^6 (12x_1 - 0.5P_1x_1 - 2x_1^2)(-0.5x_1)\, dx_1 + \int_0^3 (-P_1x_2)(-x_2)\, dx_2\right]$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left\{\left[-2x_1^3 + 0.0833P_1x_1^3 + 0.25x_1^4\right]_0^6 + \left[0.333P_1x_2^3\right]_0^3\right\}$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left[-432 + 18P_1 + 324 + 9P_1\right]$$

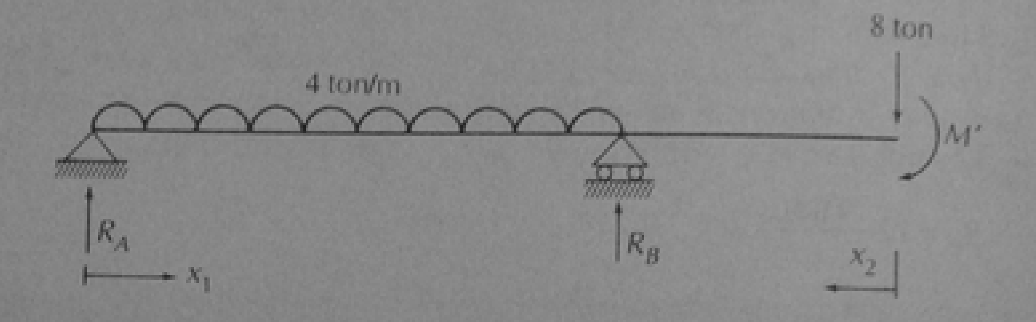
**EJEMPLO 3.20** ***(continuación)***

Haciendo $P_1 = 8$:

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}(108)$$

CÁLCULO DE LA ROTACIÓN EN C

ECUACIONES DE MOMENTOS




$$R_A = \frac{4\times 6}{2} - \frac{8\times 3}{6} - \frac{M'}{6} = 8 - \frac{M'}{6}$$

$$R_B = \frac{4\times 6}{2} + \frac{8\times 9}{6} + \frac{M'}{6} = 24 + \frac{M'}{6}$$

Para $0 \le x_1 \le 6$

$$M_1 = R_A x_1 - \frac{4x_1^2}{2} = 8x_1 - \frac{M'}{6}x_1 - 2x_1^2$$

Para $0 \le x_2 \le 3$

$$M_2 = -8x_2 - M'$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^6 M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M'}dx_1 + \int_0^3 M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M'}dx_2\right]$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^6 \left(8x_1 - \frac{M'}{6}x_1 - 2x_1^2\right)\left(-\frac{x_1}{6}\right)dx_1 + \int_0^3 (-8x_2 - M')(-1)dx_2\right]$$

**EJEMPLO 3.20 *(continuación)***

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left\{\left[-\frac{8}{18}x_1^3 + \frac{M'x_1^3}{108} + \frac{1}{12}x_1^4\right]_0^6 + \left[4x_2^2 + M'x_2\right]_0^3\right\}$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left[-96 + 2M' + 108 + 36 + 3M'\right]$$

Haciendo $M' = 0$:

$$\theta_C = \frac{1}{EI}(48)$$

El Teorema de Castigliano puede usarse también para calcular deflexiones y rotaciones en marcos. Basta con integrar la ecuación 3.70 a lo largo de todos los elementos del marco. Como ya se ha mostrado en otros ejemplos, puede cambiarse el origen de coordenadas en cada elemento para obtener funciones más sencillas de los momentos flexionantes.

### *3.7.9 Deformaciones causadas por fuerza cortante y torsión*

Se mencionó en la Sección 3.1 que en este texto se han considerado únicamente, para el caso de vigas y marcos, deformaciones producidas por momentos flexionantes, ya que son mucho mayores que las causadas por deformaciones axiales o por fuerza cortante. Sin embargo, en esta sección se describe brevemente como pueden considerarse las deformaciones producidas por fuerza normal, fuerza cortante y momento torsionante. Los métodos energéticos son idóneos para el cálculo de las deformaciones producidas por estas acciones.

La base del método sigue siendo la igualación del trabajo externo con el trabajo interno expresada en la ecuación 3.35. El trabajo externo es siempre el mismo y puede calcularse con las ecuaciones de las secciones 3.7.2 y 3.7.3, según se trate de cargas o de momentos aplicados a la estructura. Ahora bien, si se quiere tomar en cuenta el efecto de cargas axiales, fuerzas cortantes y momentos torsionantes desarrollados en los miembros de la estructura, deberá calcularse el trabajo interno desarrollado por estas acciones e incluirlo en el segundo miembro de la ecuación 3.35. Aunque no se demuestra en este texto, la energía interna de deformación desarrollada por una fuerza cortante virtual unitaria, *v*, mientras se deforma una viga bajo el efecto de las cargas reales, es igual a

$$U_i = \int_0^{\ell} K\frac{vV}{GA} \qquad (3.74)$$

donde

$K$ = factor de forma de la sección transversal (1.2 para secciones rectangulares, 10/9 para secciones circulares

y aproximadamente igual a 1 para vigas I y de patín ancho

$v$ = fuerza cortante producida por la carga virtual unitaria

$V$ = fuerza cortante producida por las cargas externas reales

$G$ = módulo de elasticidad por cortante

$A$ = área de la sección transversal

Y la correspondiente a momento torsionante en una sección circular es igual a

$$U_i = \frac{tT\ell}{GJ} \qquad (3.75)$$

donde

$t$ = momento torsionante producido por la carga virtual unitaria

$T$ = momento torsionante producido por las cargas externas reales

$J$ = momento polar de inercia

Como ejemplo de lo anterior, si se desea calcular la deflexión en una viga o en un marco por el método del trabajo virtual, incluyendo los efectos de las deformaciones producidas por cargas axiales y fuerzas cortantes, la ecuación 3.63 deberá sustituirse por:

$$\Delta = \int_0^{\ell} \frac{Mm(dx)}{EI} + \sum \frac{\mu S\ell}{AE} + \int_0^{\ell} K\frac{Vv}{GA} \qquad (3.76)$$

El primer término del segundo miembro dará las deformaciones por flexión (ecuación 3.63), el segundo término, las deformaciones por cargas axiales (ecuación 3.54), y el tercero, las deformaciones por fuerza cortante (ecuación 3.74).

## 3.8 Teorema de Maxwell y Ley de Betti

El Teorema de Maxwell, llamado también de las deformaciones recíprocas, establece que *la deflexión en un punto A de una estructura producida por una carga aplicada en otro punto B es igual a la deformación en el punto B producida por la misma carga aplicada en el punto A*. Por ejemplo, la deformación en el punto $B$ de la viga de la figura 3.19-a producida por la carga unitaria aplicada en el punto $A$, que se denominará $\Delta_{BA}$, es igual, según este teorema, a la deflexión en el punto $A$ de la viga de la figura 3.19-c producida por la carga unitaria aplicada en el punto $B$, $\Delta_{AB}$. Este teorema puede demostrarse por el método del trabajo virtual, como se indica a continuación.

Si se desea calcular $\Delta_{BA}$ por el método del trabajo virtual, se coloca una carga virtual unitaria en el punto $B$, como se muestra en la figura 3.19-*b*, y se aplica la ecuación 3.63. En este caso, $M$ será la ecuación de momentos flexionantes producidos por la carga real aplicada en el punto $A$, y $m$ será la ecuación de momentos flexionantes producidos por la carga virtual unitaria aplicada en el punto $B$. Se les llamará a estas ecuaciones $m_A$ y $m_B$, respectivamente, usando $m$ (minúscula) para indicar que son momentos producidos por cargas unitarias en los dos casos. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 3.63 y con esta notación:

$$\Delta_{BA} = \int_0^{\ell} \frac{m_A m_B\,(dx)}{EI} \qquad (3.77)$$

De manera similar, si se desea calcular $\Delta_{AB}$, se coloca la carga virtual en el punto $A$, como se muestra en la figura 3.19-*d*, $M$ será la ecuación de momentos producidos por la carga real aplicada en $B$, $m$ la ecuación de momentos producidos por la carga virtual

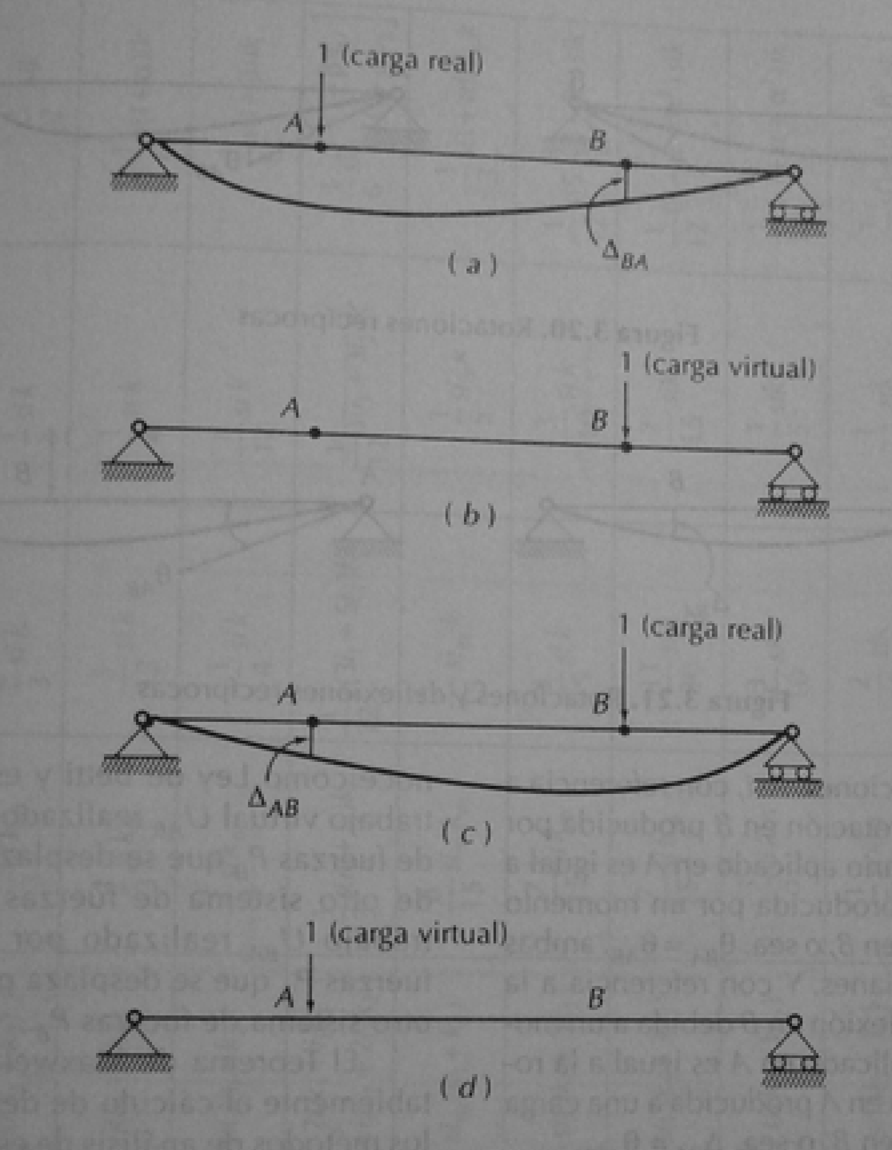



**Figura 3.19.** Teorema de Maxwell

aplicada en $A$, y la deflexión será, usando la misma notación:

$$\Delta_{AB} = \int_0^{\ell} \frac{m_B\, m_A(dx)}{EI} \qquad (3.78)$$

Como el producto de funciones $m_A m_B$ es igual al producto $m_B m_A$, entonces $\Delta_{AB}$ es igual a $\Delta_{BA}$, que es lo establecido por el Teorema de Maxwell. El teorema se ha demostrado para una carga real unitaria, pero si es válido para esta carga tiene que serlo para cualquiera. Las deformaciones producidas, como en la viga de la figura 3.19, por cargas unitarias se denominan *coeficientes de flexibilidad* ya que indican qué tanto se deforma o qué tan flexible es una viga bajo la acción de una carga unitaria. Suelen denominarse con la letra δ, así que la deformación en $B$ por la carga unitaria aplicada en $A$ será $\delta_{BA}$ y el Teorema de Maxwell se expresará en forma matemática como

$$\delta_{AB} = \delta_{BA} \qquad (3.79)$$

El teorema puede extenderse a rotaciones recíprocas y a combinaciones de

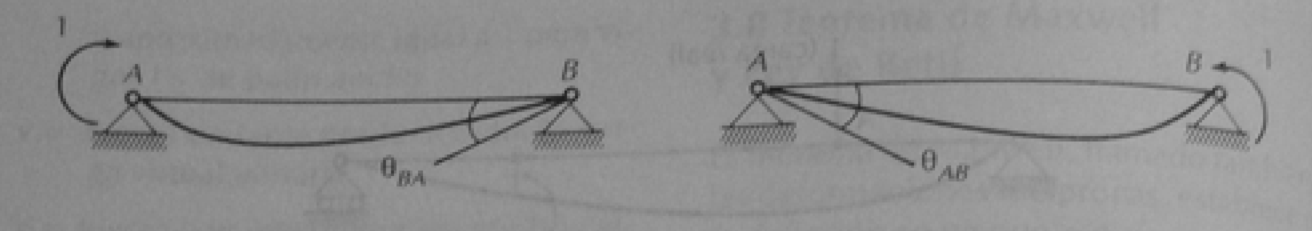



**Figura 3.20.** Rotaciones recíprocas

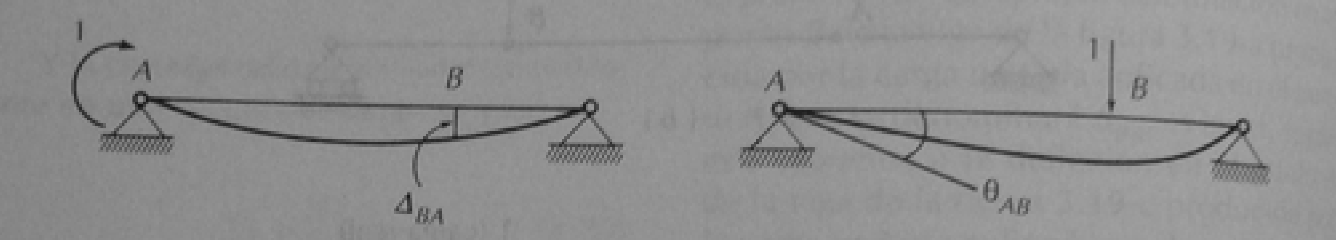



**Figura 3.21.** Rotaciones y deflexiones recíprocas

deflexiones y rotaciones. Así, con referencia a la figura 3.20, la rotación en *B* producida por un momento unitario aplicado en *A* es igual a la rotación en *A* producida por un momento unitario aplicado en *B*, o sea, $\theta_{BA} = \theta_{AB}$, ambas rotaciones en radianes. Y con referencia a la figura 3.21, la deflexión en *B* debida a un momento unitario aplicado en *A* es igual a la rotación en radianes en *A* producida a una carga unitaria aplicada en *B*, o sea, $\Delta_{BA} = \theta_{AB}$.

También puede generalizarse el Teorema de Maxwell al trabajo realizado por sistemas de fuerzas. Esta generalización se conoce como Ley de Betti y establece que el trabajo virtual $U_{AB}$ realizado por un sistema de fuerzas $P_B$ que se desplaza por la acción de otro sistema de fuerzas $P_A$ es igual al trabajo $U_{BA}$ realizado por un sistema de fuerzas $P_A$ que se desplaza por la acción de otro sistema de fuerzas $P_B$.

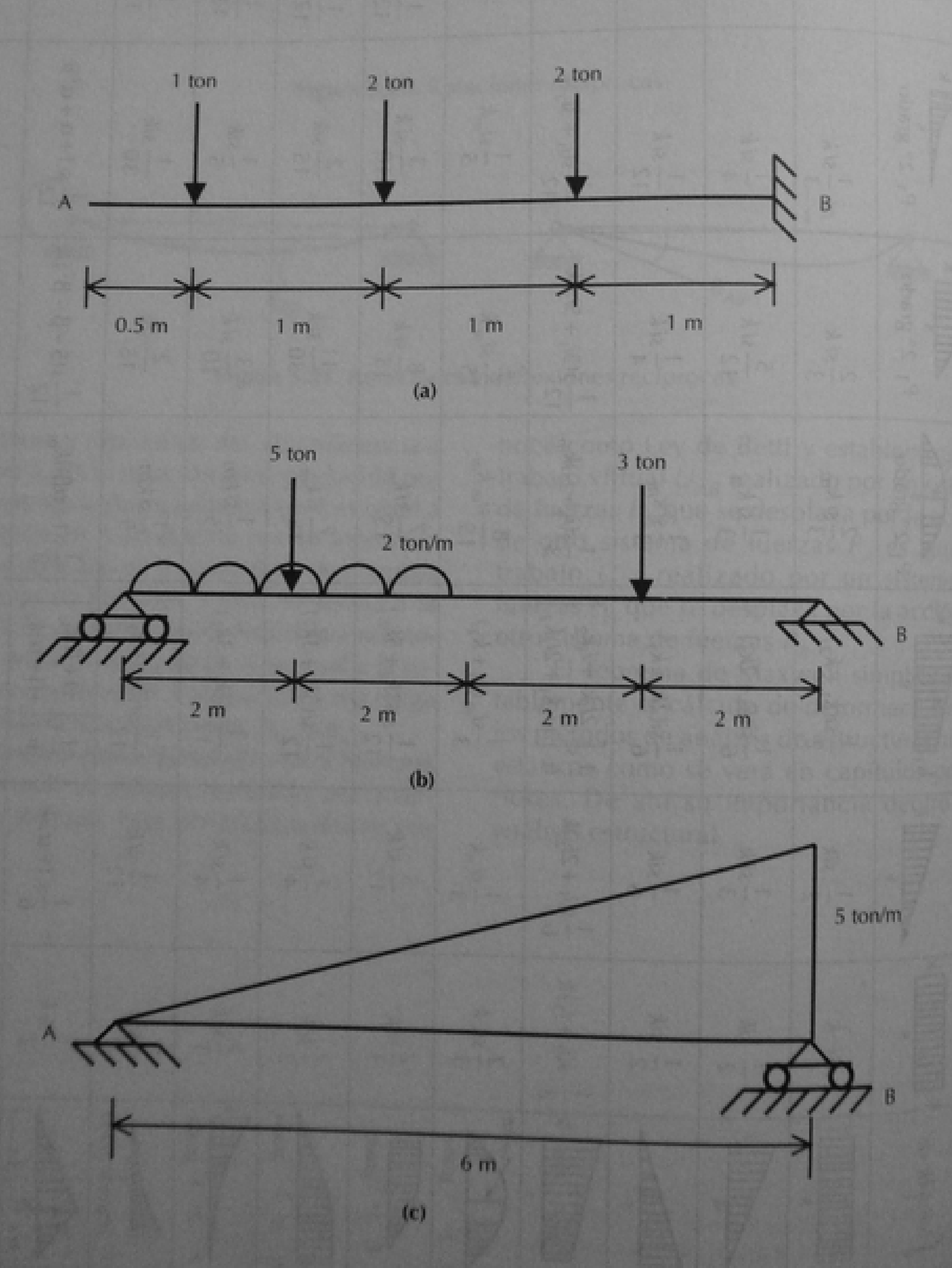
El Teorema de Maxwell simplifica notablemente el cálculo de deformaciones en los métodos de análisis de estructuras hiperestáticas como se verá en capítulos posteriores. De ahí su importancia dentro del análisis estructural.

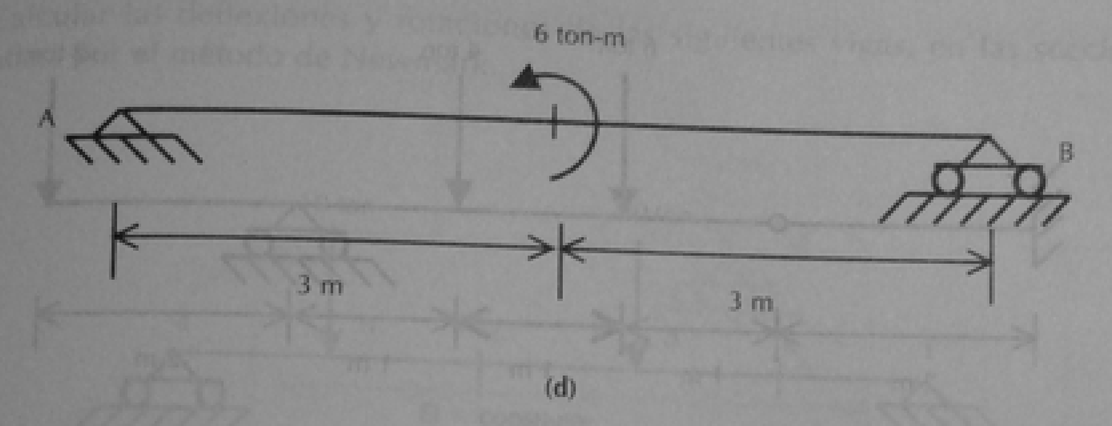
**Tabla 3.1.** Integrales de Mohr

| $\int Mi\, Mk\, ds$ | k k s | k s | $k_1$ $k_2$ s | k s $P_1$ 2° grado | k s $P_1$ 2° grado | k s $P_1$ 2° grado | k αs βs s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i i s | $si\ k$ | $\frac{1}{2}\ sik$ | $\frac{1}{2} si(k_1+k_2)$ | $\frac{2}{3} si\, k_m$ | $\frac{2}{3} si\, k$ | $\frac{1}{3} si\, k$ | $\frac{1}{2}\ sik$ |
| i s | $\frac{1}{2}\ sik$ | $\frac{1}{3} si\, k$ | $\frac{1}{6} si(k_1+2k_2)$ | $\frac{1}{3} si\, k_m$ | $\frac{5}{12} si\, k$ | $\frac{1}{4} si\, k$ | $\frac{1}{6} s(1+\alpha)ik$ |
| i s | $\frac{1}{2}\ sik$ | $\frac{1}{6} sik$ | $\frac{1}{6} si(2k_1+k_2)$ | $\frac{1}{3} si\, k_m$ | $\frac{1}{4} si\, k$ | $\frac{1}{12} si\, k$ | $\frac{1}{6} s(1+\beta)ik$ |
| $i_1$ $i_2$ s | $\frac{1}{2}\ s(i_1+i_2)k$ | $\frac{1}{6} s(i_1+2i_2)k$ | $\frac{1}{6} s\begin{bmatrix} 2i_1k_1+i_1k_2 \\ +i_2k_1+2i_2k_2 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{3} s(i_1+i_2)k_m$ | $\frac{1}{12} s(3i_1+5i_2)k$ | $\frac{1}{12} s(i_1+3i_2)k$ | $\frac{1}{6} sk\begin{bmatrix} (1+\beta)i_1 \\ +(1+\alpha)i_2 \end{bmatrix}$ |
| im P. 2° s grado | $\frac{2}{3} si_m k$ | $\frac{1}{3} si_m k$ | $\frac{1}{3} si_m(k_1+k_2)$ | $\frac{8}{15} si_m\, k_m$ | $\frac{7}{15} si_m\, k$ | $\frac{1}{5} si_m k$ | $\frac{1}{3} s(1+\alpha\beta)i_m k$ |
| i P. 2° s grado | $\frac{2}{3} si\, k$ | $\frac{5}{12} si\, k$ | $\frac{1}{12} si(3k_1+5k_2)$ | $\frac{7}{15} si\, k_m$ | $\frac{8}{15} si\, k$ | $\frac{3}{10} si\, k$ | $\frac{1}{12} s(5-\beta-\beta^2)\, sik$ |
| i P. 2° s grado | $\frac{2}{3} si\, k$ | $\frac{1}{4} si\, k$ | $\frac{1}{12} si(5k_1+3k_2)$ | $\frac{7}{15} si\, k_m$ | $\frac{11}{30} si\, k$ | $\frac{2}{15}\ sik$ | $\frac{1}{12}(5-\alpha-\alpha^2)\, sik$ |
| i P 2° s grado | $\frac{1}{3} si\, k$ | $\frac{1}{4} si\, k$ | $\frac{1}{12} si(k_1+3k_2)$ | $\frac{1}{5} si\, km$ | $\frac{3}{10} si\, k$ | $\frac{1}{5}\ sik$ | $\frac{1}{12} s(1+\alpha+\alpha^2)ik$ |
| i s P. Segundo grado | $\frac{1}{3} si\, k$ | $\frac{1}{12} si\, k$ | $\frac{1}{12} si(3k_1+k_2)$ | $\frac{1}{5} si\, km$ | $\frac{2}{15}\ sik$ | $\frac{1}{30}\ sik$ | $\frac{1}{12} s(1+\beta+\beta^2)ik$ |
| i αs s βs | $\frac{1}{2} si\, k$ | $\frac{1}{6} s(1+\alpha)ik$ | $\frac{1}{6} si\begin{bmatrix} (1+\beta)k_1 \\ +(1+\alpha)k_2 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{3} s(1+\alpha\beta)ik_m$ | $\frac{1}{12} s(5-\beta-\beta^2)ik$ | $\frac{1}{12} s(1+\alpha+\alpha^2)i$ | $\frac{1}{3} si\, k$ |
| $\int k^2 ds$ | $sk^2$ | $\frac{1}{3} si\, k^2$ | $\frac{1}{3} s[k_1^2+k_2^2+k_1k_2]$ | $\frac{8}{15} sk^2\, m$ | $\frac{8}{15} sk^2$ | $\frac{1}{5} sk^2$ | $\frac{1}{3} sk^2$ |

## PROBLEMAS

3.1 Usando el método de integración calcular las rotaciones en los extremos, las deflexiones en el centro del claro y las deflexiones máximas de las siguientes vigas. Considérese *EI* constante en todos los casos:

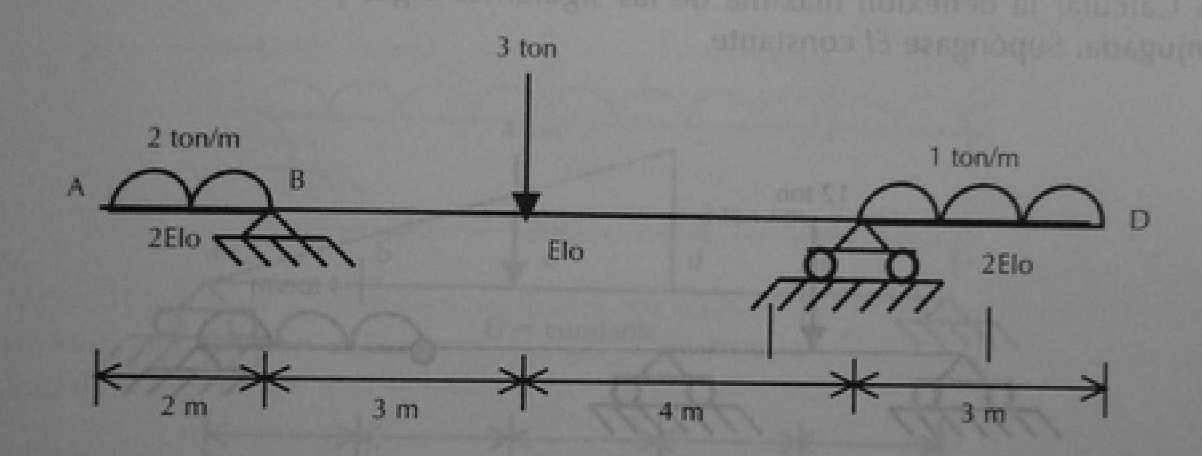




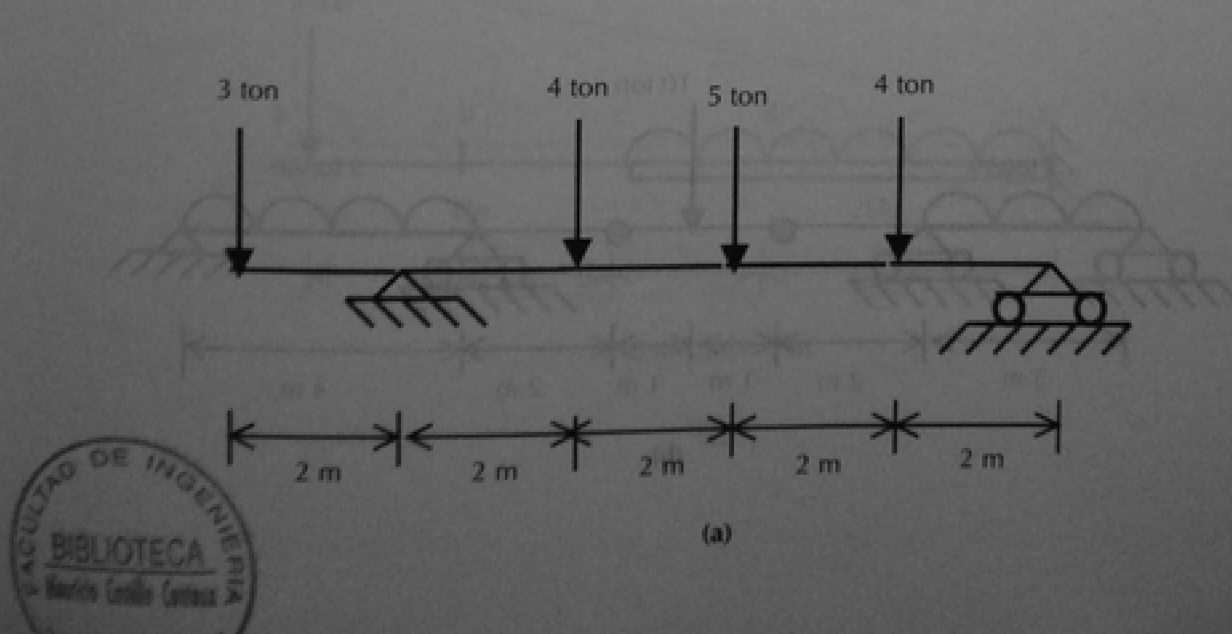
(d)

3.2 Resolver el problema 3.1 usando los teoremas área-momento.

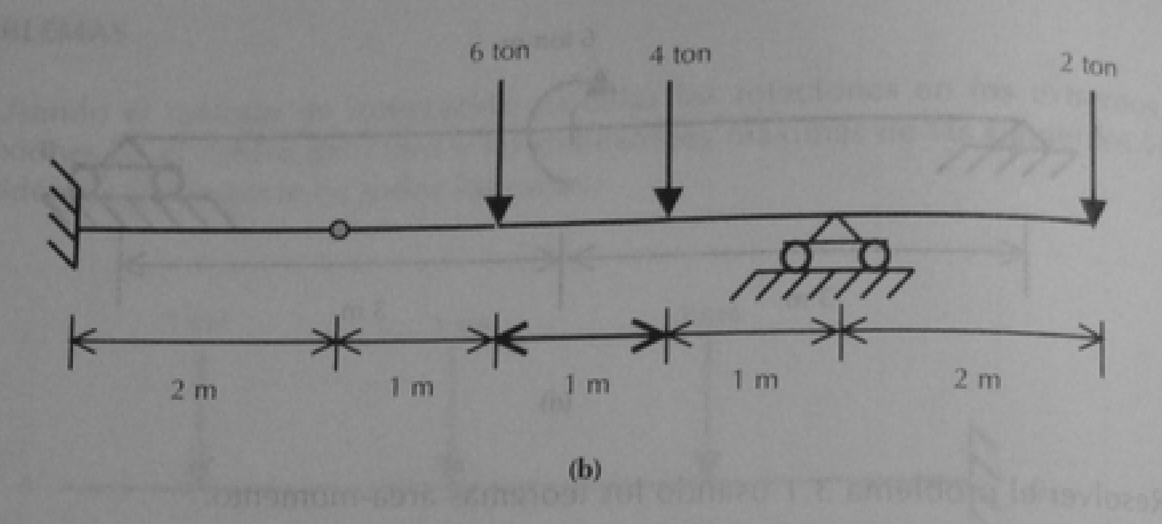
3.3 Calcular la deflexión y la rotación en los extremos de los voladizos de la siguiente viga usando los teoremas área-momento.




3.4 Calcular las rotaciones y las deflexiones en los puntos de aplicación de cargas concentradas en las siguientes vigas usando el método de la viga conjugada. Supóngase *EI* constante.



(a)




(b)

3.5 Calcular la deflexión máxima de las siguientes vigas por el método de la viga conjugada. Supóngase *EI* constante.

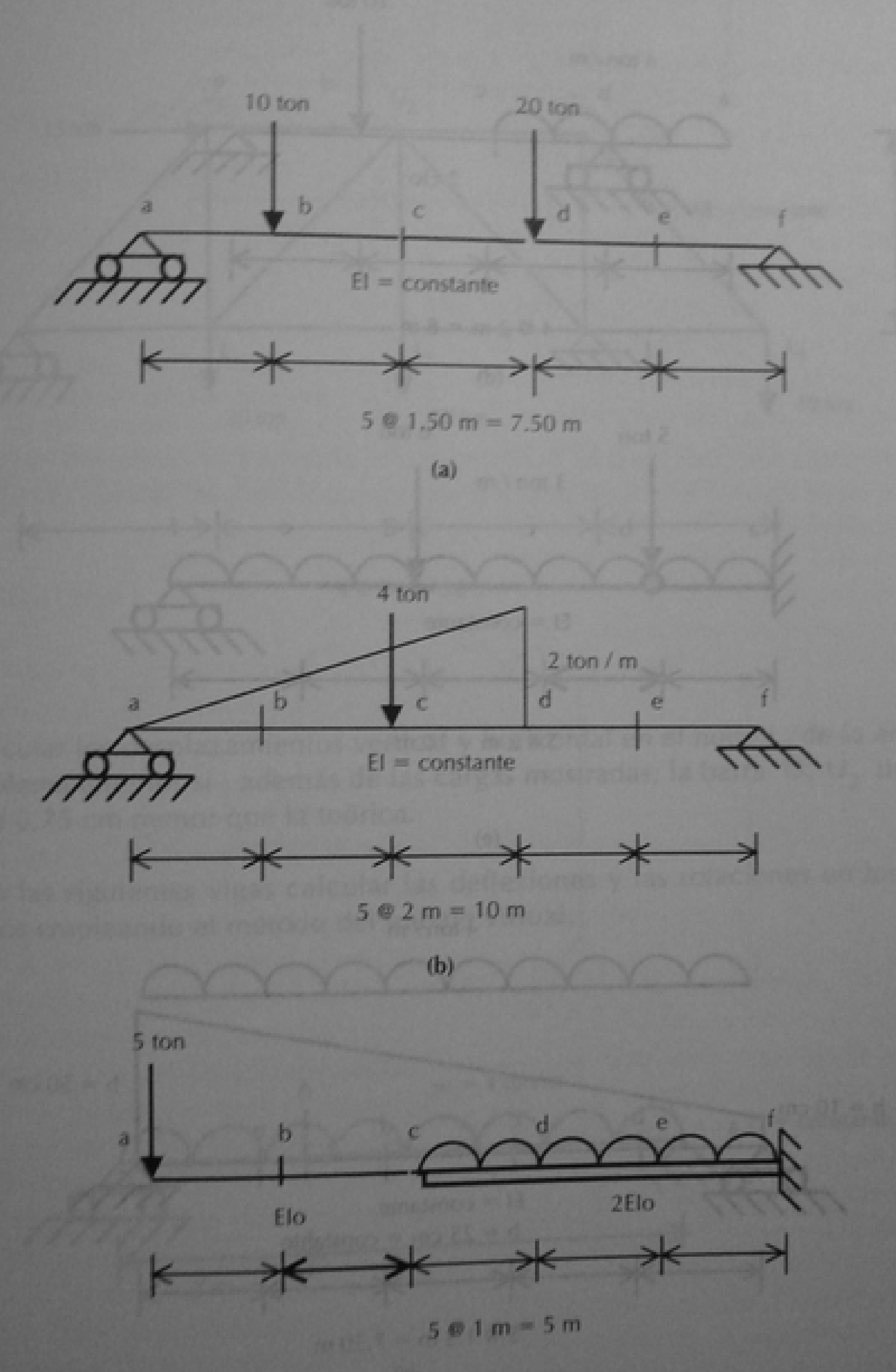
12 ton
4 ton/m
3 m 3 m 4 m 4 m

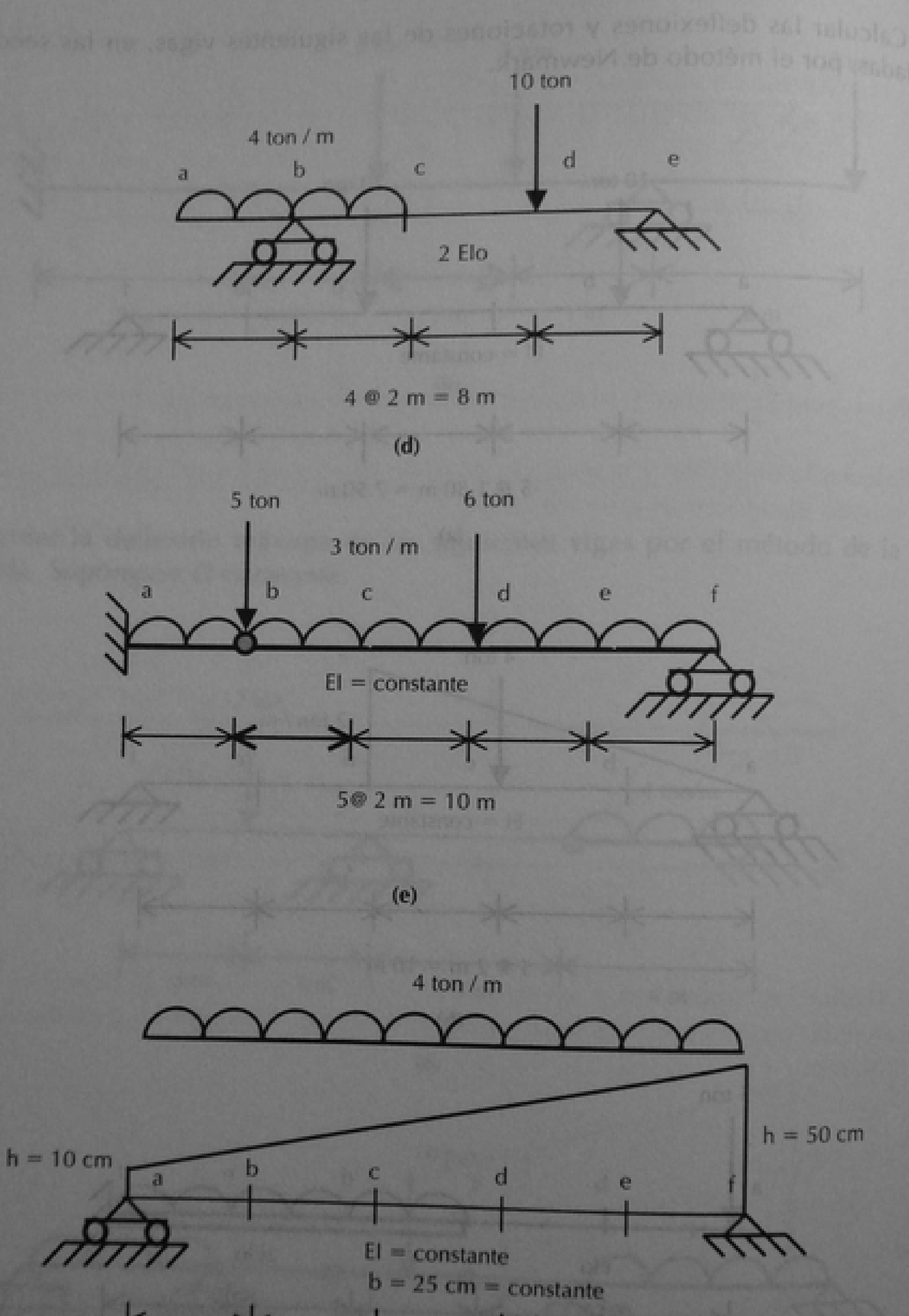
(a)

10 ton
3 ton/m
5 ton/m
3 m 2 m 1 m 1 m 2 m 4 m

(b)

3.6 Calcular las deflexiones y rotaciones de las siguientes vigas, en las secciones señaladas, por el método de Newmark.



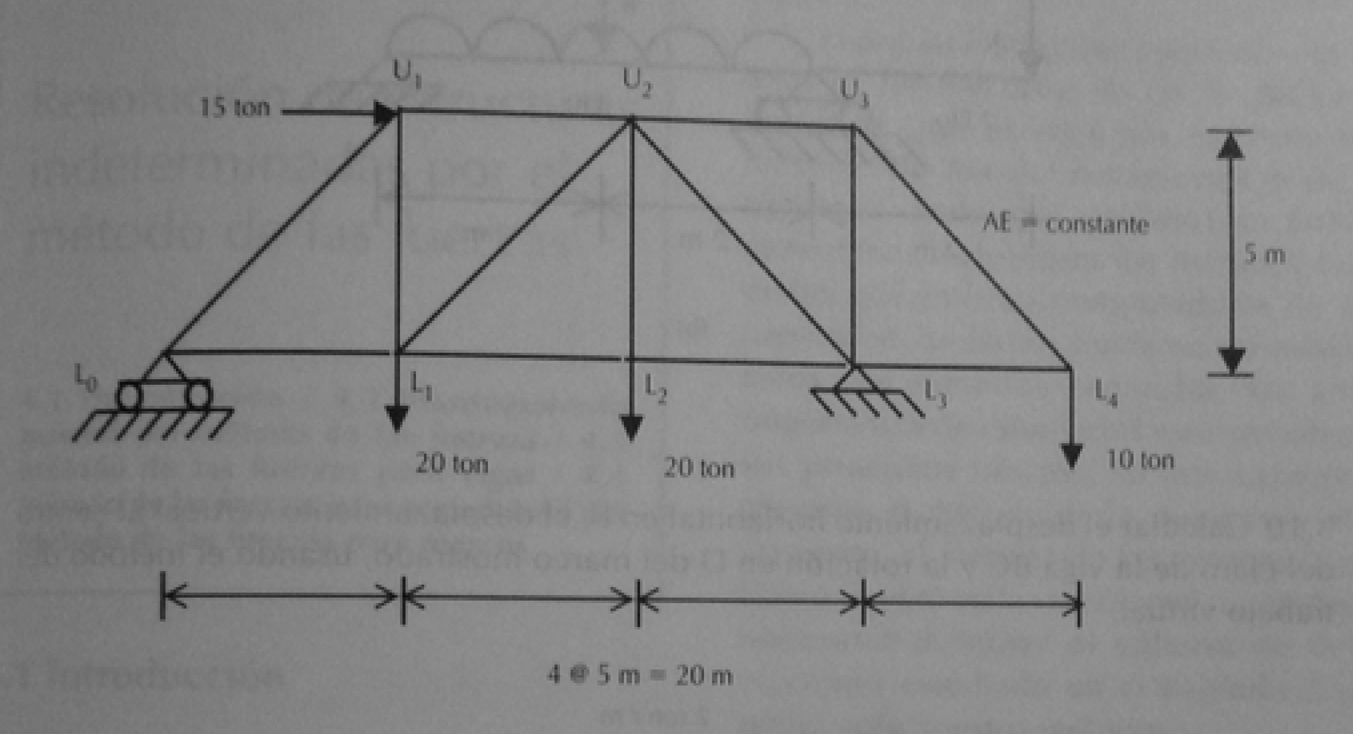

10 ton
4 ton / m
a
b
c
d
e
2 EIo
4 @ 2 m = 8 m
5 ton
6 ton
3 ton / m
a
b
c
d
e
f
EI = constante
5@ 2 m = 10 m
4 ton / m
h = 10 cm
h = 50 cm
a
b
c
d
e
f
EI = constante
b = 25 cm = constante
5 @ 1.5 m = 7.50 m

(d)

(e)

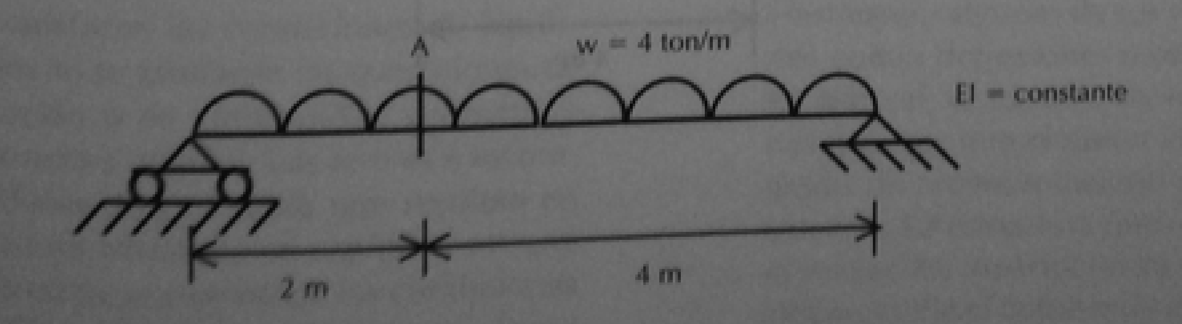
(f)

3.7 Calcular los desplazamientos vertical y horizontal en el nudo $L_4$ usando el método del trabajo virtual.

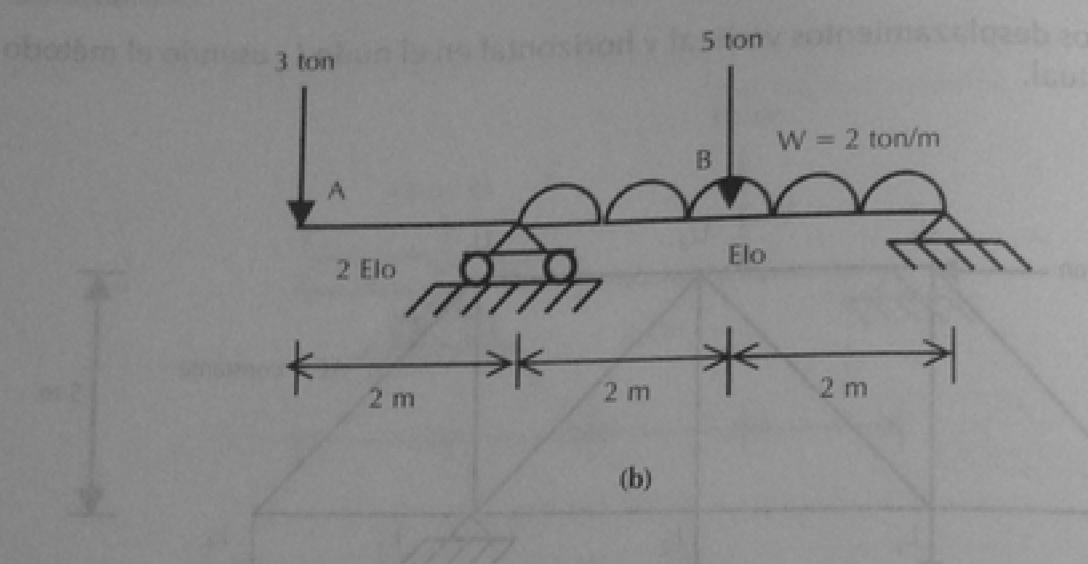



3.8 Calcular los desplazamientos vertical y horizontal en el nudo $L_2$ de la armadura del problema anterior si , además de las cargas mostradas, la barra $U_1 U_2$ tiene una longitud 0.75 cm menor que la teórica.

3.9 Para las siguientes vigas calcular las deflexiones y las rotaciones en los puntos señalados empleando el método del trabajo virtual.

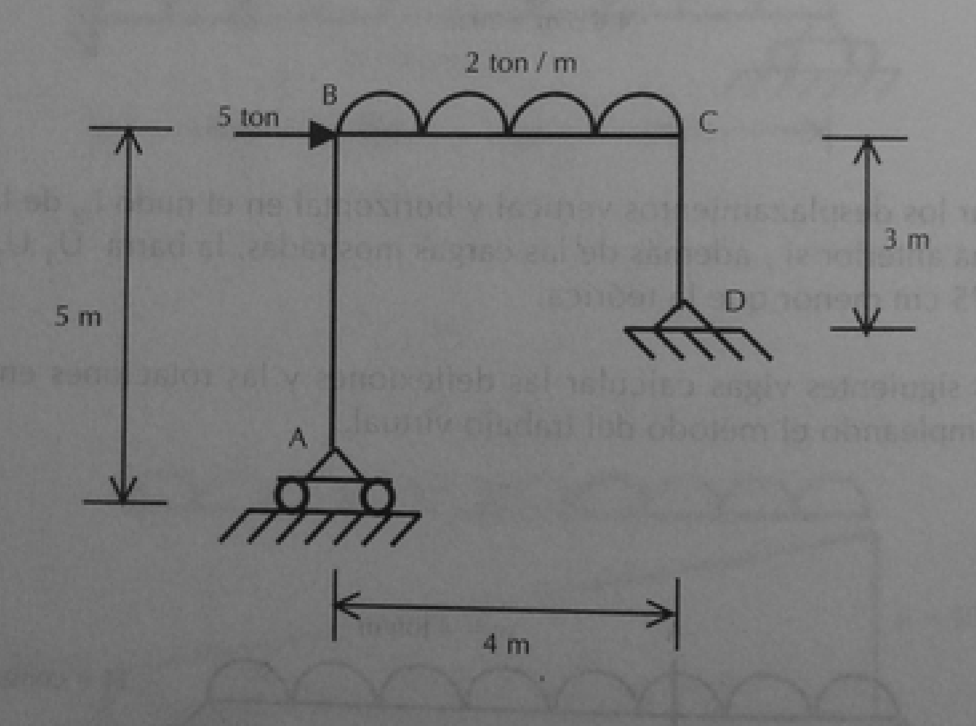



(a)




(b)

3.10 Calcular el desplazamiento horizontal en B, el desplazamiento vertical al centro del claro de la viga BC y la rotación en D del marco mostrado, usando el método del trabajo virtual.



# CAPÍTULO 4

# Resolución de estructuras indeterminadas por el método de las fuerzas



## 4.1 Introducción

En el capítulo 2 se estableció que las estructuras isostáticas pueden resolverse a partir de las ecuaciones de equilibrio de la Estática, mientras que las estructruras hiperestáticas requieren, para su solución, de ecuaciones adicionales ya que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio. Existen dos enfoques generales para la resolución de estructuras hiperestáticas. En el primero, la estructura por analizar se convierte en una estructura isostática en la que se satisfacen las condiciones de equilibrio, pero no se satisfacen las condiciones de deformación o de continuidad geométrica de la estructura original. Los errores o incompatibilidades de geometría que resultan en la estructura isostática se corrigen, en una segunda etapa, conservando las condiciones de equilibrio. En el segundo enfoque, la estructura hiperestática se transforma en otra estructura en la que se satisfacen las condiciones de deformación o de continuidad geométrica, pero no las condiciones de equilibrio estático. En una segunda etapa, se corrigen las condiciones de equilibrio sin alterar las condiciones de continuidad geométrica.

El primer enfoque se conoce como *método de las fuerzas o de las flexibilidades*, mientras que el segundo se denomina *método de las deformaciones o de las rigideces*. Todos los métodos de análisis estructural, incluyendo los métodos matriciales que utilizan computadoras de gran capacidad, se basan fundamentalmente en estos dos métodos generales. De ahí la importancia de estudiarlos y de comprender sus principios básicos. En este capítulo se presenta el método de las fuerzas, y en el siguiente, el método de las deformaciones. Como se verá en las secciones siguientes, es necesario dominar el cálculo de deformaciones estudiado en el capítulo 3 para poder aplicar estos métodos.

## 4.2 Planteamiento general del método de las fuerzas

Existen numerosas variantes en la aplicación del método, pero en todas ellas se distinguen los siguientes pasos.

*a)* La estructura original hiperestática se transforma en una estructura isostática eliminando algunas de sus restricciones contra deflexiones o rotaciones. En general, el número de restricciones que hay que eliminar es igual al grado de indeterminación de la estructura. La estructura que resulta de eliminar las restricciones hiperestáticas recibe el nombre de *estructura isostática fundamental*.

*b)* Se calculan las deformaciones de la estructura isostática fundamental bajo la acción de las mismas cargas que actúan en la estructura hiperes-

tática. Estas deformaciones se denominan *incompatibilidades geométricas* porque no existen en la estructura original en los puntos en que se eliminaron las restricciones.

*c)* Se aplican fuerzas arbitrarias en las secciones donde se eliminaron las restricciones y se calculan las deformaciones producidas por estas fuerzas correctivas. Es necesario aplicar una fuerza por cada restricción eliminada en la estructura hiperestática y calcular por separado las deformaciones debidas a cada fuerza.

*d)* Se plantea un sistema de ecuaciones para determinar el valor que deben tener las fuerzas correctivas de tal manera que se corrijan las incompatibilidades geométricas.

*e)* Se obtienen las acciones finales (reacciones, fuerzas cortantes, fuerzas normales, momentos) sumando las que corresponden a la estructura isostática fundamental y las producidas por las fuerzas correctivas.

En las secciones siguientes se ilustra la aplicación del método de las fuerzas a vigas, armaduras y marcos a través de varios ejemplos.

## 4.3 Método de las fuerzas para vigas

### *4.3.1 Planteamiento general para vigas*

Antes de iniciar la resolución, conviene calcular el grado de indeterminación de la viga a resolver con los métodos expuestos en la sección 2.6.1. Esto permite saber cuántas restricciones hiperestáticas se deben eliminar de la viga. También permite verificar, como se verá posteriormente, el número de ecuaciones simultáneas que deben plantearse para resolver el problema; desde luego que si la viga es de un solo grado de indeterminación, en vez de un sistema de ecuaciones se plantea una sola ecuación. Las restricciones hiperestáticas que se eliminan suelen ser apoyos de las vigas o continuidades de las mismas sobre los apoyos. En el primer caso, se quitan apoyos de tal manera que el número de restricciones en los apoyos sea igual al número de ecuaciones de equilibrio, es decir, dos ecuaciones si son cargas paralelas y tres, si no lo son. En el segundo caso, lo que se hace es introducir articulaciones internas en las vigas, generalmente sobre los apoyos interiores.

### *4.3.2 Vigas de varios claros sobre apoyos rígidos*

**Ejemplo 4.1**

Se resuelve en este ejemplo una viga continua de cuatro claros, con una carga vertical en uno de los claros. Como se tienen 5 incógnitas de reacción y 2 ecuaciones de equilibrio, la viga tiene un grado de indeterminación de 3 (sección 2.6.).

En el paso *a*), la viga hiperestática se ha transformado en una isostática eliminando los tres apoyos interiores. Pudo haberse eliminado otro grupo de tres reacciones redundantes, pero tal como se hizo resulta más sencillo el cálculo de deformaciones, por tratarse de una viga libremente apoyada en sus extremos. La elección de la isostática es importante porque la labor numérica puede simplificarse significativamente seleccionando una isostática conveniente.

Después se presentan en el paso *b*) las deflexiones de la viga isostática en las secciones en las que se eliminaron las reacciones redundantes, o sea, en las secciones *B*, *C* y *D*, bajo las cargas de la viga original. El

cálculo de deflexiones, $\Delta$, puede hacerse por cualquiera de los métodos estudiados en el capítulo 3. En este ejemplo se utilizó el método de la viga conjugada. Estas deflexiones son las incompatibilidades geométricas porque en la viga original no hay deflexiones en estas secciones ya que las impiden los apoyos. El cálculo de deflexiones por el método de la viga conjugada se ha explicado con detalle en la sección 3.5 por lo que no se comenta aquí con más amplitud. Sin embargo, se presentan los cálculos completos al final del ejemplo con el fin de no interrumpir la explicación general del método.

En el paso *c*) se aplican a la viga isostática cargas unitarias en las secciones *B*, *C* y *D* y se calculan las deflexiones, $\delta$, correspondientes a cada carga, en cada sección. Nótese que estas deflexiones tienen un doble índice. El primero señala la sección en que se calcula la deflexión, y el segundo, la sección en que se aplica la carga. Por ejemplo, la deflexión $\delta_{BC}$ es la deflexión en la sección *B* producida por una carga aplicada en la sección *C*. Se mencionó antes que las cargas aplicadas en este paso eran arbitrarias, es decir, que podían tener cualquier valor. Se acostumbra hacerlas unitarias ya que esto simplifica los cálculos. También pueden aplicarse en cualquier sentido, o sea, se pueden aplicar hacia arriba o hacia abajo. En este ejemplo se han aplicado con el mismo sentido de la carga de la viga original. También al final del ejemplo se incluyen los cálculos de las deflexiones correspondientes a este paso.

Para cumplir con las condiciones de compatibilidad de deformaciones de la viga original es necesario que las deflexiones finales en las secciones *B*, *C* y *D* sean nulas. Esto podría lograrse si las cargas aplicadas en el paso *c*, en vez de ser unitarias tuviesen los mismos valores y los mismos sentidos de las reacciones en las secciones mencionadas. Para determinar estos valores y los sentidos correspondientes se plantean entonces, en el paso *d*, tres ecuaciones de compatibilidad geométrica que expresan precisamente que las deflexiones totales en las secciones *B*, *C* y *D* son nulas. Se obtiene un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las reacciones $X_B$, $X_C$ y $X_D$. Resolviendo este sistema se calculan las reacciones $X_B$, $X_C$ y $X_D$ y con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_E = 0$ se calculan las otras dos reacciones $X_E$ y $X_A$. Ya que todos los valores de las deflexiones están en función de *EI* y este valor es constante en toda la viga, se puede eliminar al plantear el sistema de ecuaciones. Obsérvese que los valores de $X_B$ y $X_C$ resultaron negativos, mientras que el de $X_D$ resultó positivo. Esto quiere decir que el sentido que se supuso para la fuerza unitaria en la sección *D*, en el paso *c*, fue correcto y la reacción correspondiente actúa hacia abajo. En cambio, el sentido que se supuso para las fuerzas unitarias en las secciones *B* y *C* fue incorrecto y las reacciones son, por lo tanto, hacia arriba. Los signos de las reacciones en *A* y en *E* quedan determindos al resolver las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_E = 0$.

Es importante visualizar el significado de cada una de las ecuaciones del sistema planteado en el paso *d*. Así, la primera ecuación expresa que si se suma la deflexión en el punto *B* de la viga isostática fundamental, $\Delta_B$, con las deflexiones en el mismo punto producidas por las cargas unitarias aplicadas en *B*, *C* y *D*, $\delta_{BB}$, $\delta_{BC}$ y $\delta_{BD}$, respectivamente, la deflexión final debe ser nula, siempre que las deflexiones producidas por las cargas unitarias se multipliquen por los valores reales de las reacciones. Estos valores son las incógnitas que hay que despejar en el sistema de ecuaciones. La segunda ecuación expresa lo mismo, pero en relación al punto *C*, y la

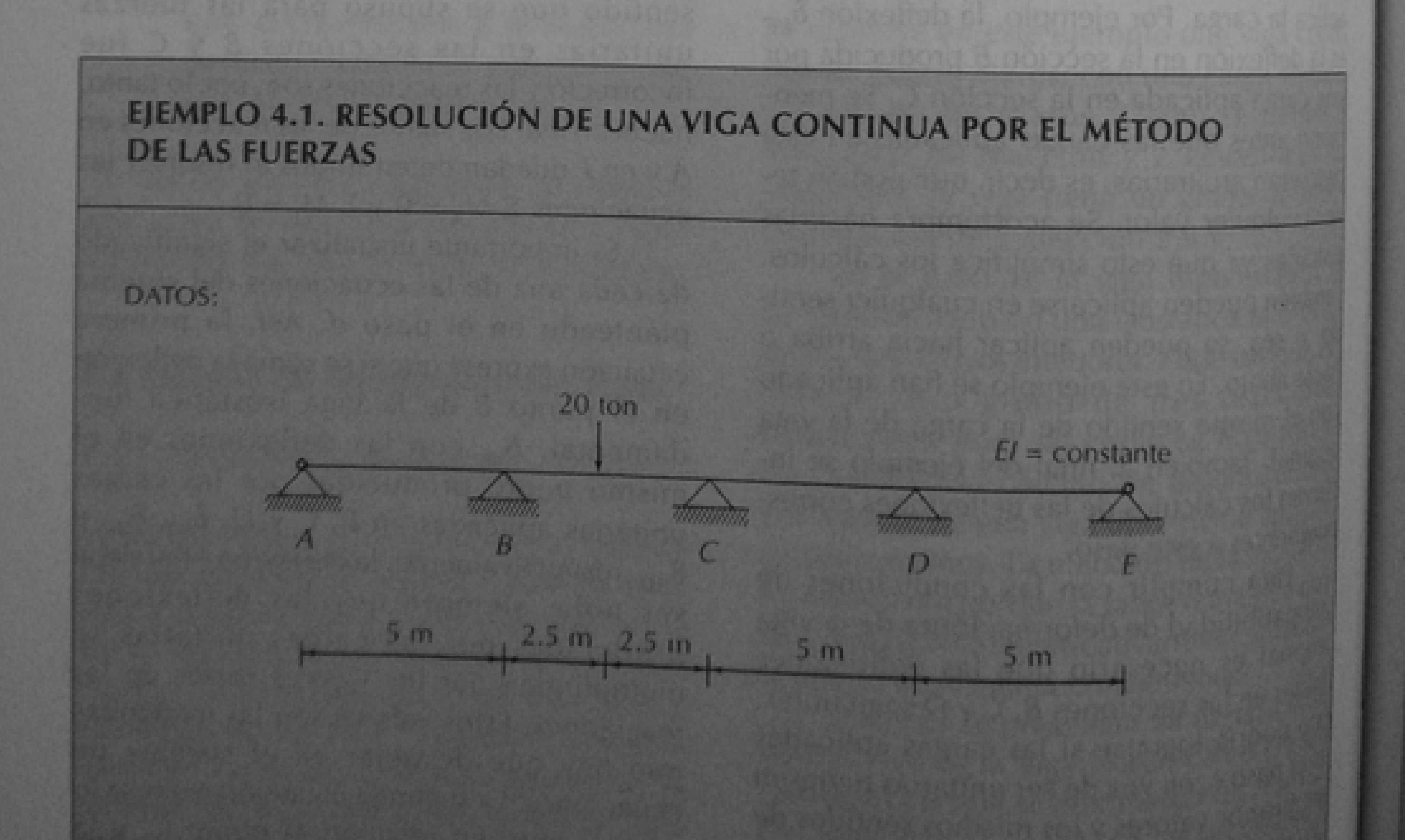
tercera, en relación al punto *D*. Visto de otra manera, si se conociesen de antemano los valores de las reacciones, y se cargase la isostática fundamental con la carga externa de la viga hiperestática y con cargas iguales a las reacciones en *B*, *C* y *D*, los valores finales de las deflexiones en los punto *B*, *C* y *D* serían nulos. Como no se conocen los valores de las reacciones, se carga la isostática fundamental con cargas unitarias y las deflexiones resultantes se multiplican por las incógnitas que son dichos valores.

En la viga de este ejemplo, la isostática fundamental con la carga unitaria aplicada en *B* resulta simétrica a la isostática fundamental con la carga unitaria aplicada en *D*, como puede verse en los croquis de los casos 2 y 4 del anexo del ejemplo. Por esta razón, $\delta_{BD}$ resulta igual a $\delta_{DB}$. Sin embargo, debe notarse que esta igualdad existe aun en vigas no simétricas, por el Teorema de Maxwell expuesto en la sección 3.8. Así, en el ejemplo ha resultado $\delta_{CB}$ igual a $\delta_{BC}$, aunque en este caso no haya simetría. En general, el Teorema de Maxwell permite reducir notablemente el número de cálculos de deflexiones, o bien, puede utilizarse como comprobación de los cálculos.

Ya que se tienen las cinco reacciones, pueden determinarse los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la misma manera que en vigas isostáticas. Para el de fuerza cortante, se suman las fuerzas a la izquierda de cualquier sección, y para el de momento flexionante se suman los momentos producidos por las fuerzas a la izquierda de cualquier sección o a la derecha con signo cambiado. En el ejemplo se muestran estos diagramas. Al trazar el diagrama de fuerza cortante se pueden comprobar los valores obtenidos para las reacciones. Si se empieza a trazar el diagrama desde la reacción *A* hacia la derecha, al llegar al extremo *E* se debe tener una fuerza cortante nula.

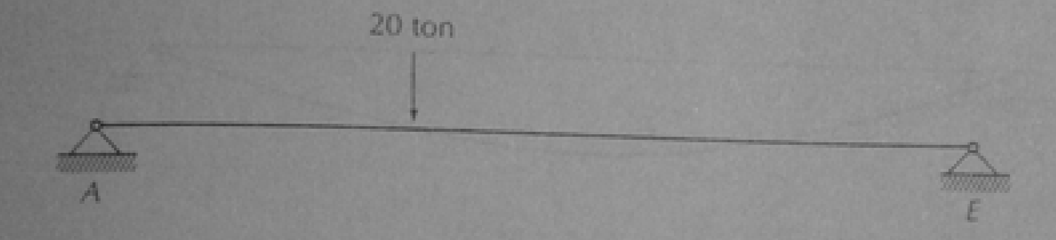
## EJEMPLO 4.1. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

DATOS:

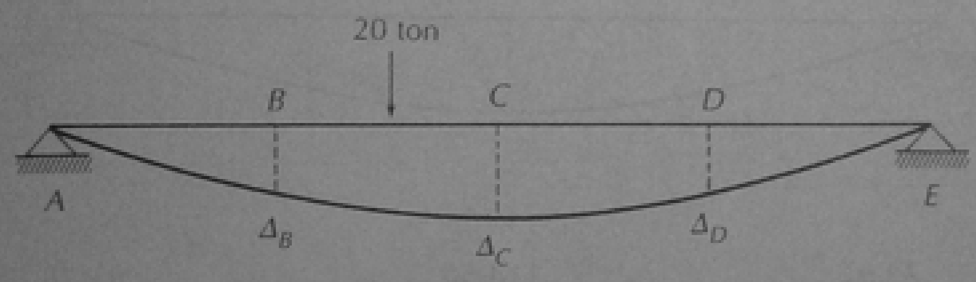


**EJEMPLO 4.1** ***(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento de la viga isostática fundamental.

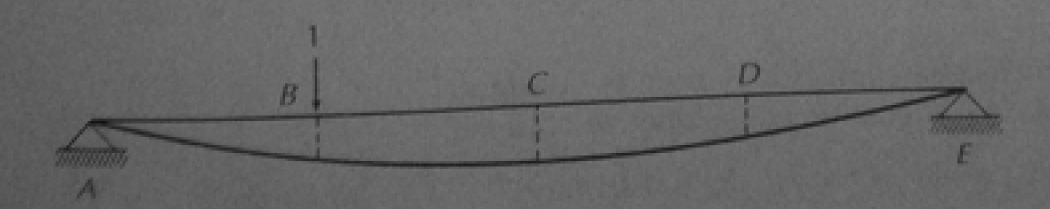



Paso *b*) Deformaciones de la viga isostática (los cálculos se presentan al final del ejemplo).



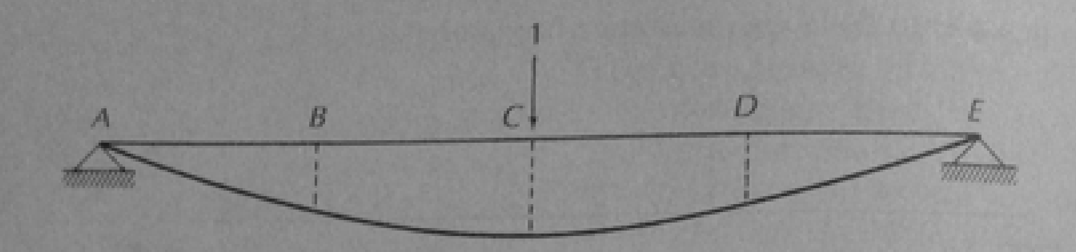

$$\Delta_B = \frac{2278.63}{EI} \qquad \Delta_C = \frac{3046.90}{EI} \qquad \Delta_D = \frac{1992.20}{EI}$$

Paso *c*) Aplicación de cargas unitarias y defexiones correspondientes (los cálculos se presentan al final del ejemplo).

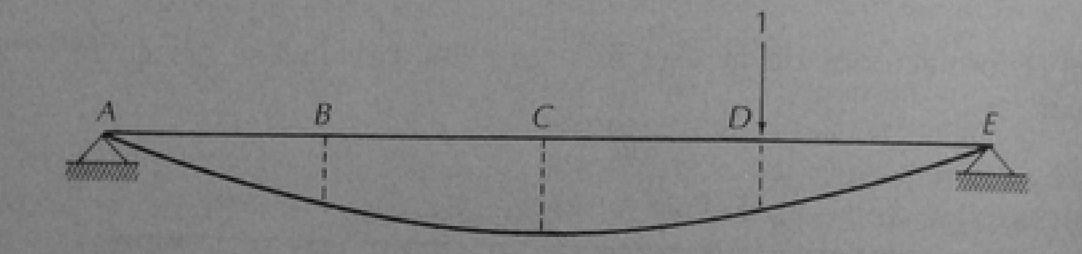



$$\delta_{BB} = \frac{93.75}{EI} \qquad \delta_{CB} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DB} = \frac{72.92}{EI}$$

**EJEMPLO 4.1** ***(continuación)***




$$\delta_{BC} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{CC} = \frac{166.67}{EI} \qquad \delta_{DC} = \frac{114.58}{EI}$$




$$\delta_{BD} = \frac{72.92}{EI} \qquad \delta_{CD} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DD} = \frac{93.75}{EI}$$

Paso *d*) Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas.

$$2278.63 + 93.75\ X_B + 114.58\ X_C + 72.92\ X_D = 0$$

$$3046.90 + 114.58\ X_B + 166.67\ X_C + 114.58\ X_D = 0$$

$$1992.20 + 72.92\ X_B + 114.58\ X_C + 93.75\ X_D = 0$$

El término *EI* se ha eliminado porque es constante.
Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

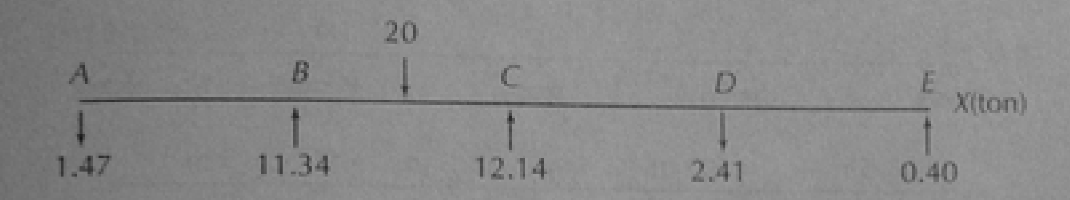
$$X_B = -11.34 \text{ ton}\uparrow, \quad X_C = -12.14 \text{ ton}\uparrow, \quad X_D = +2.41 \text{ ton}\downarrow$$

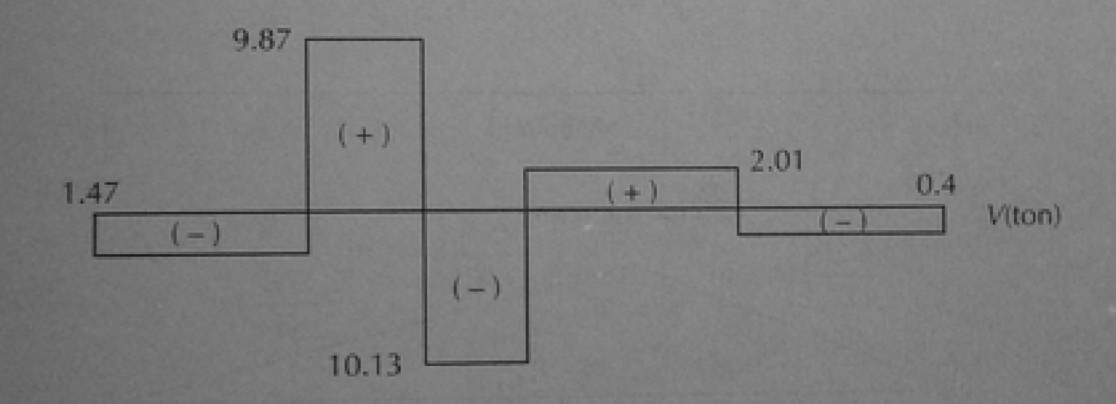
$$\text{De}\sum M_A = 0, \quad X_E = 0.4 \text{ ton}\uparrow$$

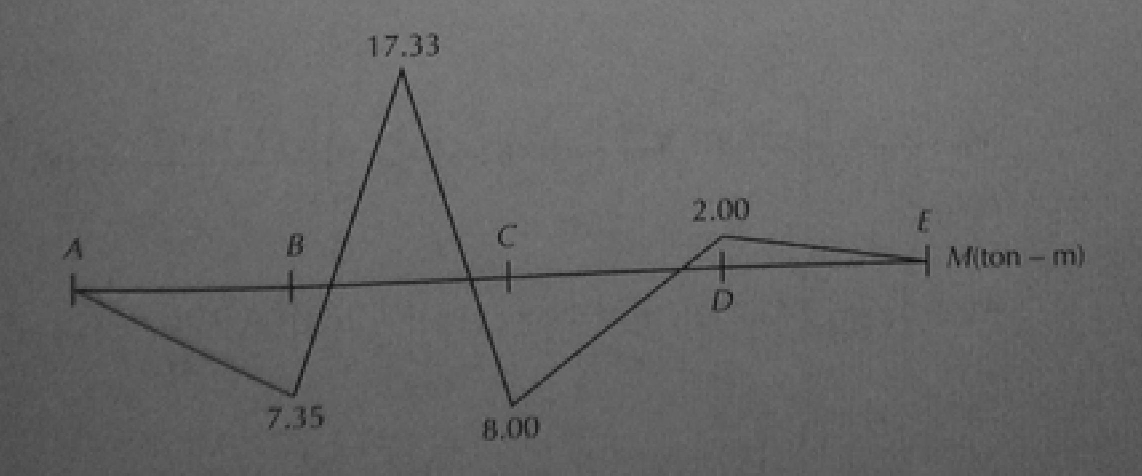
$$\text{De}\sum M_E = 0, \quad X_A = 1.47 \text{ ton}\downarrow$$

**EJEMPLO 4.1** ***(continuación)***

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



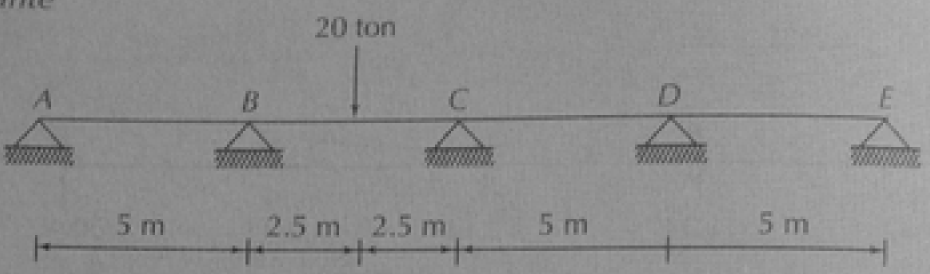



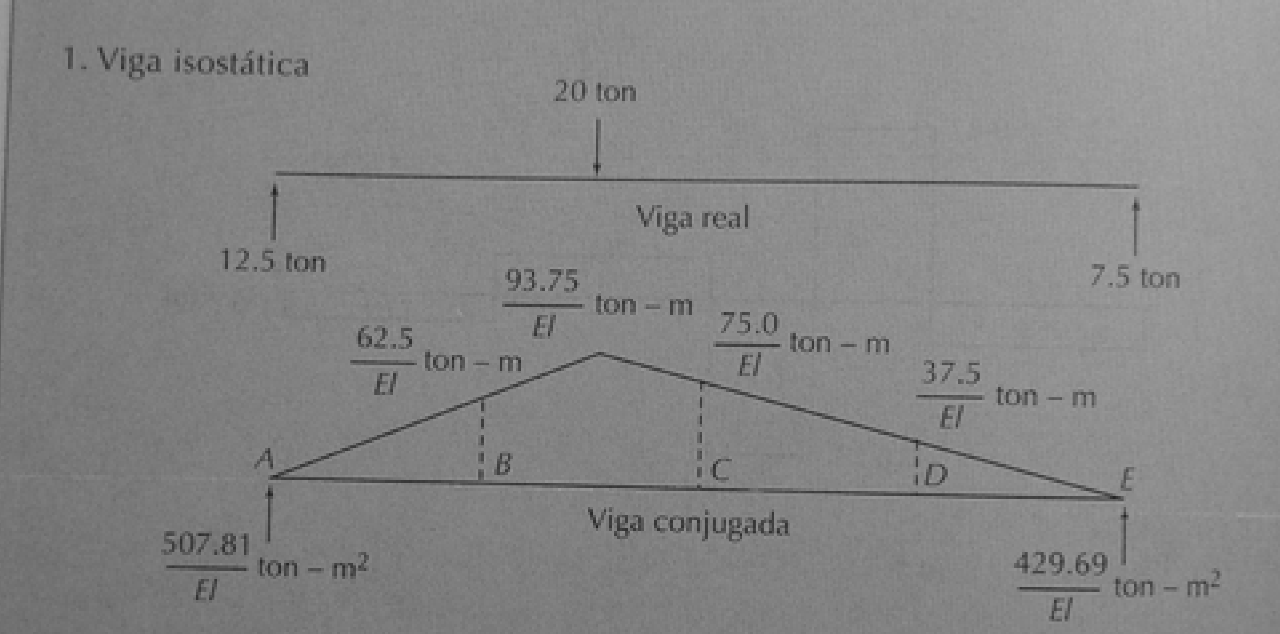
**EJEMPLO 4.1 *(continuación)***

ANEXO. CÁLCULO DE DEFLEXIONES

*EI = constante*




1. Viga isostática



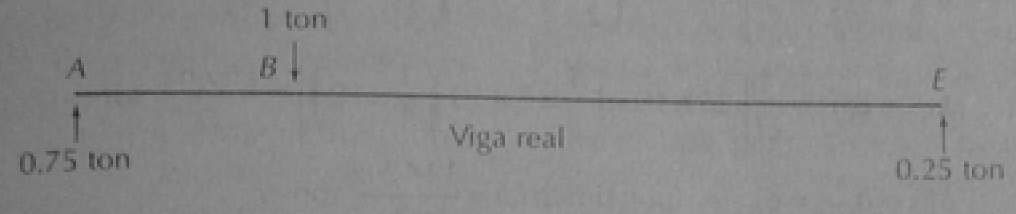

$$M_B = \Delta_B = \frac{1}{EI}\left[507.81\times5-\left(\frac{1}{2}\times5\times62.5\right)\left(\frac{1}{3}\times5\right)\right]=\frac{2278.63}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

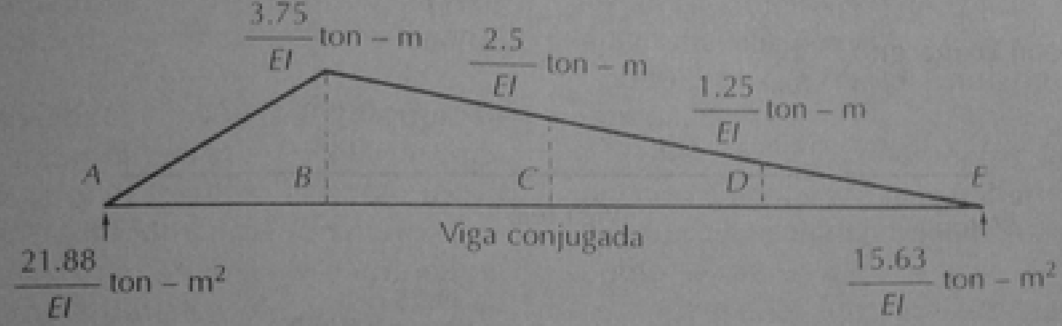
$$M_C = \Delta_C = \frac{1}{EI}\left[429.69\times10-\left(\frac{1}{2}\times75\times10\right)\left(\frac{1}{3}\times10\right)\right]=\frac{3046.90}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_D = \Delta_D = \frac{1}{EI}\left[429.69\times5-\left(\frac{1}{2}\times5\times37.5\right)\left(\frac{1}{3}\times5\right)\right]=\frac{1992.20}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

**EJEMPLO 4.1 *(continuación)***

2. Viga con carga en $B$



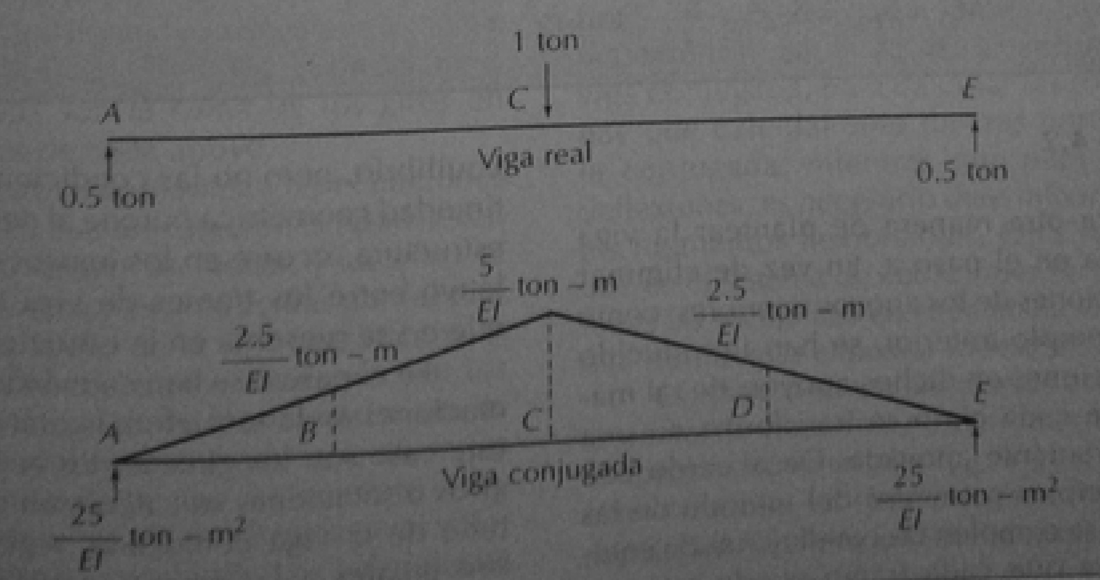




$$M_B = \delta_{BB} = \frac{1}{EI}\left[21.88\times 5-\left(\frac{1}{2}\times 3.75\times 5\right)\left(\frac{1}{3}\times 5\right)\right] = \frac{93.75}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_C = \delta_{CB} = \frac{1}{EI}\left[15.63\times 10-\left(\frac{1}{2}\times 2.5\times 10\right)\left(\frac{1}{3}\times 10\right)\right] = \frac{114.58}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_D = \delta_{DB} = \frac{1}{EI}\left[15.63\times 5-\left(\frac{1}{2}\times 1.25\times 5\right)\left(\frac{1}{3}\times 5\right)\right] = \frac{72.92}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

3. Viga con carga en $C$



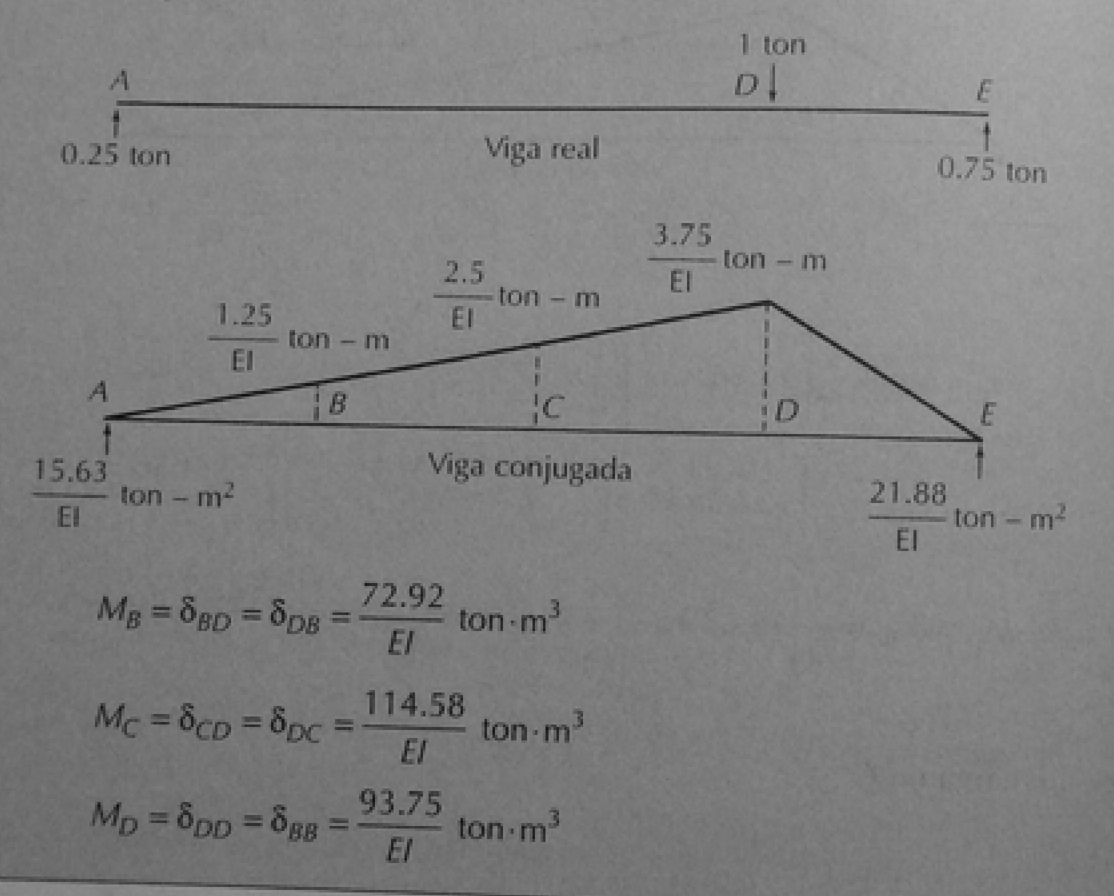
**EJEMPLO 4.1 *(continuación)***

$$M_B = \delta_{BC} = \frac{1}{EI}\left[25\times5-\left(\frac{1}{2}\times2.5\times5\right)\left(\frac{1}{3}\times5\right)\right] = \frac{114.58}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_C = \delta_{CC} = \frac{1}{EI}\left[25\times10-\left(\frac{1}{2}\times5\times10\right)\left(\frac{1}{3}\times10\right)\right] = \frac{166.67}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_D = \delta_{DC} = \delta_{BC} = \text{(por simetría)} = \frac{114.58}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

4. Viga con carga en $D$




$$M_B = \delta_{BD} = \delta_{DB} = \frac{72.92}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_C = \delta_{CD} = \delta_{DC} = \frac{114.58}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_D = \delta_{DD} = \delta_{BB} = \frac{93.75}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

**Ejemplo 4.2**

Se ilustra otra manera de plantear la viga isostática en el paso *a*. En vez de eliminar las reacciones de los apoyos interiores, como en el ejemplo anterior, se han introducido articulaciones en dichos apoyos, de tal manera que cada claro se transforma en una viga libremente apoyada. De acuerdo con los principios generales del método de las fuerzas, se cumplen las condiciones de equilibrio, ya que cada tramo puede estar en equilibrio, pero no las condiciones de continuidad geométrica porque al deformarse la estructura, ocurre en los apoyos un giro relativo entre los tramos de viga adyacentes que no se presenta en la estructura real.

En el paso *b* se han calculado las deformaciones en la estructura isostática, que en este caso son los giros en los apoyos. Estos giros o rotaciones se calcularon con el método de la viga conjugada, según el cual, son iguales a las fuerzas cortantes en los apoyos de los tramos de viga cargados con

los diagramas de momentos flexionantes divididos entre *EI*. Estas fuerzas cortantes, a su vez, son iguales, a las reacciones de las vigas libremente apoyadas. Los giros relativos $\theta$ son la suma de los giros a ambos lados de cada apoyo. Por ejemplo, la rotación $\theta_B$ es la suma de $\theta_{BA}$ y de $\theta_{BC}$. El cálculo de estas rotaciones se presenta al final del ejemplo. *Se ha seguido la convención de signos de considerar que los giros son positivos cuando los produce un momento flexionante positivo.*

En el siguiente paso se han introducido momentos unitarios en los extremos de cada tramo de viga para restituir la continuidad geométrica. Estos momentos son equivalentes a las fuerzas unitarias que se colocaron sobre los apoyos del ejemplo anterior. También por el método de la viga conjugada se han calculado las rotaciones en los extremos, $\theta$, que son iguales a las reacciones de los tramos de viga cargados con el diagrama triangular de momentos flexionantes dividido entre *EI*, el cual, a su vez, es el producido por los momentos unitarios. El signo de los momentos unitarios introducidos es tal que producen momentos flexionantes positivos, pero pueden ser de cualquier signo ya que el sentido correcto aparecerá al final de la solución, como en el caso del ejemplo anterior. Obsérvese que los momentos mostrados en las figuras de este paso *b* son momentos de apoyo sobre barra (véase la sección 2.9). También los giros relativos en esta etapa son la suma de los giros en ambos lados de cada apoyo.

En el paso *d* se plantean las ecuaciones que expresan que las rotaciones relativas en cada apoyo deben ser nulas. Para ello, se suman las rotaciones producidas por las cargas en cada apoyo de la viga isostática y las producidas también en cada apoyo por los momentos unitarios. Se forma un sistema de ecuaciones del mismo grado que el de indeterminación de la viga real; en este sistema de ecuaciones puede eliminarse el valor de *EI* porque es constante. Los valores que se obtienen para las incógnitas son los de los momentos que realmente habría que aplicar en los apoyos para restituir la continuidad geométrica. Como en este caso todos los valores de las incógnitas resultaron negativos, los signos supuestos para los momentos unitarios fueron incorrectos. Por lo tanto, en cada apoyo hay un momento flexionante negativo y en cada tramo, un diagrama triangular de momento flexionante, también negativo, que debe sumarse al diagrama positivo de la viga isostática para obtener el diagrama final de momentos flexionantes.

Teniendo los momentos flexionantes, pueden calcularse las reacciones y las fuerzas cortantes analizando cada tramo de viga como se muestra en el paso *e*. Cada tramo se somete a las fuerzas externas y a los momentos de apoyo sobre barra que actúan en sus extremos. En los apoyos izquierdos, los momentos flexionantes tienen el mismo signo que los de apoyo sobre barra, y en los apoyos derechos, tienen signo contrario. Las reacciones en cada apoyo son la suma de las reacciones de los dos tramos que concurren en el apoyo considerado. Se muestra en el ejemplo el cálculo de las reacciones en los tramos *AB* y *BC*. La reacción $R_B$ es la suma de las reacciones $R_{BA}$ y $R_{BC}$.

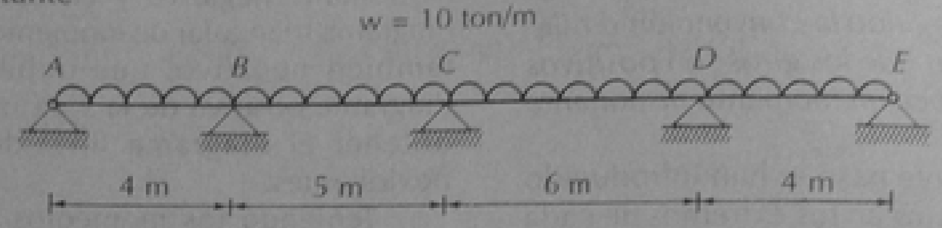
Esta manera de plantear la viga isostática tiene ventajas sobre la del ejemplo anterior. Una de ellas es que resulta más fácil, en general, calcular rotaciones que deflexiones; así, si se usa el método de la viga conjugada, para calcular las rotaciones hay que calcular sólo fuerzas cortantes en la conjugada, mientras que para calcular deflexiones, es necesario determinar también los momentos flexionantes. Otra ventaja es que en el sistema de ecuaciones no aparecen todas las incógnitas en cada ecuación, por lo que resulta más expedita su resolución.

Obsérvese nuevamente que se cumple el teorema de Maxwell de las deformaciones recíprocas. Por ejemplo, $\theta_{CB}$ *es igual a* $\theta_{BC}$. En este ejemplo se determinaron todas las rotaciones, y el Principio de Maxwell se utilizó como comprobación de los cálculos.

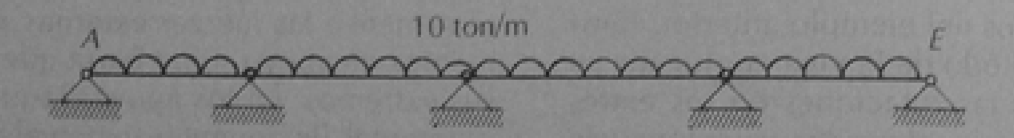
## EJEMPLO 4.2. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON CARGA LINEALMENTE DISTRIBUIDA POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

DATOS:

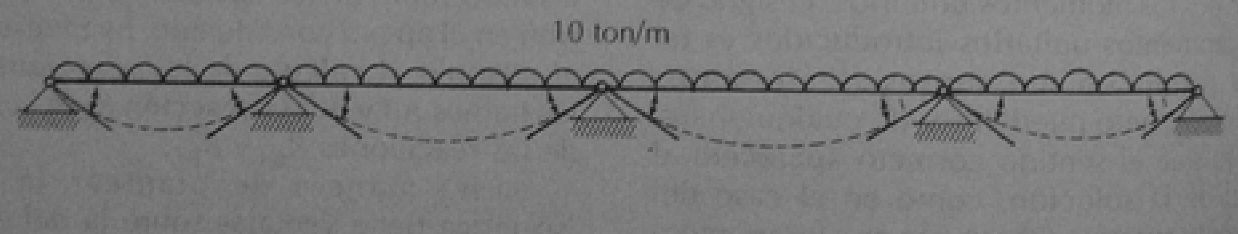
$EI$ = constante




Paso *a)* Planteamiento de la viga isostática.

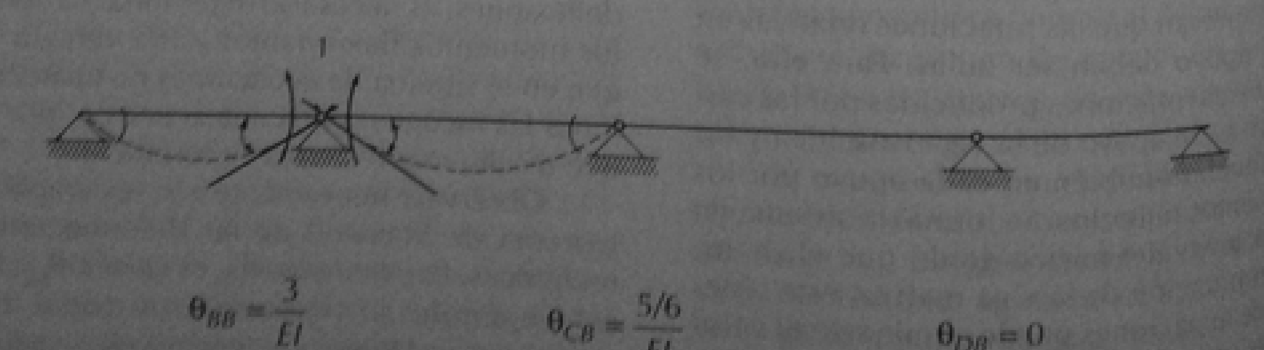



Paso *b)* Deformaciones en la viga isostática (los cálculos se presentan al final del ejemplo).



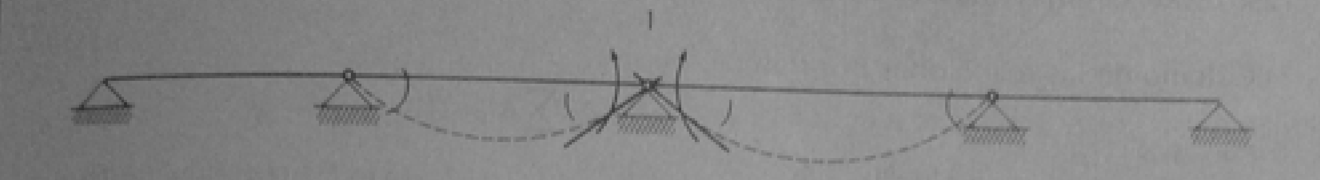

$$\Theta_B = \frac{78.75}{EI} \qquad \Theta_C = \frac{142.08}{EI} \qquad \Theta_D = \frac{116.67}{EI}$$

Paso *c)* Aplicación de momentos unitarios y giros correspondientes (los cálculos se presentan al final del ejemplo).

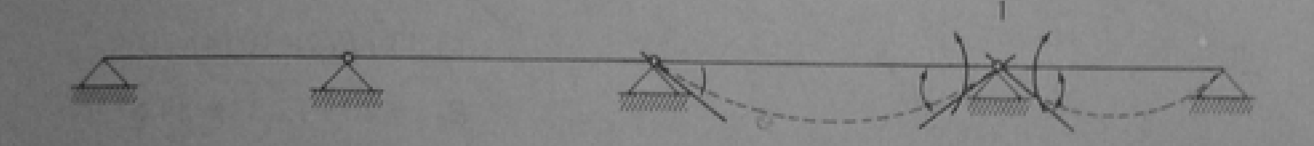



$$\theta_{BB} = \frac{3}{EI} \qquad \theta_{CB} = \frac{5/6}{EI} \qquad \theta_{DB} = 0$$

**EJEMPLO 4.2** *(continuación)*




$$\theta_{BC} = \frac{5/6}{EI} \qquad \theta_{CC} = \frac{11/3}{EI} \qquad \theta_{DC} = \frac{1}{EI}$$




$$\theta_{BD} = 0 \qquad \theta_{CD} = \frac{1}{EI} \qquad \theta_{DD} = \frac{10/3}{EI}$$

Paso *d)* Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas.

$$78.75 + 3\,M_B + 5/6\,M_C + 0\,M_D = 0$$

$$142.08 + 5/6\,M_B + 11/3\,M_C + 1M_D = 0$$

$$116.67 + 0\,M_B + 1M_C + 10/3\,M_D = 0$$

El término *EI* se ha eliminado porque es constante.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$M_B = -18.70 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -27.17 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_D = -26.85 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

**EJEMPLO 4.2** ***(continuación)***

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

1) Cálculo de las reacciones por tramos.

Tramo *A-B*

A 10 ton/m B $M_B$

$R_{AB}$ $R_{BA}$

4 m

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$R_{AB}(4) - (10)(4)(2) + 18.70 = 0$$

$$R_{AB} = \frac{80 - 18.70}{4} = 15.33 \text{ ton}$$

*B*

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$15.33 + R_{BA} - 10(4) = 0$$

$$R_{BA} = 40 - 15.33 = 24.67 \text{ ton}$$

Tramo *B-C*

B 10 ton/m C

$R_{BC}$ $R_{CB}$

5 m

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$$

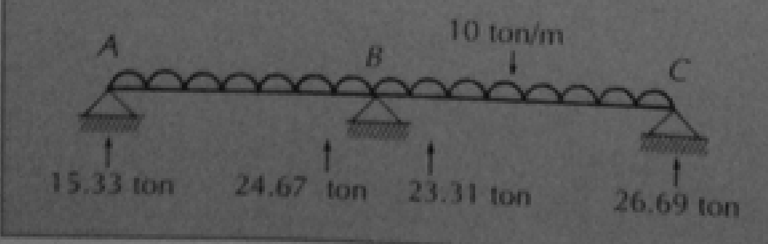
$$-18.70 - (10)(5)(2.5) + R_{BC}(5) + 27.17 = 0$$

$$R_{BC} = \frac{18.70 + 125 - 27.17}{5} = 23.31 \text{ ton}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$23.31 + R_{CB} - 10(5) = 0$$

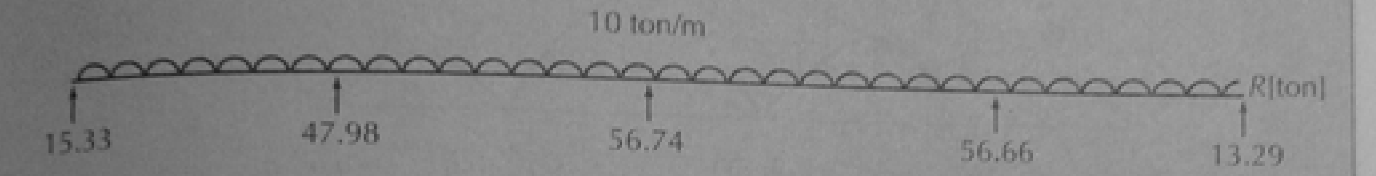
$$R_{CB} = 50 - 23.31 = 26.69 \text{ ton}$$

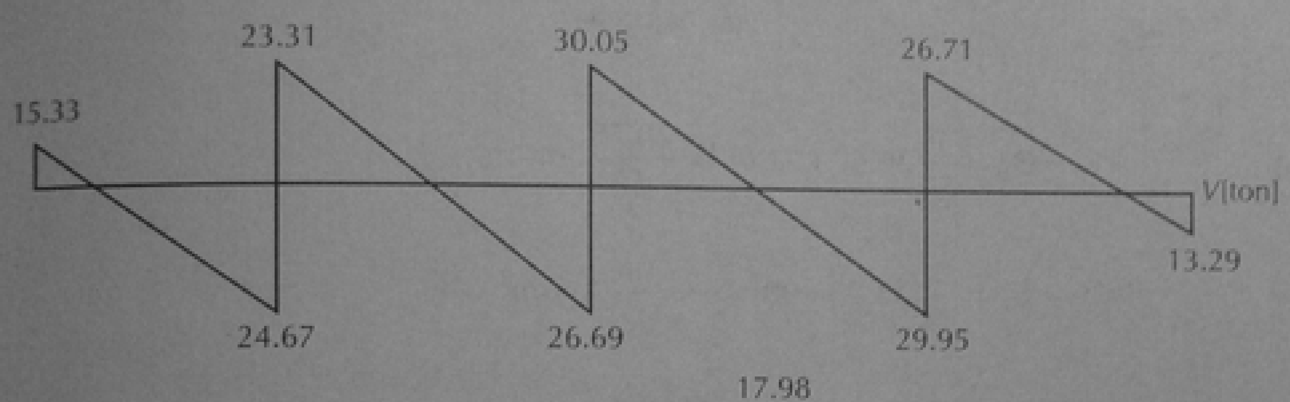


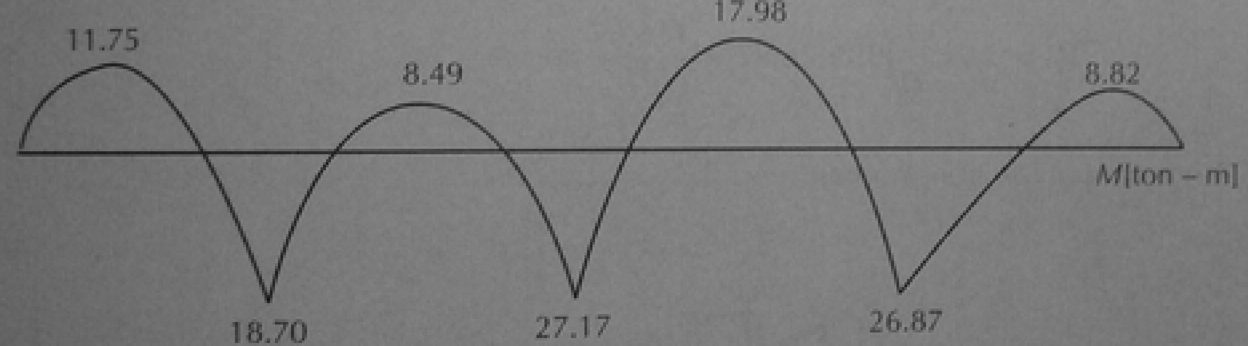

$$R_B = 24.67 + 23.31 = 47.98 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 4.2 *(continuación)***

Del mismo modo para las demás reacciones, por lo tanto, las reacciones totales son:

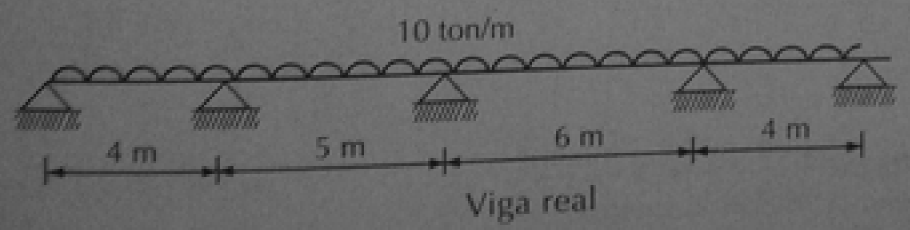


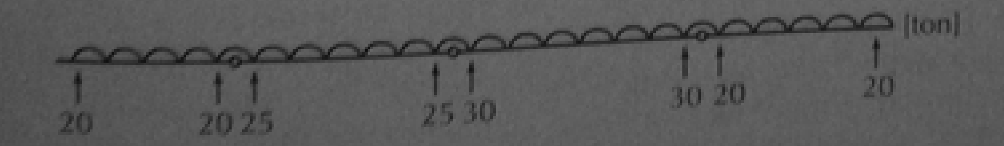

ANEXO. CÁLCULO DE LOS GIROS

*EI = constante*

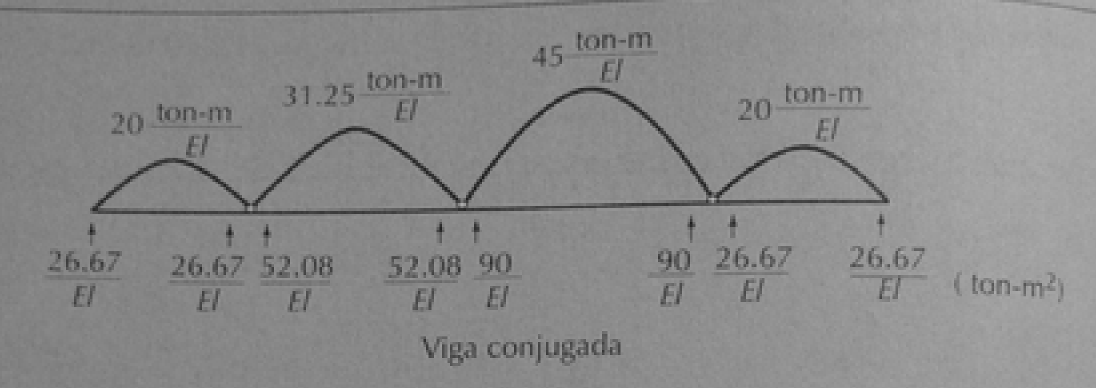



Viga real

1. Viga isostática



**EJEMPLO 4.2 *(continuación)***



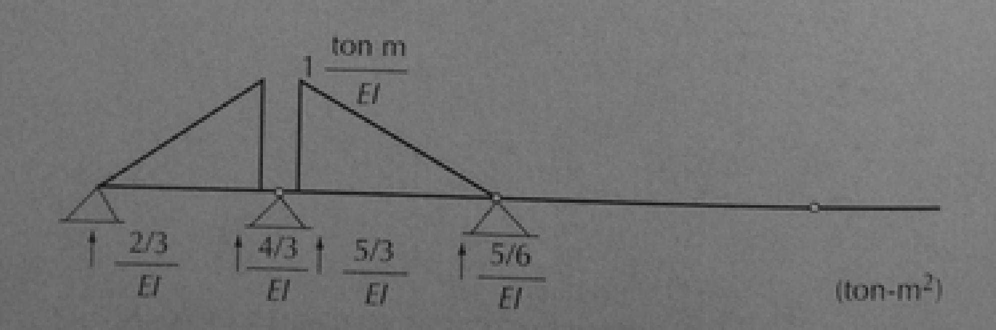

Viga conjugada

$$V_B = \Theta_B = \frac{1}{EI}[26.67 + 52.08] = \frac{78.75}{EI} \text{ ton}\cdot\text{m}^2$$

$$V_C = \Theta_C = \frac{1}{EI}[52.08 + 90] = \frac{142.08}{EI} \text{ ton}\cdot\text{m}^2$$

$$V_D = \Theta_D = \frac{1}{EI}[90 + 26.67] = \frac{116.67}{EI} \text{ ton}\cdot\text{m}^2$$

2. Viga conjugada con momento en *B*.



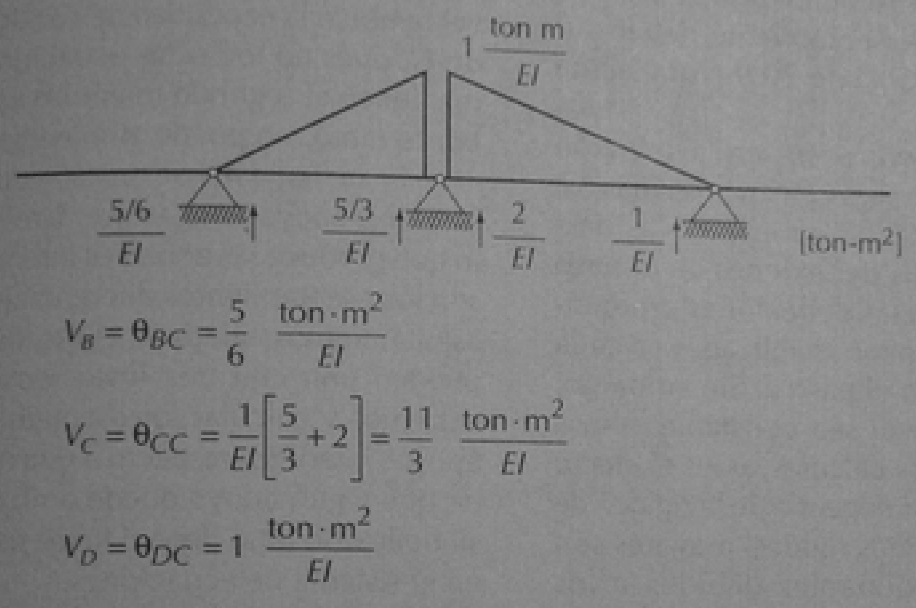

$$V_B = \theta_{BB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right] = 3 \ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$V_C = \theta_{CB} = \frac{5}{6} \ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$V_D = \theta_{DB} = 0$$

**EJEMPLO 4.2 *(continuación)***

3. Viga conjugada con momento en $C$.

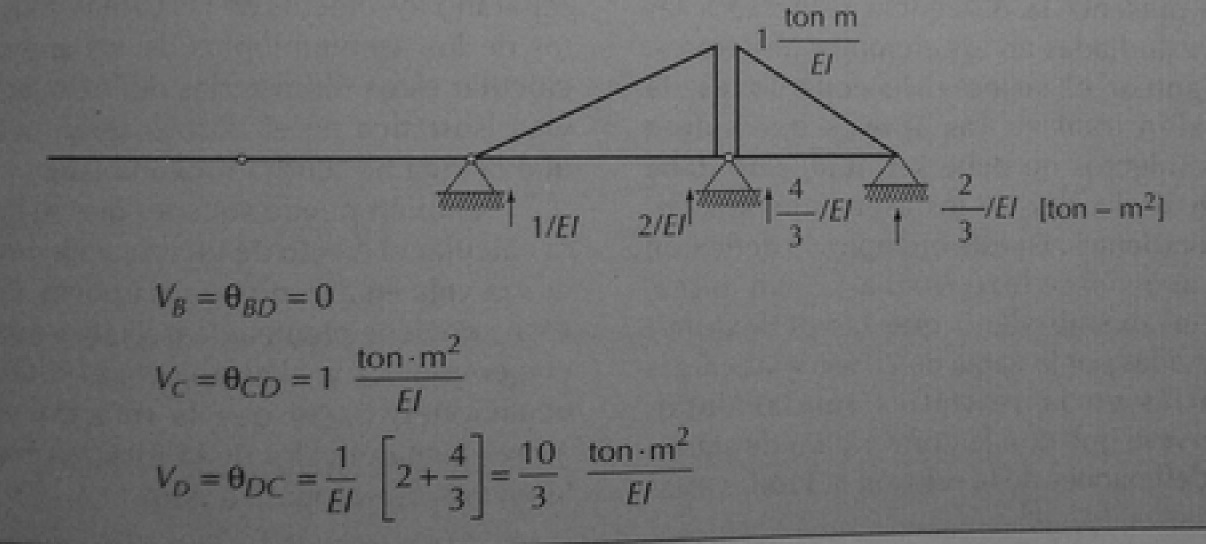



$$V_B = \theta_{BC} = \frac{5}{6}\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$V_C = \theta_{CC} = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{3}+2\right] = \frac{11}{3}\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$V_D = \theta_{DC} = 1\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

4. Viga conjugada con momento en $D$.




$$V_B = \theta_{BD} = 0$$

$$V_C = \theta_{CD} = 1\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$V_D = \theta_{DC} = \frac{1}{EI}\left[2+\frac{4}{3}\right] = \frac{10}{3}\ \frac{\text{ton}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

### *4.3.3 Vigas con asentamientos en los apoyos*

En vigas isostáticas, los asentamientos de los apoyos no producen acciones internas en la viga. Por esta razón, en estructuras de claros grandes, como puentes, en las que se pueden presentar asentamientos diferentes en los apoyos, suelen usarse vigas isostáticas libremente apoyadas. Por el contrario, en vigas continuas hiperestáticas, los asentamientos de los apoyos, cuando son diferentes entre sí, producen momentos flexionantes y fuerzas cortantes de importancia que deben considerarse en el análisis y diseño de la estructura. El método de las fuerzas resulta conveniente para calcular las acciones producidas por asentamientos de los apoyos, como puede verse en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3**

Supóngase que en la viga del ejemplo 4.1, el apoyo *B* tiene un asentamiento de 1.5 cm. Los efectos de este asentamiento deben sumarse a los de la carga de 20 ton que actúa sobre la viga.

Los tres primeros pasos en la solución son iguales a los de vigas en apoyos rígidos. Se plantea la isostática en el paso *a*, después se calculan sus deflexiones en el paso *b*, y a continuación las deflexiones producidas por las cargas unitarias aplicadas en cada apoyo suprimido en el paso *a*. Sin embargo, aunque el valor de *EI* sea constante, ahora debe incluirse en los cálculos, pues el efecto de los asentamientos depende de la rigidez de las vigas; mientras más rígidas, mayores son los momentos flexionantes debidos a los asentamientos. En el siguiente paso es donde se presenta la diferencia respecto a las vigas estudiadas en los ejemplos anteriores. Al plantear el sistema de ecuaciones, la deflexión total en los apoyos que sufren asentamientos no debe ser nula, sino debe ser igual al valor de los asentamientos correspondientes. En este ejemplo, la deflexión en el apoyo *B* se hizo igual a 1.5 cm, o sea, tiene el mismo signo que las deflexiones producidas por la carga de 20 ton y las cargas unitarias en la isostática fundamental. Obsérvese que con la convención de signos para deflexiones de la sección 3.3 todas estas deflexiones serían negativas; para no trabajar con signos negativos, se ha cambiado el signo a todas, con lo cual no se alteran los resultados. Al plantear el sistema de ecuaciones, se puede ver también la necesidad de considerar el valor de *EI*, pues no todas las ecuaciones del sistema tienen el segundo miembro igual a cero y, por lo tanto, no puede eliminarse *EI*.

En la figura 4.1 se muestra el caso de que todos los apoyos tengan asentamientos. Como lo que produce las acciones internas en la viga son los asentamientos diferenciales, o sea, los asentamientos relativos entre los apoyos, se pueden unir con una línea recta los apoyos extremos y calcular los asentamientos de los apoyos interiores respecto a esta recta. En caso de que algún apoyo quede arriba de la recta, su deflexión total deberá tener signo negativo en el sistema de ecuaciones.

Suele resultar conveniente calcular por separado los efectos de las cargas y los efectos de los asentamientos de los apoyos. Al calcular estos últimos, las deflexiones de la viga isostática en el paso *b* serán nulas ya que la viga no tendrá ninguna carga.

También puede suceder que se requiera calcular el efecto de una rotación impuesta a la viga en alguno de sus apoyos. En este caso conviene plantear la isostática como en el ejemplo 4.2 y, al establecer el sistema de ecuaciones, hacer que la rotación en ese apoyo tenga el valor de la rotación impuesta en vez de ser igual a cero.

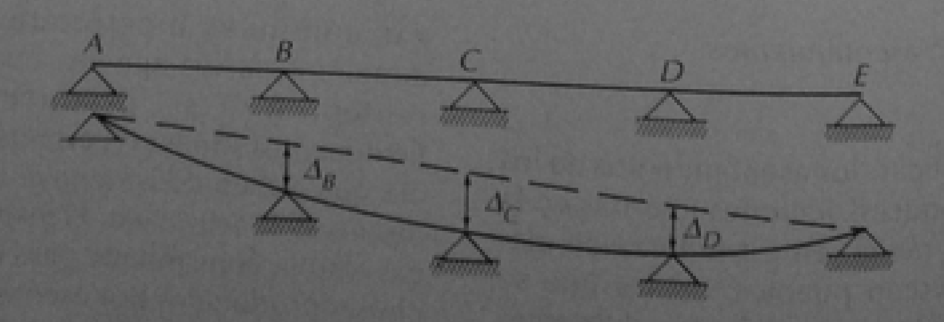



**Figura 4.1.** Viga con asentamientos en todos los apoyos

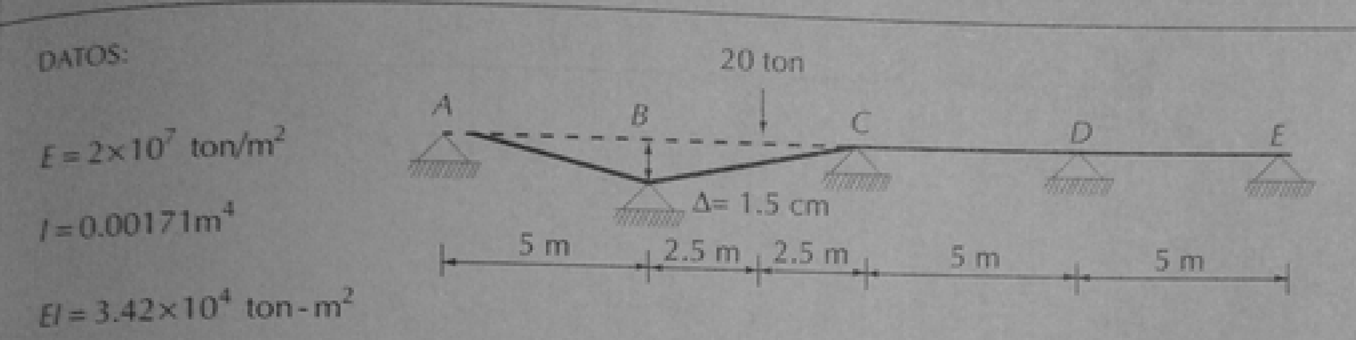
## EJEMPLO 4.3. RESOLUCIÓN DE LA VIGA DEL EJEMPLO 4.1, PERO CON ASENTAMIENTO EN EL APOYO *B* DE 1.5 CM

DATOS:

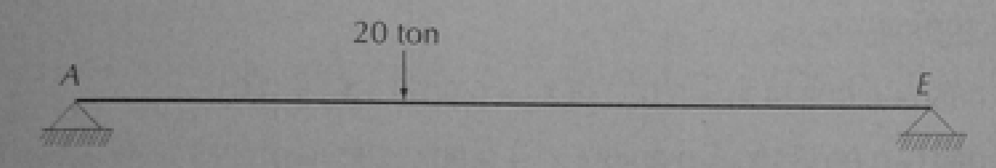
$E = 2\times10^7$ ton/m²

$I = 0.00171$ m⁴

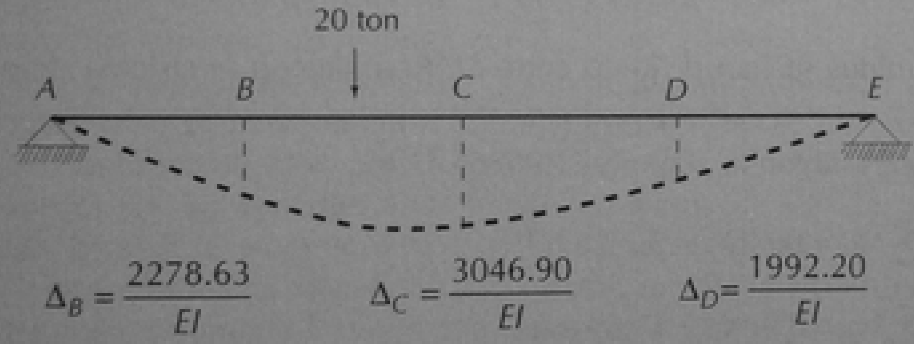
$EI = 3.42\times10^4$ ton-m²




Paso *a)* Planteamiento de la viga isostática (igual al ejemplo 4.1).

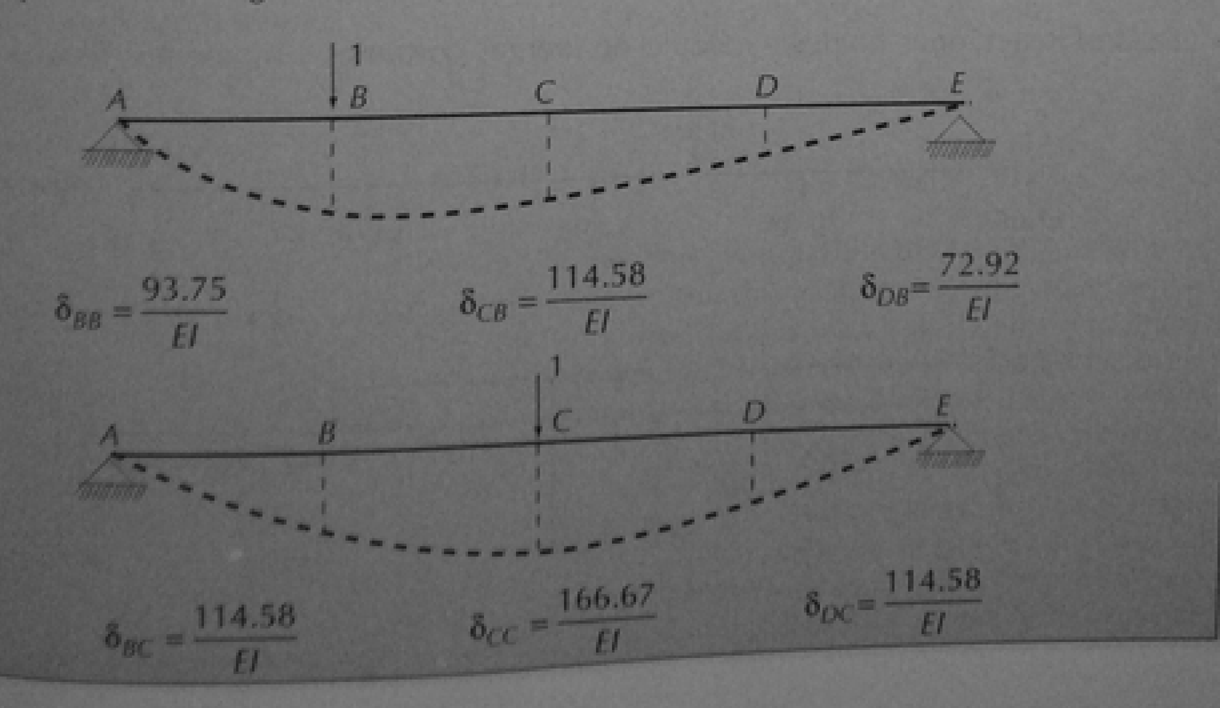



Paso *b)* Deformaciones en la viga isostática (igual al ejemplo 4.1).




$$\Delta_B = \frac{2278.63}{EI} \qquad \Delta_C = \frac{3046.90}{EI} \qquad \Delta_D = \frac{1992.20}{EI}$$

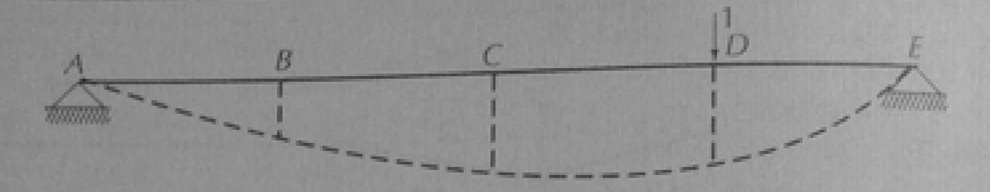
Paso *c)* Aplicación de cargas unitarias y deflexiones correspondientes (igual al ejemplo 4.1).




$$\delta_{BB} = \frac{93.75}{EI} \qquad \delta_{CB} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DB} = \frac{72.92}{EI}$$

$$\delta_{BC} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{CC} = \frac{166.67}{EI} \qquad \delta_{DC} = \frac{114.58}{EI}$$

**EJEMPLO 4.3 *(continuación)***




$$\delta_{BD} = \frac{72.92}{EI} \qquad \delta_{CD} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DD} = \frac{93.75}{EI}$$

Paso *d*) Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas.

$$0.0666 + 0.00274\, X_B + 0.00335\, X_C + 0.00213\, X_D = 0.015$$

$$0.0891 + 0.00335\, X_B + 0.00487\, X_C + 0.00335\, X_D = 0$$

$$0.0582 + 0.00213\, X_B + 0.00335\, X_C + 0.00274\, X_D = 0$$

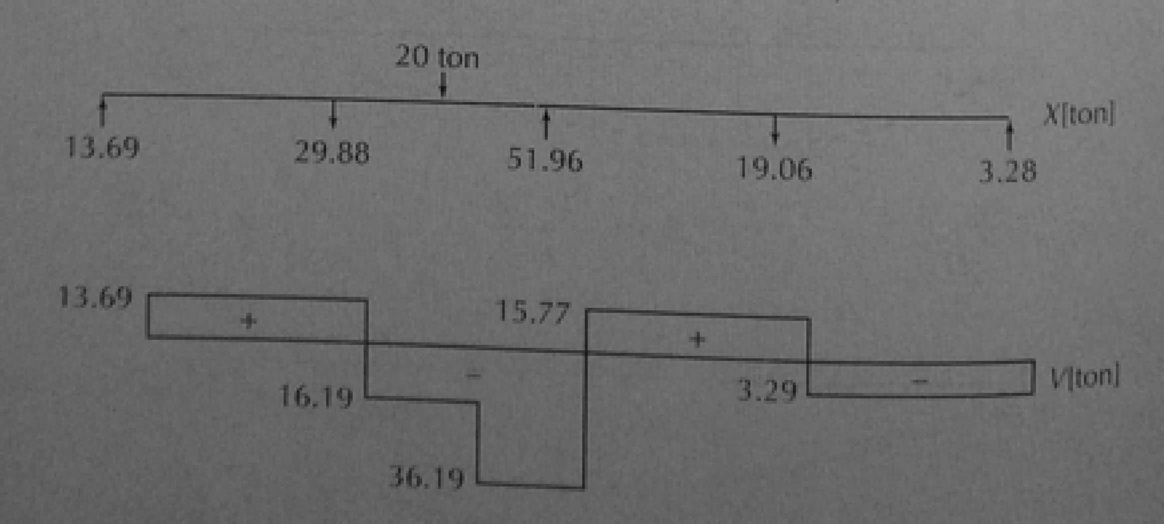
Todos los términos se han dividido entre *EI*. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$X_B = 29.88 \text{ ton}\downarrow, \quad X_C = -51.96 \text{ ton}\uparrow, \quad X_D = 19.06 \text{ ton}\downarrow$$

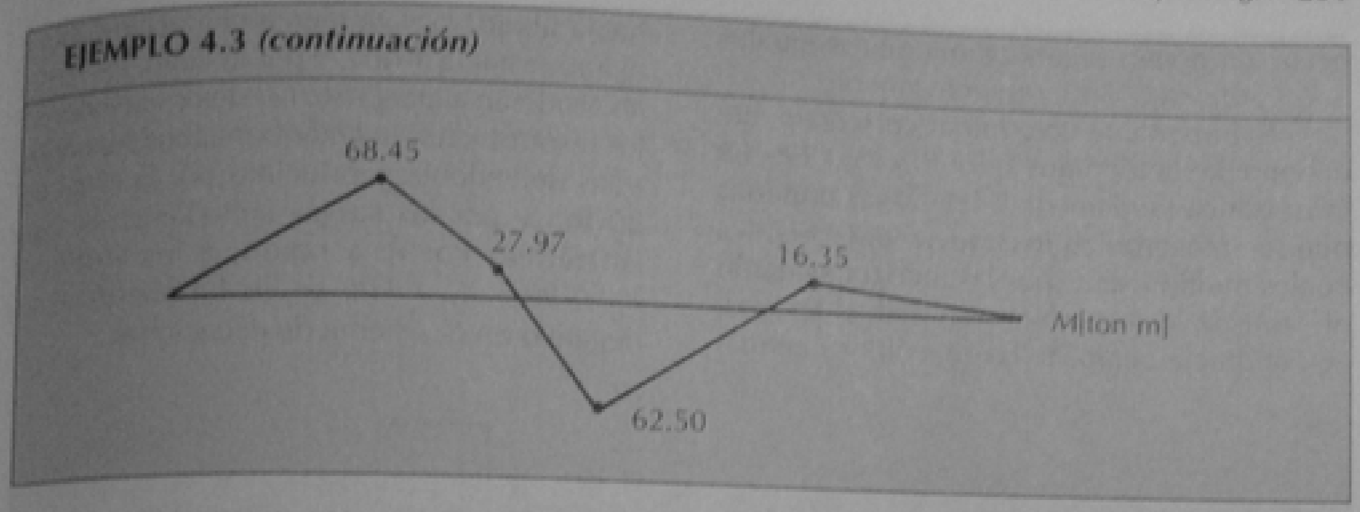
$$\text{De} \sum M_A = 0, \quad X_E = 3.28 \text{ ton}\uparrow$$

$$\text{De} \sum M_E = 0, \quad X_A = 13.69 \text{ ton}\uparrow$$

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



**EJEMPLO 4.3 *(continuación)***




*4.3.4 Vigas sobre apoyos elásticos*

La gran mayoría de las estructuras reales se apoyan en terrenos que no son totalmente rígidos, sino que sufren asentamientos bajo la acción de las cargas que reciben. En terrenos de relativamente buena calidad, o cuando las cargas no son muy elevadas, puede suponerse que las estructuras descansan sobre apoyos rígidos, pero en caso contrario se considera que descansan sobre apoyos elásticos. Estos apoyos son equivalentes a un resorte en el que la fuerza, $F$, que es necesario aplicarle para que se deforme una cantidad $\Delta$ es igual a esta deformación multiplicada por una constante del resorte, $k$, figura 4.2. Por lo tanto, puede escribirse la ecuación

$$F = k\Delta \qquad (4.1)$$

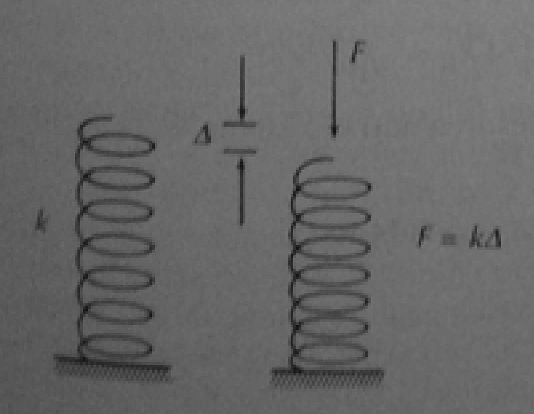



**Figura 4.2.** Resorte elástico

En el ejemplo siguiente se muestra como puede analizarse una viga continua sobre apoyos elásticos con el método de las fuerzas.

**Ejemplo 4.4**

Supóngase ahora que en la misma viga del ejemplo 4.1, las reacciones $C$ y $D$ son apoyos elásticos con una constante del resorte de 5 ton/cm.

La única diferencia con el ejemplo 4.1 estriba en que al plantear el sistema de ecuaciones simultáneas en el paso *d*, las deflexiones totales en $C$ y $D$ no son nulas, sino que son, respectivamente,

$$\delta_C = X_C / k$$

$$\delta_D = X_D / k$$

ya que según la ecuación 4.1, los acortamientos de los resortes, que son las deflexiones totales, resultan iguales a las fuerzas, que son las reacciones, divididas entre la constante del resorte. El sistema de ecuaciones queda con las mismas incógnitas y el resto de la solución es igual a la del ejemplo 4.1. Obsérvese que en este caso tampoco puede eliminarse el valor de $EI$ porque los segundos miembros de algunas ecuaciones no son nulos; en este ejemplo la segunda y la tercera

ecuación tienen segundos miembros iguales a $X_C / 500$ y $X_D / 500$, respectivamente.

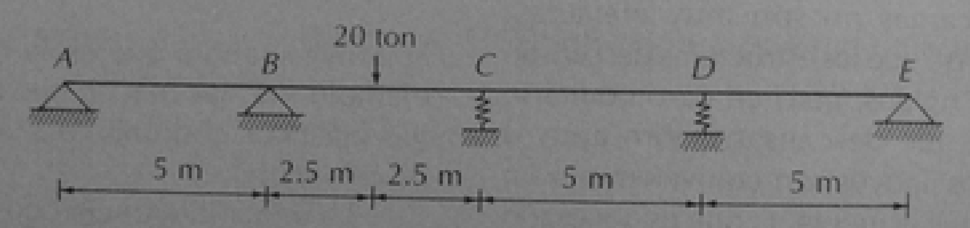
Es importante determinar correctamente el signo de los términos $X_C /500$ y $X_D / 500$. En la isostática fundamental, las cargas unitarias que se colocaron en los apoyos *B*, *C* y *D*, las cuales multiplicadas por las incógnitas darán el valor de las reacciones en dichos apoyos, actúan hacia abajo. Si las reacciones actúan hacia abajo, la viga ejerce una acción sobre el apoyo hacia arriba, y por lo tanto, los resortes tenderán a alargarse. Las deformaciones de los resortes tendrán entonces signos contrarios a las deflexiones producidas por la carga de 20 ton y por las cargas unitarias en la viga isostática. Por esta razón, a los términos $X_C /500$ y $X_D / 500$ se les ha puesto signo negativo en el sistema de ecuaciones.

## EJEMPLO 4.4. RESOLUCIÓN DE LA VIGA DEL EJEMPLO 4.1 PERO CON APOYOS ELÁSTICOS EN LOS PUNTOS C Y D, POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

DATOS:

$$EI = 3.42\times10^4 \text{ton}-\text{m}^2$$

$$k = 5 \text{ ton/cm} = 500 \text{ton/m}$$




Los pasos *a*, *b* y *c* son los mismos del ejemplo 4.1, por lo que no es necesario repetirlos.

Paso *d)* Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas.

$$0.0666 + 0.00274\, X_B + 0.00335\, X_C + 0.00213\, X_D = 0$$

$$0.0891 + 0.00335\, X_B + 0.00487\, X_C + 0.00335\, X_D = -X_C/500$$

$$0.0582 + 0.00213\, X_B + 0.00335\, X_C + 0.00274\, X_D = -X_D/500$$

Todos los términos han sido divididos entre *EI*. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

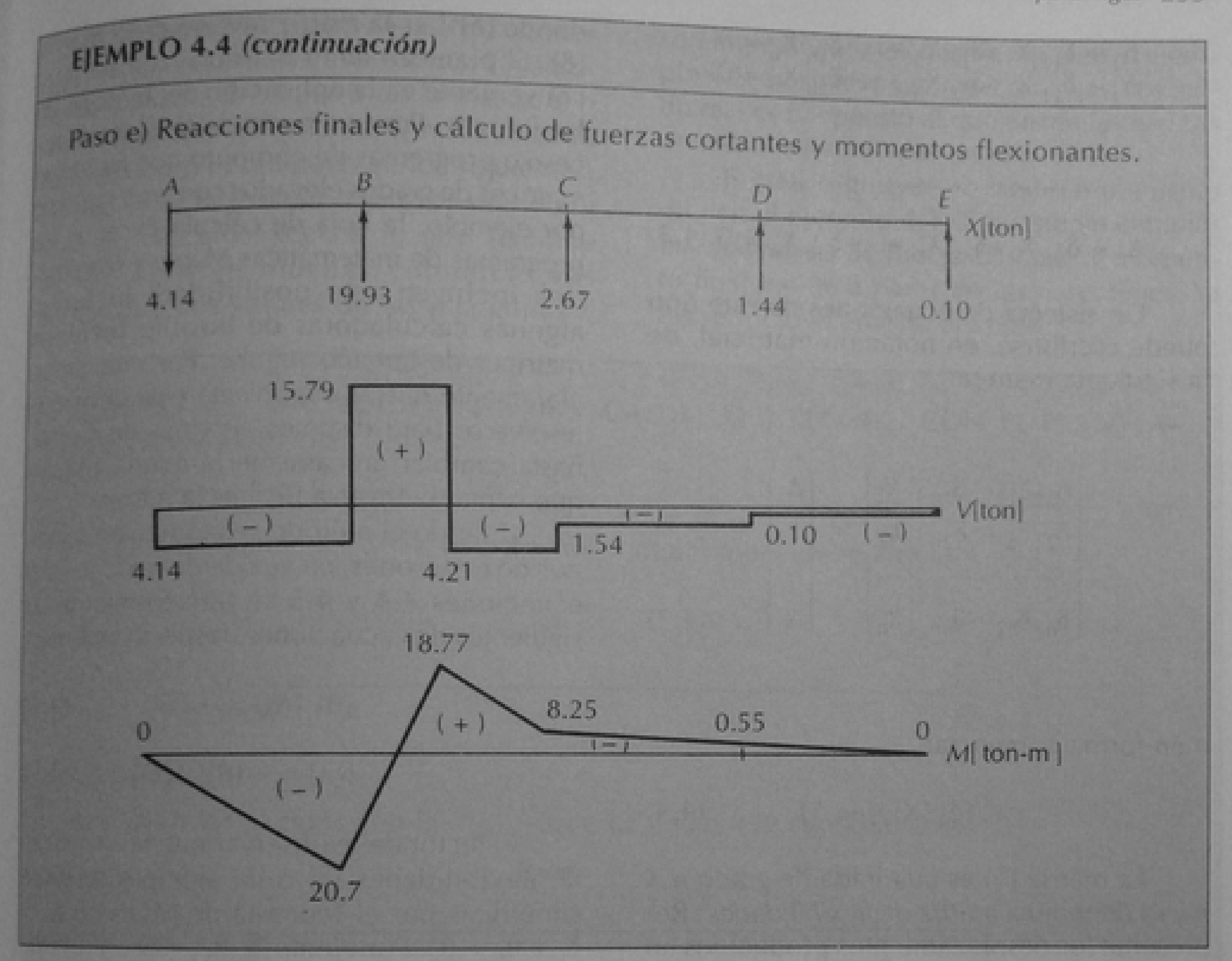
$$X_B = -19.93 \text{ ton}\uparrow, \quad X_C = -2.67 \text{ ton}\uparrow, \quad X_D = -1.44 \text{ ton}\uparrow$$

$$\text{De} \sum M_A = 0, \quad X_E = 0.10 \text{ ton}\uparrow$$

$$\text{De} \sum M_E = 0, \quad X_A = -4.14 \text{ ton}\downarrow$$

**EJEMPLO 4.4 *(continuación)***

Paso e) Reacciones finales y cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.




### *4.3.5 Planteamiento matricial para la resolución de vigas*

Analizando el sistema de ecuaciones que se integró en el paso *d* del ejemplo 4.1, puede verse que el primer término de cada ecuación representa la deflexión de la viga isostática en cada sección en que se eliminó una reacción; son los términos que se han representado con la notación $\Delta$. Estas deflexiones dependen del sistema de cargas aplicadas a la viga original. También puede verse que los coeficientes de las incógnitas $X$ son las deflexiones producidas por las cargas unitarias. Son los términos $\delta_{ij}$ donde $i$ es el punto en que se calcula la deflexión y $j$ es el punto en que se aplica la carga. Obsérvese que estos coeficientes son independientes del sistema de cargas aplicadas a la viga. Se denominan *coeficientes de flexibilidad* y son los mismos para una viga determinada, cualquiera que sea la carga aplicada. Un planteamiento equivalente puede hacerse en relación al ejemplo 4.2 si las deflexiones $\Delta$ se sustituyen por las rotaciones $\Theta$, las deflexiones $\delta_{ij}$ por las rotaciones $\theta_{ij}$ y las reacciones por los momentos en los apoyos.

Independientemente del grado de indeterminación de una viga, siempre puede plantearse un sistema de ecuaciones como los analizados. En general, y usando la notación del ejemplo 4.1, para una viga con un grado $n$ de indeterminación se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Delta_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots + \delta_{1n} X_n = 0$$
$$\Delta_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \ldots + \delta_{2n} X_n = 0$$

..........................................

..........................................

$$\Delta_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \ldots + \delta_{nn} X_n = 0 \quad (4.2)$$

Un sistema de ecuaciones de este tipo puede escribirse, en notación matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}\delta_{12}\cdots\delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22}\cdots\delta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}\delta_{n2}\cdots\delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

o en forma compacta:

$$[\delta]\,\{X\} = -\{\Delta\} \quad (4.4)$$

La matriz $[\delta]$ es cuadrada de grado $n$ X $n$ y se denomina *matriz de flexibilidades*. Representa los desplazamientos producidos en la viga isostática por las fuerzas unitarias, o bien, las rotaciones producidas por los momentos unitarios. Como ya se ha dicho, es independiente del sistema de cargas. La matriz $\{X\}$ es una matriz columna, de grado $n$ X 1, y representa las incógnitas del sistema de ecuaciones, o sea, los valores de las reacciones o momentos flexionantes que hay que determinar. La matriz $\{\Delta\}$ es también una matriz columna de grado $n$ X 1 y representa las incompatibilidades geométricas de la viga isostática. Como ya se ha dicho, depende únicamente del sistema de cargas aplicado a la viga original.

Según se estudia en álgebra matricial, la solución del sistema de ecuaciones 4.4 es la siguiente:

$$\{X\} = -[\delta]^{-1}\,\{\Delta\} \quad (4.5)$$

donde $[\delta]^{-1}$ es la matriz inversa de la matriz $[\delta]$. El planteamiento matricial resulta muy conveniente en la aplicación del método de las fuerzas. Por una parte, es fácil tener acceso a programas de cómputo que invierten matrices de grados elevados con gran rapidez; por ejemplo, la hoja de cálculo Excel, o los programas de matemáticas Maple y Matemática incluyen esta posibilidad; inclusive algunas calculadoras de bolsillo invierten matrices de tamaño regular. Por otra, se ve claramente que si una misma viga tiene que resolverse bajo distintos sistemas de cargas, basta cambiar únicamente la matriz $\{\Delta\}$, ya que la matriz inversa $[\delta]^{-1}$ es la misma.

Cuando el método se plantea en términos de rotaciones, en vez de deflexiones, las ecuaciones 4.4 y 4.5 se transforman a las siguientes dos ecuaciones, respectivamente:

$$[\theta]\,\{M\} = -\{\Theta\} \quad (4.6)$$

$$\{M\} = -[\theta]^{-1}\,\{\Theta\} \quad (4.7)$$

El lector debe observar que las matrices de flexibilidades $[\delta]$ o $[\theta]$ siempre resultan simétricas por el Teorema de Maxwell $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ y $\theta_{ij} = \theta_{ji}$. Por ejemplo, $\delta_{12} = \delta_{21}$ y ambos valores ocupan posiciones simétricas respecto a la diagonal de la matriz que está constituida por los valores $\delta_{ii}$. En los siguientes ejemplos se ilustra la aplicación del planteamiento matricial.

**Ejemplo 4.5**

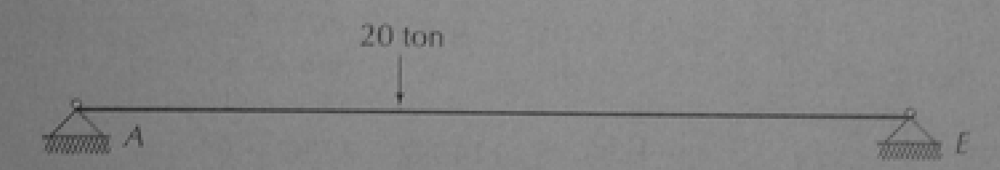
Considérese la misma viga del ejemplo 4.1. Los pasos *a*, *b* y *c* son los mismos; se plantea la viga isostática y se calculan las deflexiones $\Delta$ y $\delta$ producidas en la isostática por las cargas externas y por las cargas unitarias, respectivamente. En este ejemplo se muestran las matrices correspondientes al final de los pasos *b* y *c*. Obsérvese que se ha cambiado el signo a las deflexiones calculadas en el paso *b* para formar la matriz $-\Delta$.

En el paso *d* se plantean las ecuaciones 4.4 y 4.5, y se resuelve esta última. El cálculo de la matriz $\delta^{-1}$ a partir de la matriz $\delta$, o sea, la inversión de la matriz $\delta$, no se muestra en el ejemplo ni tampoco en los siguientes. En este caso, la inversión se hizo usando la hoja de cálculo Excel, a la que se tiene acceso fácil en muchas computadoras personales. Los valores de las incógnitas $X$ son lógicamente los mismos que en el ejemplo 4.1. Su signo negativo indica que el sentido real es el opuesto al que tienen las fuerzas unitarias introducidas en el paso *c*.

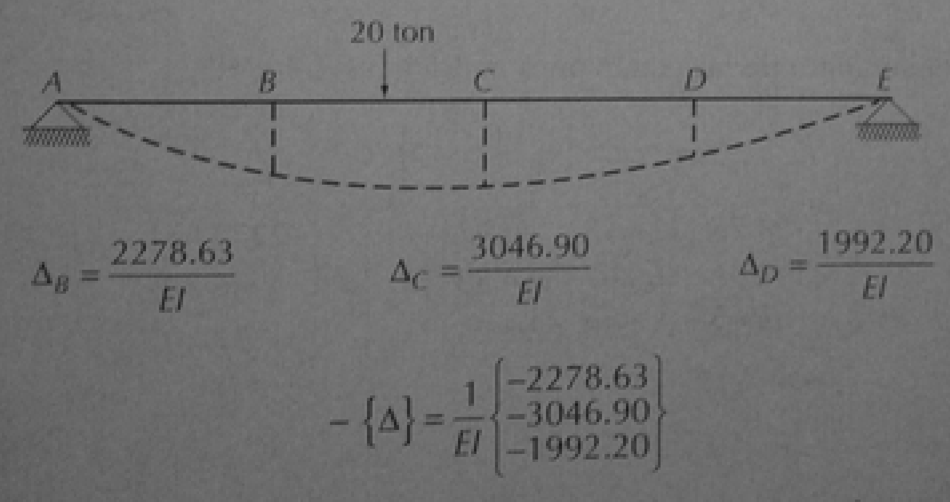
El paso siguiente es también el mismo que en el ejemplo 4.1. Consiste en calcular los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante a partir de las reacciones. Ya no se incluye en este ejemplo.

**EJEMPLO 4.5. RESOLUCIÓN DE LA VIGA DEL EJEMPLO 4.1, CON EL PLANTEAMIENTO MATRICIAL**

Paso *a)* Planteamiento de la viga isostática (igual que en el ejemplo 4.1).




Paso *b)* Deformaciones en la viga isostática (igual que en el ejemplo 4.1).



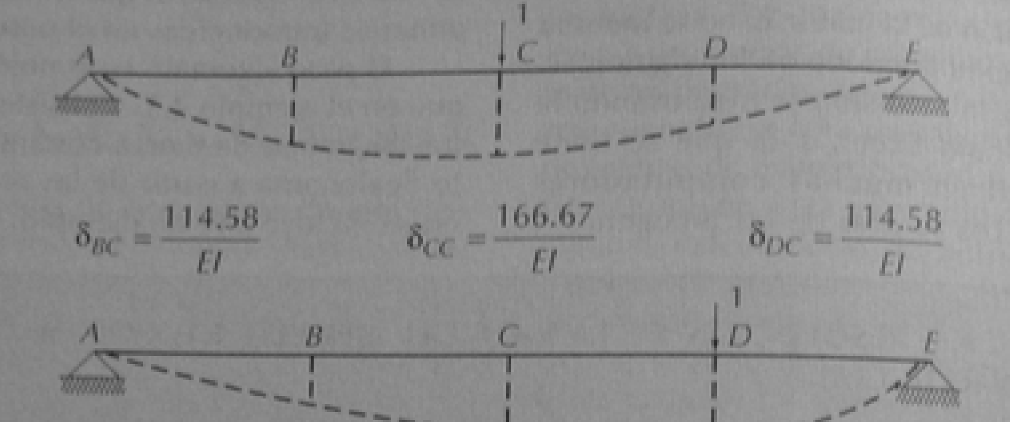

$$\Delta_B = \frac{2278.63}{EI} \qquad \Delta_C = \frac{3046.90}{EI} \qquad \Delta_D = \frac{1992.20}{EI}$$

$$-\{\Delta\} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -2278.63 \\ -3046.90 \\ -1992.20 \end{Bmatrix}$$

Paso *c)* Aplicación de las cargas unitarias y deflexiones correspondientes (igual que en el ejemplo 4.1).

$$\delta_{BB} = \frac{93.75}{EI} \qquad \delta_{CB} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DB} = \frac{72.92}{EI}$$

**EJEMPLO 4.5 *(continuación)***




$$\delta_{BC} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{CC} = \frac{166.67}{EI} \qquad \delta_{DC} = \frac{114.58}{EI}$$

$$\delta_{BD} = \frac{72.92}{EI} \qquad \delta_{CD} = \frac{114.58}{EI} \qquad \delta_{DD} = \frac{93.75}{EI}$$

$$[\delta] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 93.75 & 114.58 & 72.92 \\ 114.58 & 166.67 & 114.58 \\ 72.92 & 114.58 & 93.75 \end{bmatrix}$$

Paso *d*) Planteamiento de las ecuaciones matriciales 4.4 y 4.5.

$$[\delta]\{X\} = -\{\Delta\} \qquad \text{(ecuación 4.4)}$$

$$\begin{bmatrix} 93.75 & 114.58 & 72.92 \\ 114.58 & 166.67 & 114.58 \\ 72.92 & 114.58 & 93.75 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_B \\ X_C \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2278.63 \\ -3046.90 \\ -1992.20 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = -[\delta]^{-1}\{\Delta\} \qquad \text{(ecuación 4.5)}$$

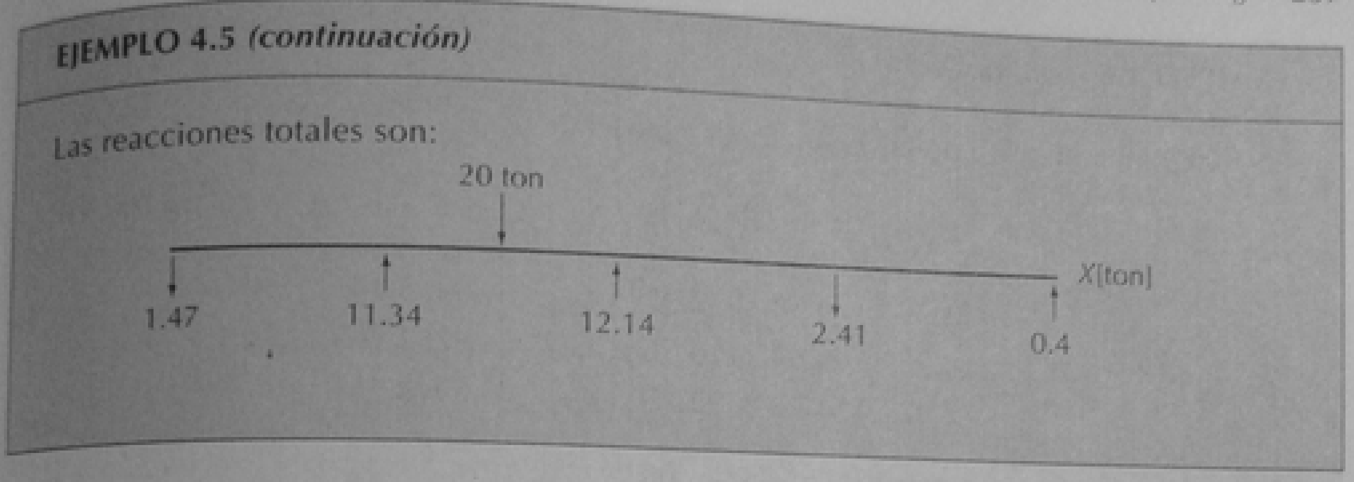
$$\begin{Bmatrix} X_B \\ X_C \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0787 & -0.0752 & 0.0307 \\ -0.0752 & 0.1095 & -0.0752 \\ 0.0307 & -0.0752 & 0.0787 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -2278.63 \\ -3046.90 \\ -1992.20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.34 \\ -12.14 \\ +2.41 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} [\text{ton}]$$

De $\sum M_A = 0, \quad X_E = 0.4 \text{ ton} \uparrow$

De $\sum M_E = 0, \quad X_A = 1.47 \text{ ton} \downarrow$

**EJEMPLO 4.5 *(continuación)***

Las reacciones totales son:

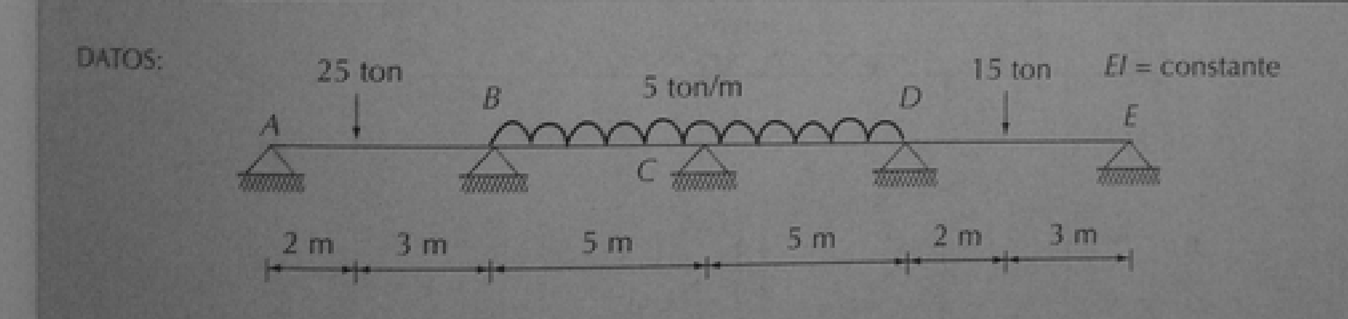



**Ejemplo 4.6**

Supóngase ahora que la misma viga tiene cargas diferentes a las del ejemplo anterior. Ya no es necesario repetir los pasos *a* y c. Únicamente se calcula la matriz {Δ} en el paso *b* y se resuelve la ecuación 4.5 en el paso *d*. Nótese que en la matriz −{Δ} las deflexiones se han introducido con signo cambiado. Puede verse que al no ser necesario obtener de nuevo la matriz [δ] se ahorra una buena cantidad de cálculos. En el paso e se muestran los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante obtenidos a partir de las reacciones.

**EJEMPLO 4.6. RESOLUCIÓN DE LA VIGA DEL EJEMPLO 4.1 CON DIFERENTES CARGAS**

DATOS:




Paso *b)* Cálculo de la matriz {Δ} de la viga isostática (los cálculos se muestran al final del ejemplo).

25 ton 5 ton/m 15 ton
A B C D E

$$-\{\Delta\} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -6965.34 \\ -9753.26 \\ -6918.26 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_B = \frac{6965.34}{EI} \qquad \Delta_C = \frac{9753.26}{EI} \qquad \Delta_D = \frac{6918.26}{EI}$$

**EJEMPLO 4.6 (continuación)**

Paso *d*) Planteamiento de las ecuaciones matriciales.

$$[\delta]\{X\} = -\{\Delta\} \qquad \text{(ecuación 4.4)}$$

$$\begin{bmatrix} 93.75 & 114.58 & 72.92 \\ 114.58 & 166.67 & 114.58 \\ 72.92 & 114.58 & 93.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_C \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6965.34 \\ -9753.26 \\ -6918.26 \end{Bmatrix}$$

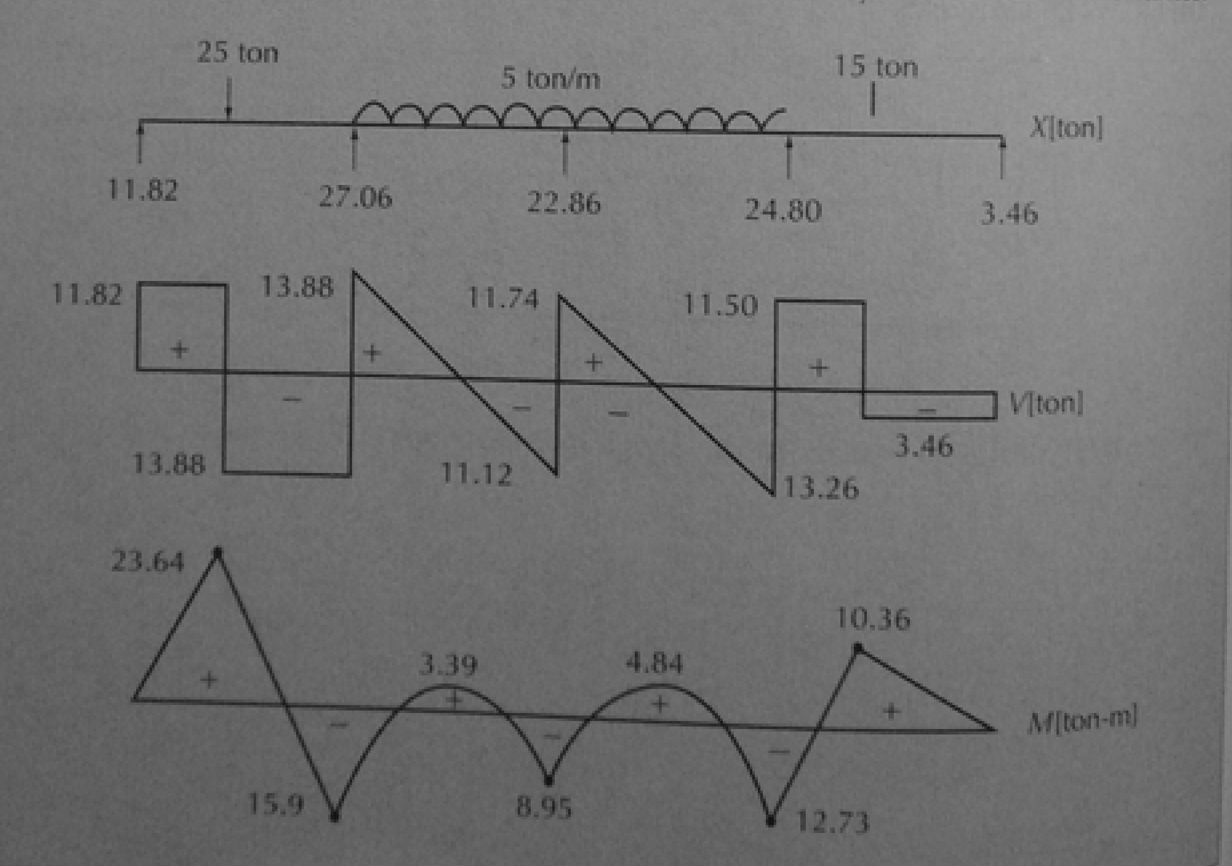
$$\{X\} = -[\delta]^{-1}\{\Delta\} \qquad \text{(ecuación 4.5)}$$

$$\begin{Bmatrix} X_B \\ X_C \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0787 & -0.0752 & 0.0307 \\ -0.0752 & 0.1095 & -0.0752 \\ 0.0307 & -0.0752 & 0.0787 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6965.34 \\ -9753.26 \\ -6918.26 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27.06 \\ -22.86 \\ -24.80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} [\text{ton}]$$

de $\sum M_A = 0, \quad X_E = 3.46 \text{ ton} \uparrow$

de $\sum M_E = 0, \quad X_A = 11.82 \text{ ton} \uparrow$

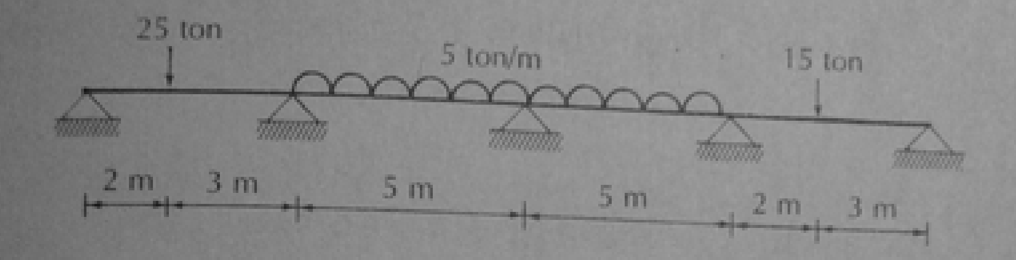
Paso e) Reacciones finales y cálculo de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



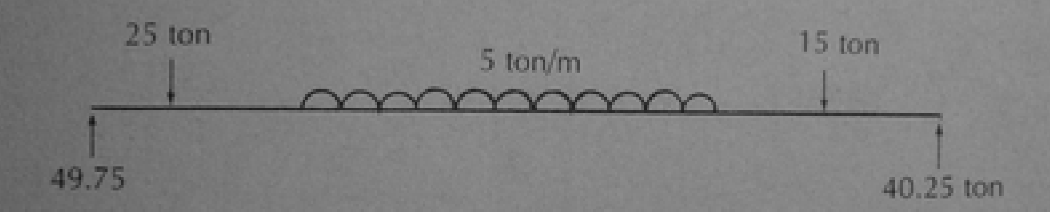
**EJEMPLO 4.6 *(continuación)***

ANEXO. CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES DEL PASO *b*.

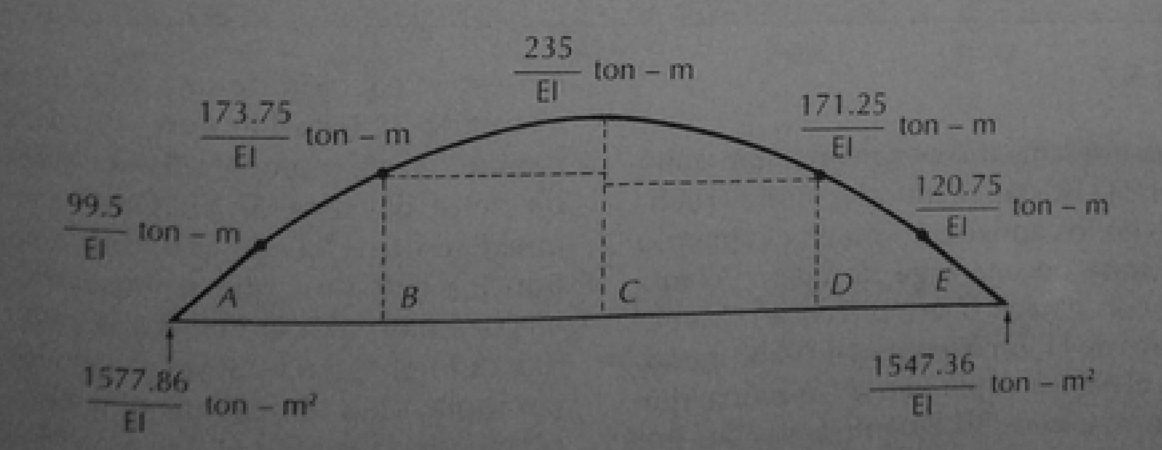
$EI$ = constante




1. Viga isostática




Viga real




Viga conjugada

**EJEMPLO 4.6 *(continuación)***

$$M_B=\Delta_B=\frac{1}{EI}\left[1577.86\times5-\left(\frac{1}{2}\times99.5\times2\right)\left(3+\frac{1}{3}\times2\right)-99.5\times3\times1.5-\left(\frac{1}{2}\times74.25\times3\right)\left(\frac{1}{3}\times3\right)\right]=\frac{6965.34}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_C=\Delta_C=\frac{1}{EI}\left[1577.86\times10-\left(\frac{1}{2}\times99.5\times2\right)(26/3)-99.5\times3\times6.5-\left(\frac{1}{2}\times74.25\times3\right)(6)-\left(\frac{2}{3}\times61.25\times5\right)(15/8)-(173.75\times5\times2.5)\right]$$

$$M_C=\Delta_C=\frac{9753.26}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

$$M_C=\Delta_D=\frac{1}{EI}\left[1547.36\times5-\left(\frac{1}{2}\times120.75\times3\right)(3)-120.75\times2\times1-\left(\frac{1}{2}\times50.5\times2\right)(2/3)\right]=\frac{6918.26}{EI}\ \text{ton}\cdot\text{m}^3$$

**Ejemplo 4.7**

Se ilustra el planteamiento matricial cuando se obtiene la isostática introduciendo articulaciones en los apoyos, como en el ejemplo 4.2. Se trata de una viga de cuatro claros iguales con cargas distribuidas, en la cual los valores de EI son diferentes en cada tramo.

En el paso *a* se plantea la isostática, que consiste en tramos libremente apoyados por efecto de las articulaciones introducidas en los apoyos.

En el paso *b* se han caculado las rotaciones o giros producidos en cada tramo por las cargas distribuidas. Por el principio de la viga conjugada, la rotación en cada extremo es la reacción de una viga libremente apoyada cargada con el diagrama parabólico de momento flexionante dividido entre el valor de *EI*. Obsérvese en el anexo al final del ejemplo, donde se muestran los cálculos, que es necesario tomar en cuenta el valor de *EI* en cada tramo. Cada reacción es igual a la mitad del área de la parábola. Con los valores obtenidos se ha planteado la matriz Θ. De acuerdo con la notación de signos utilizada, las rotaciones son positivas por ser producidas por momentos positivos.

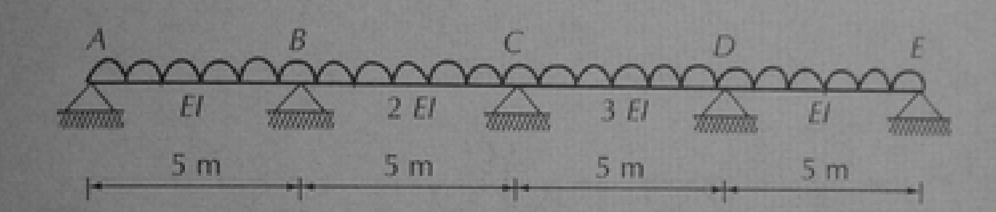
Los coeficientes de flexibilidad se han obtenido en el paso *c* aplicando momentos unitarios en los extremos de cada tramo li-

bremente apoyado y calculando las rotaciones producidas en cada extremo. En estos casos las rotaciones son las reacciones de los tramos cargados con un diagrama triangular de momentos flexionantes. Nuevamente se hace notar que en los cálculos se ha considerado el valor de *EI* en cada tramo. Los valores calculados permiten plantear la matriz $[\theta]$.

En el siguiente paso se resuelve la ecuación 4.7 para obtener los valores de las incógnitas $\{M\}$ que en este caso son los valores de los momentos de apoyo sobre barra en cada extremo de los tramos de viga. Al igual que en los ejemplos anteriores, no se incluye la inversión de la matriz, la cual se efectuó con el programa Excel.

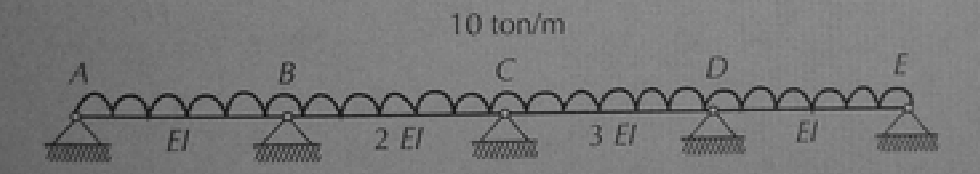
## EJEMPLO 4.7. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA DE DIFERENTES PROPIEDADES POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

DATOS:




SOLUCIÓN:

Paso *a)* Planteamiento de la viga isostática.




Paso *b)* Deformaciones de la viga isostática (los cálculos se presentan al final del ejemplo).

10 ton/m

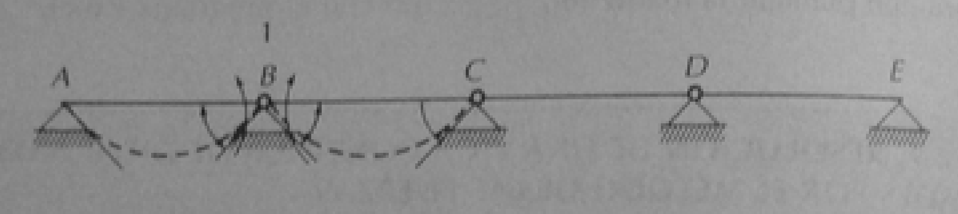
A B C D E

$$\Theta_B = \frac{78.12}{EI} \qquad \Theta_C = \frac{43.40}{EI} \qquad \Theta_D = \frac{69.44}{EI}$$

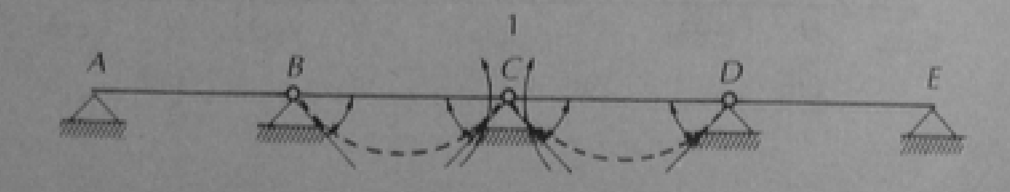
$$-\{\Theta\} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -78.12 \\ -43.40 \\ -69.44 \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 4.7 *(continuación)***

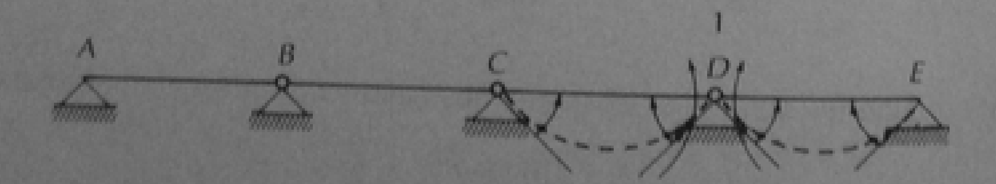
Paso c) Aplicación de los momentos unitarios y rotaciones correspondientes (los cálculos se presentan al final del ejemplo).




$$\theta_{BB} = \frac{5/2}{EI} \qquad \theta_{CB} = \frac{5/12}{EI} \qquad \theta_{DB} = 0$$




$$\theta_{BC} = \frac{5/12}{EI} \qquad \theta_{CC} = \frac{25/18}{EI} \qquad \theta_{DC} = \frac{5/18}{EI}$$




$$\theta_{BD} = 0 \qquad \theta_{CD} = \frac{5/18}{EI} \qquad \theta_{DD} = \frac{20/9}{EI}$$

$$[\theta] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 5/2 & 5/12 & 0 \\ 5/12 & 25/18 & 5/18 \\ 0 & 5/18 & 20/9 \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 4.7** ***(continuación)***

Paso *d)* Planteamiento matricial y obtención de los momentos.

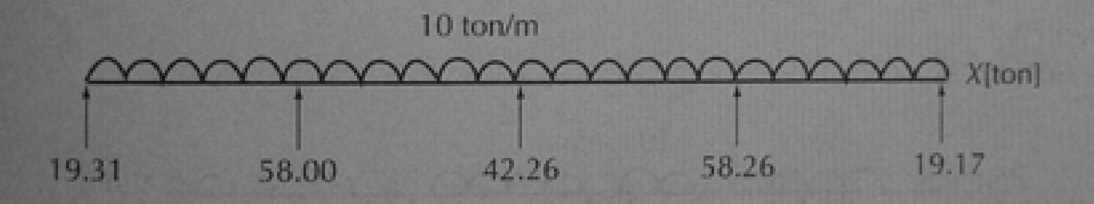
$$[\theta]\{M\} = -\{\Theta\} \qquad \text{(ecuación 4.6)}$$

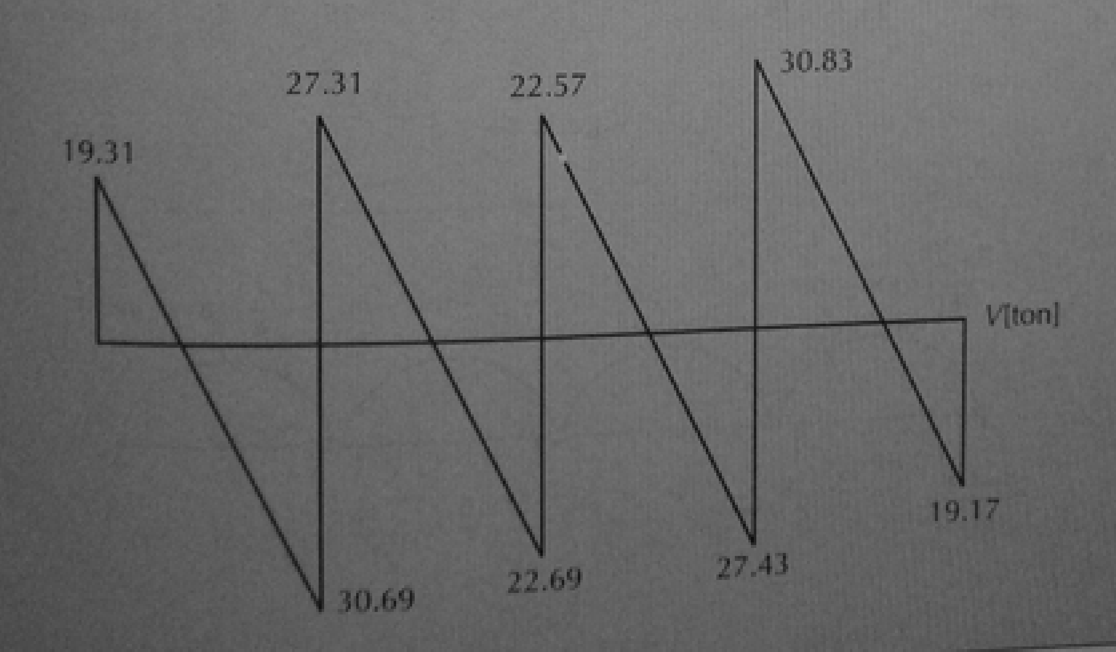
$$\begin{bmatrix} 5/2 & 5/12 & 0 \\ 5/12 & 25/18 & 5/18 \\ 0 & 5/18 & 20/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -78.12 \\ -43.40 \\ -69.44 \end{Bmatrix}$$

$$\{M\} = -[\theta]^{-1}\{\Theta\} \qquad \text{(ecuación 4.7)}$$

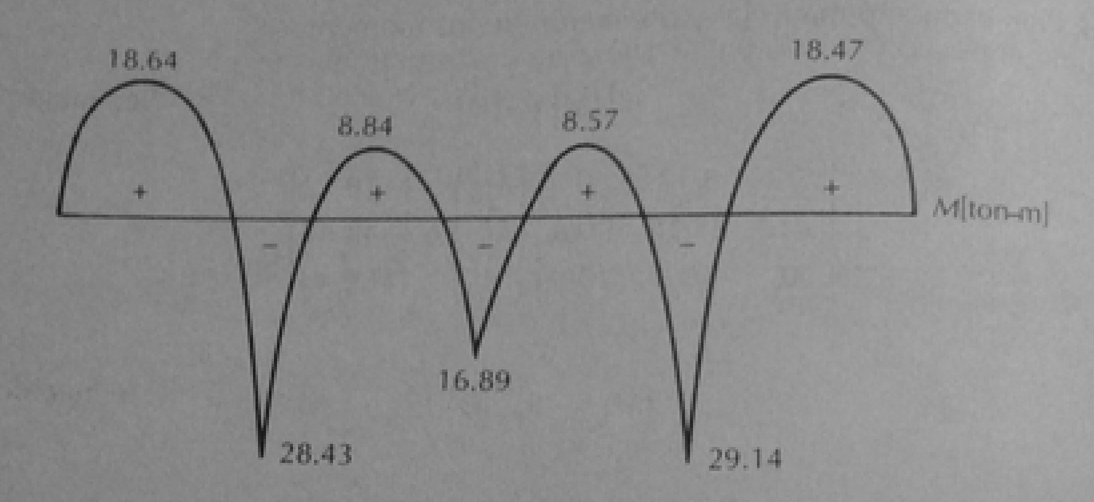
$$\begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4216 & -0.12973 & 0.01622 \\ -0.12973 & 0.77838 & -0.09729 \\ 0.01622 & -0.09729 & 0.46216 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -78.12 \\ -43.40 \\ -69.44 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -28.43 \\ -16.89 \\ -29.14 \end{Bmatrix} (\text{ton} \cdot \text{m})$$

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

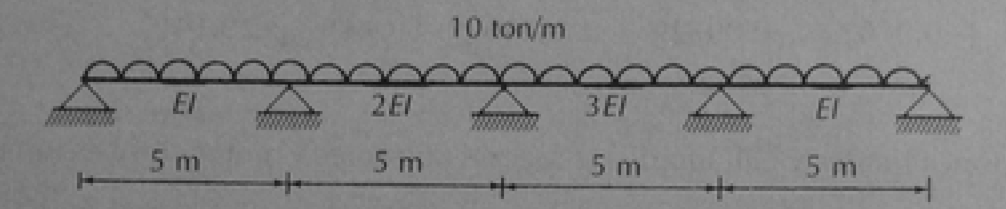


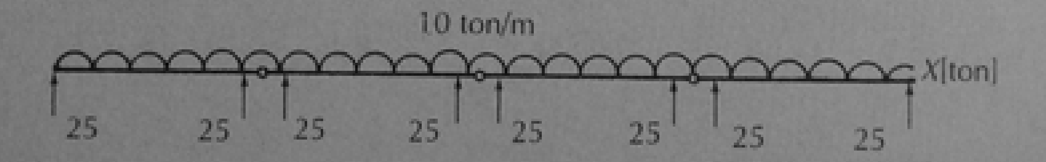
**EJEMPLO 4.7 *(continuación)***



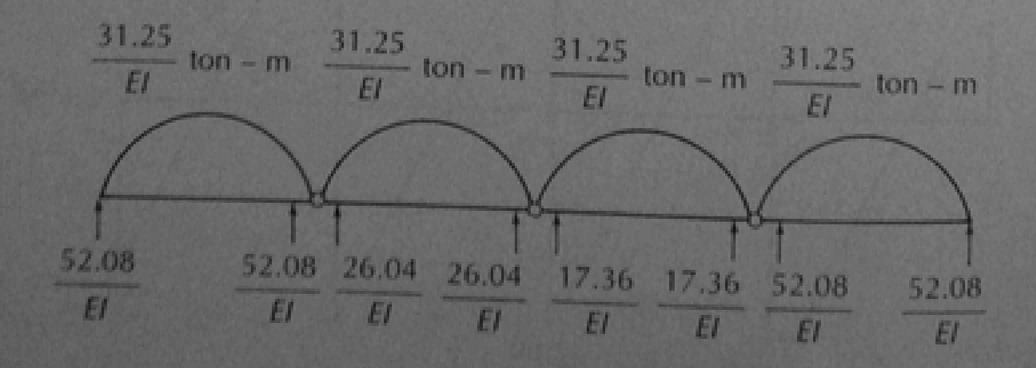

ANEXO. CÁLCULO DE LOS GIROS




1. Viga isostática




Viga real




Viga conjugada

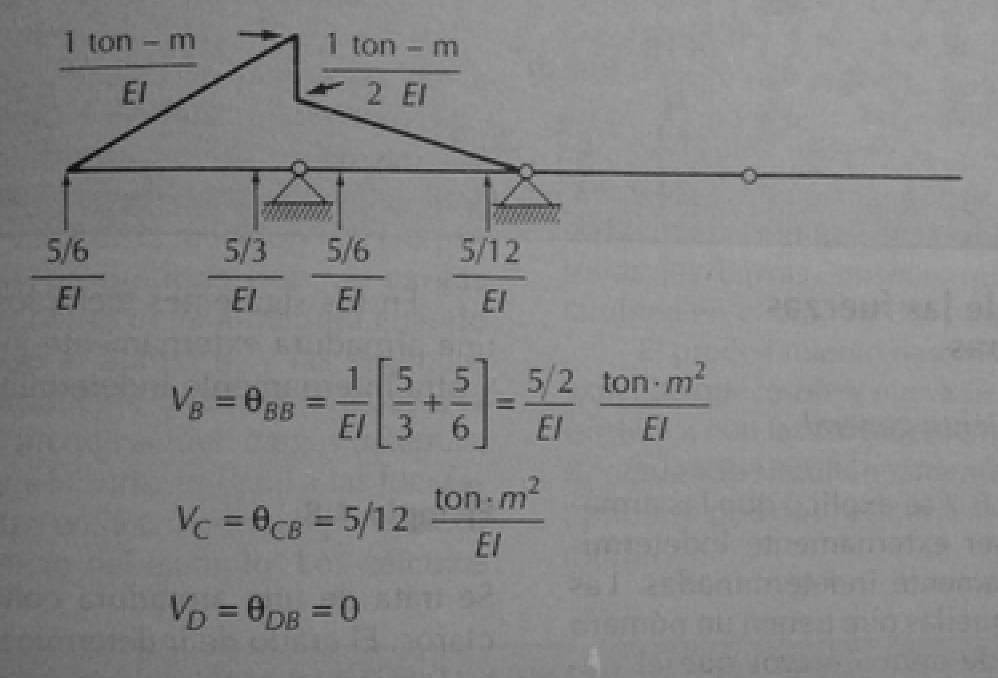
**EJEMPLO 4.7** ***(continuación)***

$$V_B = \Theta_B = \frac{1}{EI}\left[52.08 + 26.04\right] = \frac{78.12}{EI}\ \text{ton}\cdot m^2$$

$$V_C = \Theta_C = \frac{1}{EI}\left[26.04 + 17.36\right] = \frac{43.40}{EI}\ \text{ton}\cdot m^2$$

$$V_D = \Theta_D = \frac{1}{EI}\left[17.36 + 52.08\right] = \frac{69.44}{EI}\ \text{ton}\cdot m^2$$

2. Viga conjugada con momento en $B$.




$$V_B = \theta_{BB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{3} + \frac{5}{6}\right] = \frac{5/2}{EI}\ \frac{\text{ton}\cdot m^2}{EI}$$

$$V_C = \theta_{CB} = 5/12\ \frac{\text{ton}\cdot m^2}{EI}$$

$$V_D = \theta_{DB} = 0$$

3. Viga conjugada con momento en $C$.

1 ton-m / 2 EI   1 ton – m / 3 EI

5/12 / EI   5/6 / EI   5/9 / EI   5/18 / EI

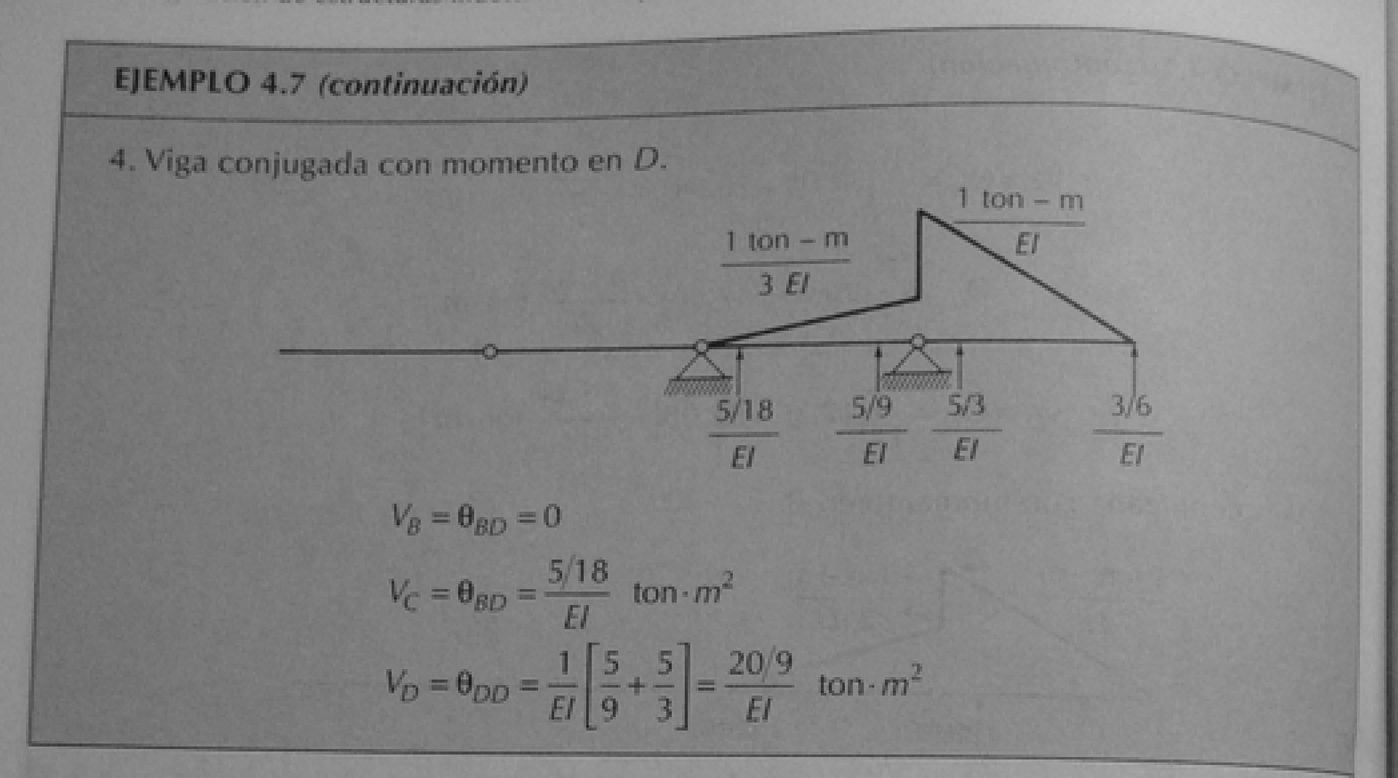
$$V_B = \theta_{BC} = \frac{5/12}{EI}\ \text{ton}\cdot m^2$$

$$V_C = \theta_{CC} = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{6} + \frac{5}{9}\right] = \frac{25/18}{EI}\ \ \text{ton}\cdot m^2$$

$$V_D = \theta_{DC} = \frac{5/18}{EI}\ \ \text{ton}\cdot m^2$$

**EJEMPLO 4.7 *(continuación)***

4. Viga conjugada con momento en $D$.




$$V_B = \theta_{BD} = 0$$

$$V_C = \theta_{BD} = \frac{5/18}{EI} \ \ \text{ton}\cdot m^2$$

$$V_D = \theta_{DD} = \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{9} + \frac{5}{3}\right] = \frac{20/9}{EI} \ \ \text{ton}\cdot m^2$$

## 4.4 Método de las fuerzas para armaduras

### *4.4.1 Planteamiento general*

En la sección 2.6.2 se explicó que las armaduras podían ser externamente indeterminadas o internamente indeterminadas. Las primeras son aquellas que tienen un número de reacciones de apoyo mayor que el número de ecuaciones de equilibrio sumado al número de ecuaciones de condición. Por lo tanto, la obtención de las reacciones de apoyo por el método de las fuerzas se hace exactamente igual que para las vigas. Desde luego, las deflexiones de la armadura isostática, tanto las producidas por las cargas externas como las producidas por las cargas unitarias, se calculan por los métodos presentados en la sección 3.7.7

Las armaduras internamente indeterminadas se resuelven también siguiendo los pasos fundamentales del método de las fuerzas de la sección 4.2, pero la armadura isostática, equivalente a la viga isostática, se logra eliminando miembros redudantes de la armadura, o sea, miembros que puedan suprimirse sin que la armadura se vuelva inestable.

En los siguientes ejemplos se resuelve una armadura externamente indeterminada y otra internamente indeterminada.

**Ejemplo 4.8**

Se trata de una armadura continua de dos claros. El grado de indeterminación externa es 1, mientras que internamente es isostática ya que se cumple la ecuación 2.11.

La armadura isostática se ha planteado en el paso *a* eliminando el apoyo intermedio.

En el paso *b* se muestra la deflexión en el punto $L_2$ calculada como se presenta en la sección 3.7.7. Esta deflexión se calcula con la ecuación

$$\Delta = \sum\left(\frac{F\mu\ell}{AE}\right) \tag{4.8}$$

Al final del ejemplo se incluye la tabla para el cálculo de esta deflexión que resultó de 62313/$E$ cm y que es la incompatibilidad geométrica de la isostática. Obsérvese que como el valor del módulo de elasticidad $E$ es constante puede factorizarse en los cálculos.

En el paso *c* se calcula la deflexión que produce la carga unitaria aplicada en el punto $L_2$, para lo cual se utiliza la ecuación

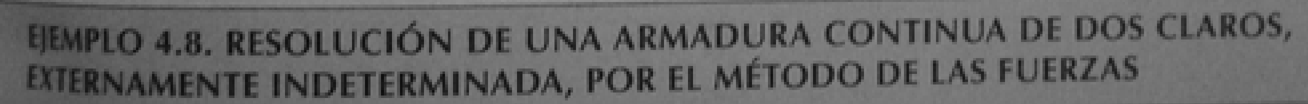
$$\delta = \sum\left(\frac{\mu^2 \ell}{AE}\right) \qquad (4.9)$$

También se incluye en la tabla que está al final del ejemplo el cálculo de esta deflexión.

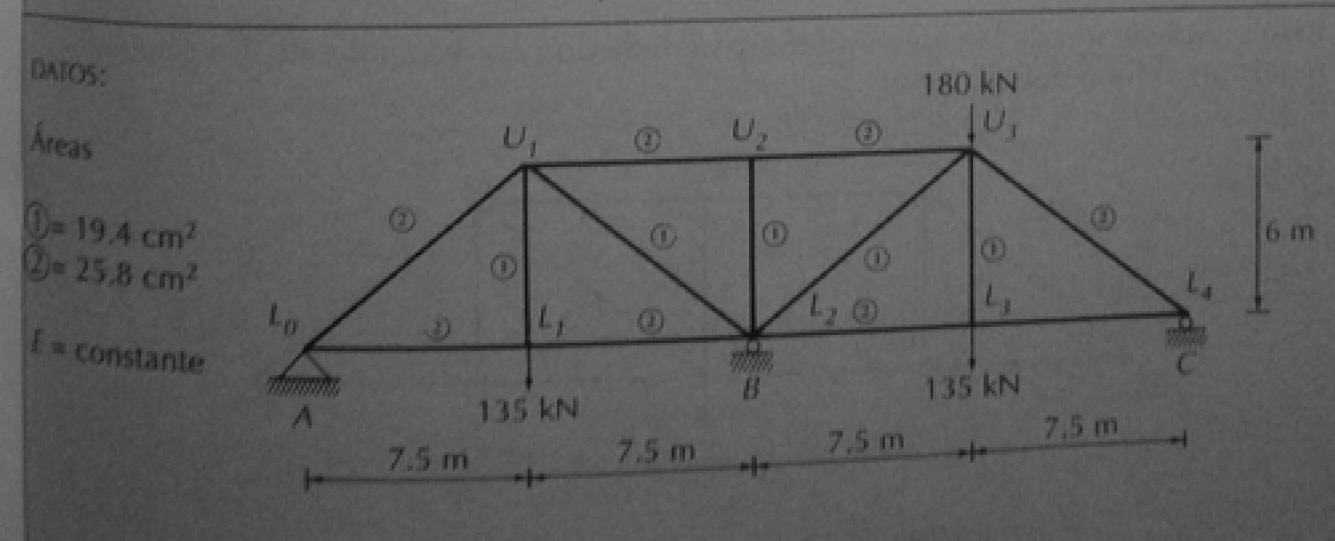
En el paso *d* se plantea la ecuación de correción de la incompatibilidad geométrica. Como el grado de indeterminación es igual a 1, en vez de un sistema de ecuaciones resulta una sola ecuación. Ya conocida la reacción en $L_2$, se pueden calcular las otras reacciones, usando las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_E = 0$,

Las fuerzas finales en las barras de la armadura pueden calcularse ahora sumando las correspondientes al paso *b* con las correspondientes al paso *c*, multiplicadas estas últimas por el valor de la reacción $X_B$. Las primeras son las producidas por las cargas externas en las barras de la armadura cuando se ha suprimido el apoyo *B*, y las segundas son las que produciría una fuerza igual a la reacción en *B* sin que actúen cargas externas. Puede verse que la suma es igual a las fuerzas que se presentan en la armadura hiperestática mostrada al inicio del ejemplo. Los cálculos correspondientes se muestran en la última columna de la tabla que está al final del ejemplo. Para ilustrar lo que significa este cálculo, considérese la barra $L_0L_1$. En la armadura isostática, las cargas externas producen una fuerza de tensión, *F',* de 225 kN en esta barra. Si a esta misma armadura isostática se le aplica ahora una fuerza igual a la reacción $X_B$, o sea, de 252 kN hacia arriba, en la barra aparecerá una fuerza igual a la producida por la carga unitaria del paso *c*, $\mu$, multiplicada por el valor de $X_B$ y con signo contrario; esta segunda fuerza valdrá, entonces, [0.625(-252) = 157.5]. La fuerza total, *F*, será la suma de las dos anteriores, $F = F' + X_B\,\mu$. Para el caso en cuestión, la fuerza total en la barra será $F$ = 225 – 157.5 = 67.5 kN, valor mostrado en el primer renglón de la tabla incluida al final del ejemplo. De esta manera se han calculado en la última columna de la tabla las fuerzas en todas las barras, mismas que se muestran también en el croquis del paso *e*.

El procedimiento descrito es mucho más expedito que resolver nuevamente la armadura isostática con las cargas externas y la reacción $X_B$ actuando simultáneamente, forma en que también podrían encontrarse las fuerzas totales.

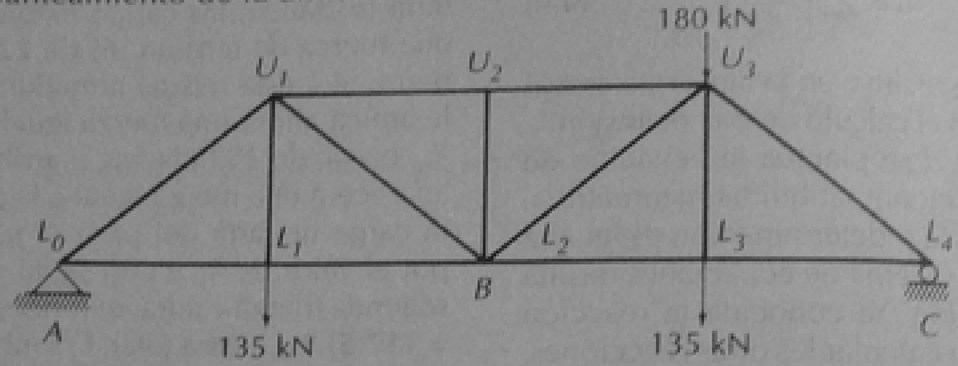


**EJEMPLO 4.8. RESOLUCIÓN DE UNA ARMADURA CONTINUA DE DOS CLAROS, EXTERNAMENTE INDETERMINADA, POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS**

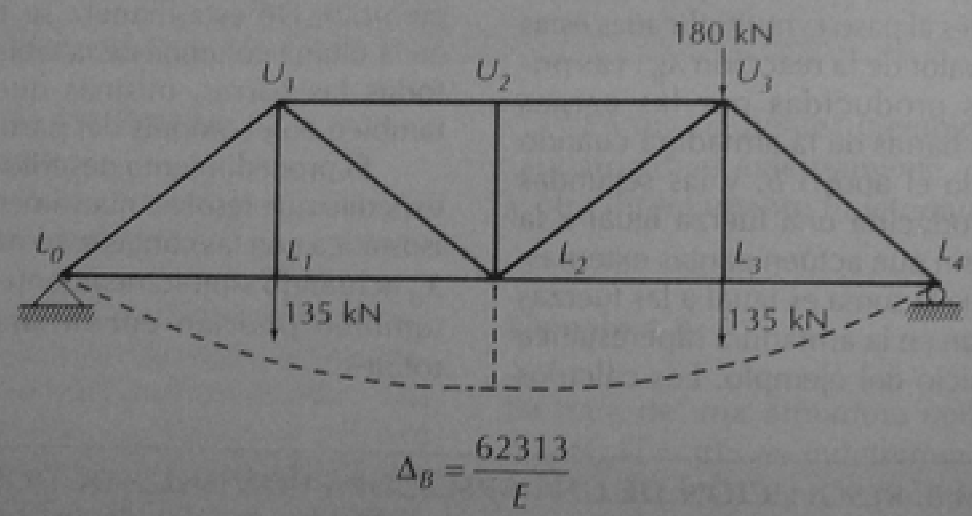


**EJEMPLO 4.8 (continuación)**

Paso *a*) Planteamiento de la armadura isostática.

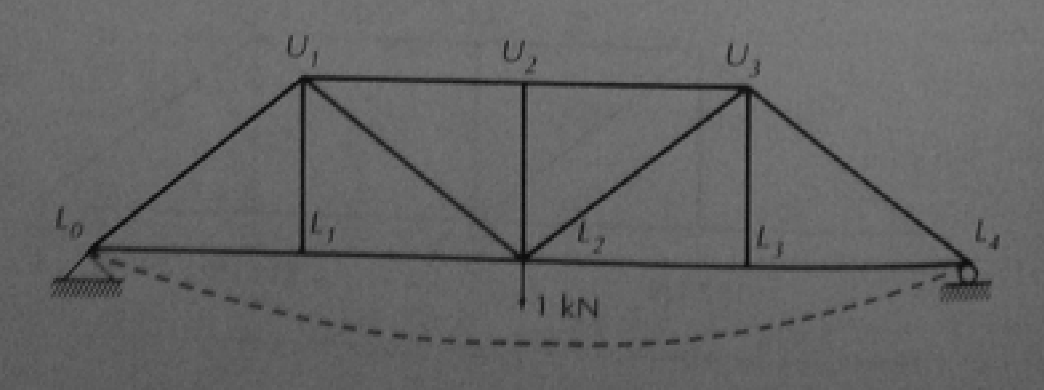



Paso *b*) Deformación de la armadura isostática (los cálculos se muestran al final del ejemplo).




$$\Delta_B = \frac{62313}{E}$$

Paso *c*) Aplicación de la carga unitaria y su deflexión correspondiente (los cálculos se muestran al final del ejemplo).




$$\delta_{BB} = \frac{247}{E}$$

**EJEMPLO 4.8** ***(continuación)***

Paso *d)* Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica y cálculo de la fuerza correctiva.

$$\Delta_B + \delta_{BB} X_B = 0$$

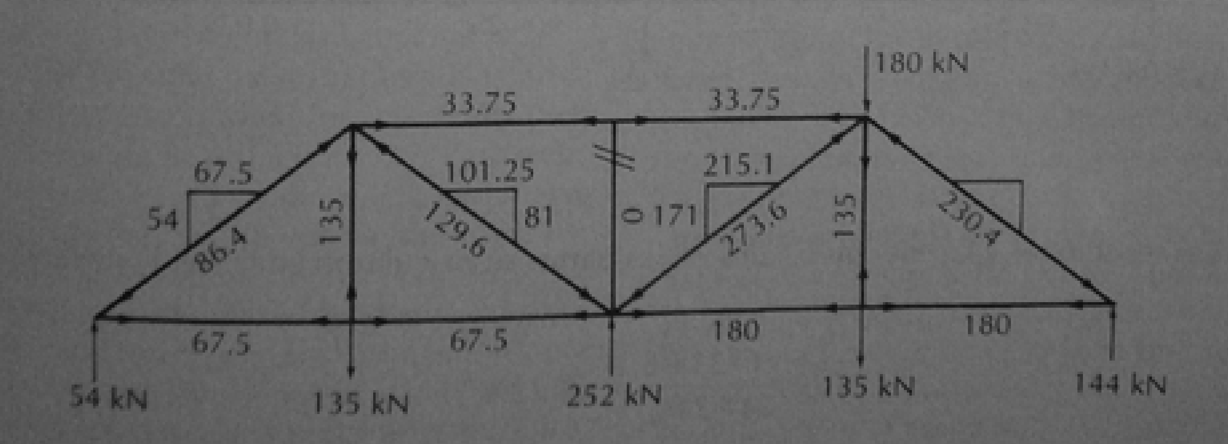
$$X_B = -\frac{\Delta_B}{\delta_{BB}} = -\frac{\sum\left(F'\mu_B\, \ell/AE\right)}{\sum\left(\mu_B^2\, \ell/AE\right)}$$

$$X_B = -\frac{62313/E}{247.24/E} = 252 \text{ kN} \uparrow$$

$$\text{de } \sum M_A = 0, \quad X_C = 114 \text{ kN} \uparrow$$

$$\text{de } \sum M_C = 0, \quad X_A = 54 \text{ kN} \uparrow$$

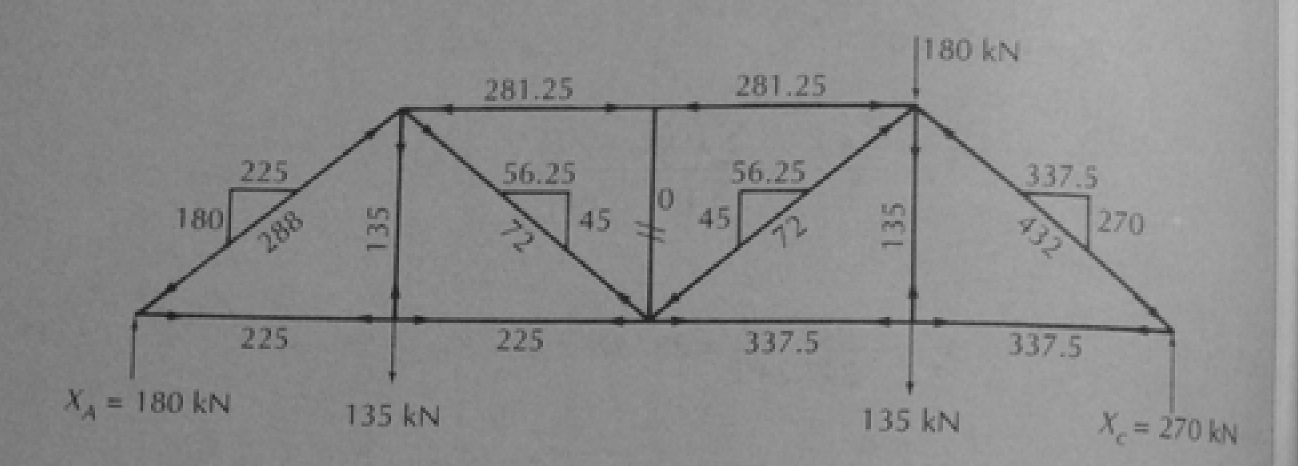
Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de las fuerzas internas.



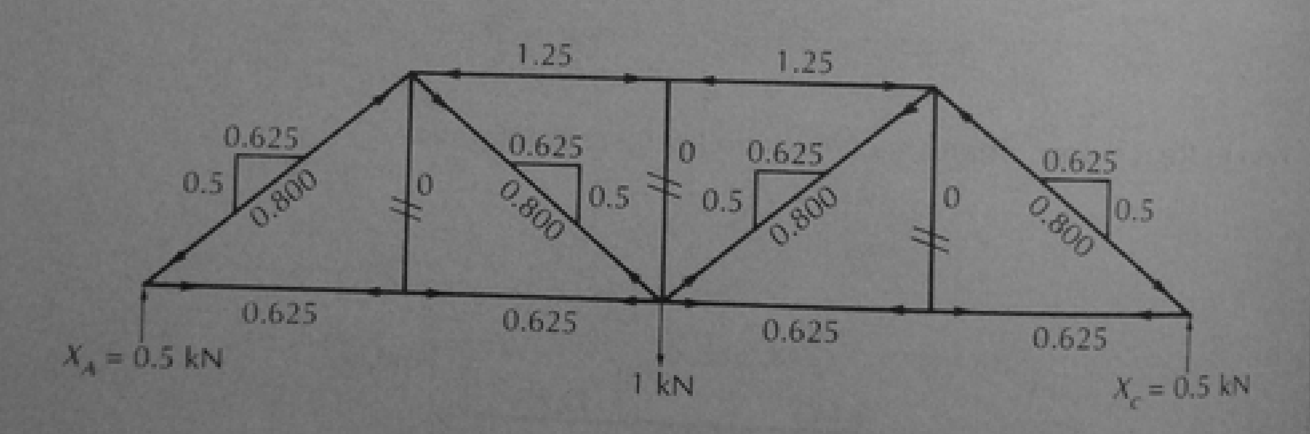
**EJEMPLO 4.8 *(continuación)***

ANEXO. CÁLCULO DE LAS FUERZAS INTERNAS Y DEFLEXIONES.

1. Eliminando el apoyo central considerado como redundante, se calculan las fuerzas $F'$.




2. Retirando las cargas externas y colocando una carga unitaria en el apoyo central, se calculan las fuerzas μ.




3. Las reacciones y las fuerzas finales en las barras se calcularon en la siguiente tabla.

$$X_B = \frac{-62313/E}{247.24/E} = -252 \text{ kN} \uparrow$$

**EJEMPLO 4.8 (continuación)**

| Barra | $\ell$ $(cm)$ | $A$ $(cm^2)$ | $\ell/A$ $(cm^{-1})$ | $F'$ $(kN)$ | $\mu$ | $\frac{F'\mu\ell}{AE}$ | $\frac{\mu^2\ell}{AE}$ | $F = F'+\mu X_B$ $(kN)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_0L_1$ | 750 | 25.8 | 29.07 | 225.00 | 0.625 | 4 088 | 11.36 | 67.5 |
| $L_1L_2$ | 750 | 25.8 | 29.07 | 225.00 | 0.625 | 4 088 | 11.36 | 67.5 |
| $L_2L_3$ | 750 | 25.8 | 29.07 | 337.50 | 0.625 | 6 132 | 11.36 | 180.0 |
| $L_3L_4$ | 750 | 25.8 | 29.07 | 337.50 | 0.625 | 6 132 | 11.36 | 180.0 |
| $L_0U_1$ | 960 | 25.8 | 37.21 | −288.00 | −0.800 | 8 573 | 23.81 | −86.4 |
| $U_1U_2$ | 750 | 25.8 | 29.07 | −281.25 | −1.250 | 10 220 | 45.42 | 33.75 |
| $U_2U_3$ | 750 | 25.8 | 29.07 | −281.25 | −1.250 | 10 220 | 45.42 | 33.75 |
| $U_3L_4$ | 960 | 25.8 | 29.07 | −432.00 | −0.800 | 12 860 | 23.81 | −230.40 |
| $U_1L_1$ | 600 | 19.4 | 30.93 | 135.00 | 0 | 0 | 0 | 135.00 |
| $U_1L_2$ | 960 | 19.4 | 49.48 | 72.00 | 0.800 | 2 850 | 31.67 | −129.60 |
| $U_2L_2$ | 600 | 19.4 | 30.93 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $U_3L_2$ | 960 | 19.4 | 49.48 | −72.00 | 0.800 | −2 850 | 31.67 | −273.60 |
| $U_3L_3$ | 600 | 19.4 | 30.93 | 135.00 | 0 | 0 | 0 | 135.00 |
| $\Sigma=$ | | | | | | $\frac{62313}{E}$ | $\frac{247.24}{E}$ | |

**Ejemplo 4.9**

La armadura de este ejemplo es isostática externamente, ya que tiene dos reacciones de apoyo y hay dos ecuaciones de equilibrio, pero internamente es hiperestática de grado 1 de acuerdo con las ecuaciones 2.12.

Para plantear la armadura isostática debe eliminarse uno de los miembros para que se cumpla la ecuación 2.11. Pero debe elegirse un miembro que pueda eliminarse sin que la armadura se vuelva inestable. Por ejemplo, si se eliminase el miembro $L_1$-$U_1$ la armadura sería inestable ya que no estaría formada por triángulos. En cambio pueden eliminarse los miembros $U_1$-$L_2$ o $U_2$-$L_1$ y la armadura sigue siendo estable. En el paso *a* de este ejemplo se ha eliminado el miembro $U_2$-$L_1$. El miembro puede eliminarse totalmente, pero el mismo efecto se logra si en vez de eliminarlo se corta en algún punto, ya que no podría resistir ninguna fuerza axial. Esta segunda opción es la que se sigue en el ejemplo porque toma en cuenta la deformación propia del miembro.

En el paso *b* se han calculado las fuerzas en todos los miembros de la armadura isostática; son las fuerzas $F'$ de la tabla, aunque no se incluyen todos los cálculos. También se ha calculado la incompatibilidad geométrica en la isostática, que en este caso es el desplazamiento $\Delta$ que ocurre entre las dos secciones del corte. Como en la armadura original la barra $U_2$-$L_1$ es continua, este desplazamiento no existe. Ahora bien, para calcular $\Delta$, de acuerdo con lo estudiado en la sección 3.7.7, se coloca una fuerza unitaria virtual a ambos lados del corte, como se muestra en la figura 4.3, y se calculan las fuerzas en las barras producidas por la fuerza unitaria. Son las fuerzas $\mu$ mostradas en la tabla. Teniendo las fuerzas $F'$ y $\mu$, la deflexión $\Delta$ se calcula con la ecuación

$$\Delta = \sum \left( \frac{F'\mu\ell}{AE} \right) \qquad (4.8)$$

que es equivalente a la ecuación 3.54 del capítulo 3.

El segundo miembro de esta ecuación es la suma de los valores de la columna 7 de la tabla.

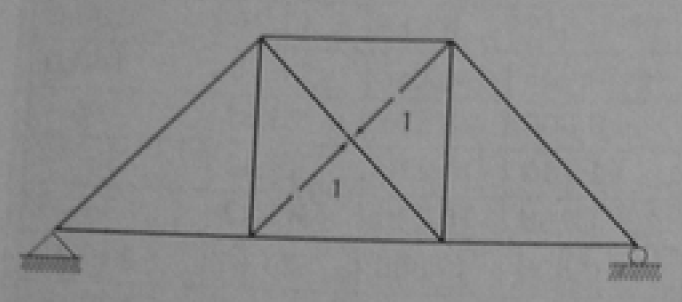



**Figura 4.3.** Introducción de una fuerza unitaria en la armadura isostática del ejemplo 4.9

En el paso *c* se calcula la deformación $\delta$ producida por una carga unitaria aplicada a ambos lados del corte efectuado en la barra $U_2$-$L_1$. Para hacer este cálculo, se deben introducir fuerzas unitarias virtuales en los mismos puntos donde se colocan las fuerzas unitarias que corrigen los errores de geometría de la isostática. Por lo tanto, la deformación $\delta$ se calcula con la fórmula

$$\delta = \sum \left( \frac{\mu^2\ell}{AE} \right) \qquad (4.9)$$

ya que tanto la fuerza que corrige la incompatibilidad de geometría como la fuerza virtual para el cálculo de deformaciones producen los mismos esfuerzos $\mu$ de la columna 6 de la tabla del paso *b*.

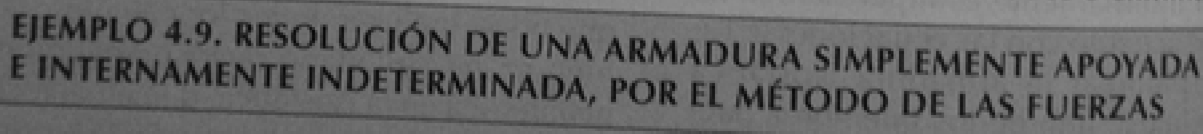
En el paso *d* se corrige la incompatibilidad de geometría planteando la ecuación

$$\Delta + X\,\delta = 0 \qquad (4.10)$$

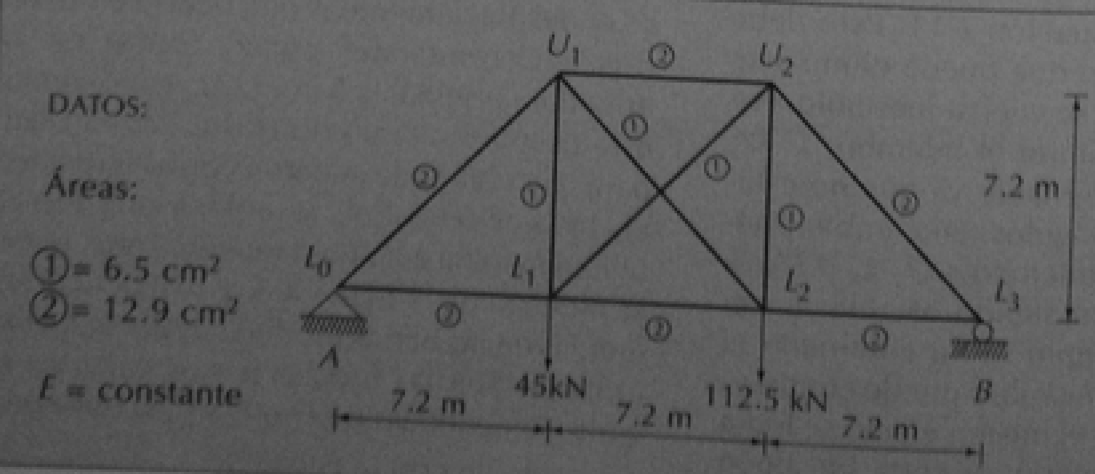
y despejando el valor de $X$. En este caso $X$ es la fuerza real en la barra $U_2$-$L_1$. Al igual que en el ejemplo anterior, como sólo hay un grado de indeterminación, en vez de un sistema de ecuaciones resulta una ecuación.

Como se explicó en el ejemplo anterior, las fuerzas finales en cada barra, $F$, serán la suma de las fuerzas en la armadura isostática, $F'$, y de las fuerzas $\mu$ multiplicadas por el valor de la incógnita $X$. Estos valores se han calculado en la columna 9 de la tabla incluida en el paso *b*.

Después de analizar los dos ejemplos anteriores puede deducirse un procedimiento para resolver armaduras que sean indeterminadas tanto externamente como internamente. Se deben eliminar tanto reacciones de apoyo como miembros de la armadura, en número tal que ésta resulte isostática internamente y externamente. Las fuerzas unitarias para corregir las incompatibilidades de geometría se colocarán en las reacciones eliminadas y en los miembros cortados o eliminados.

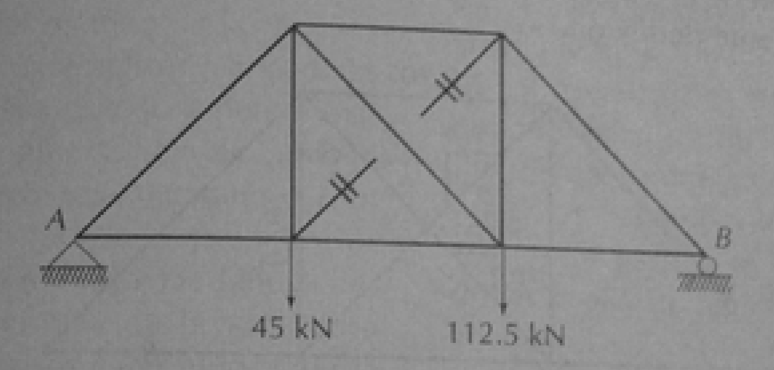


## EJEMPLO 4.9. RESOLUCIÓN DE UNA ARMADURA SIMPLEMENTE APOYADA E INTERNAMENTE INDETERMINADA, POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

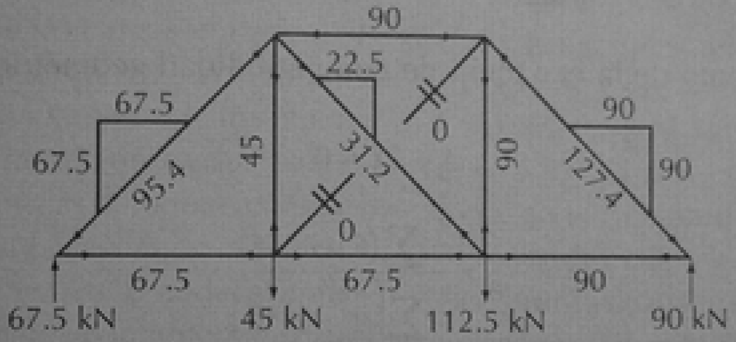


**EJEMPLO 4.9** *(continuación)*

Paso *a)* Planteamiento de la armadura isostática.




Paso *b)* Cálculo de las fuerzas $F'$ y de la deflexión correspondiente a la armadura isostática.

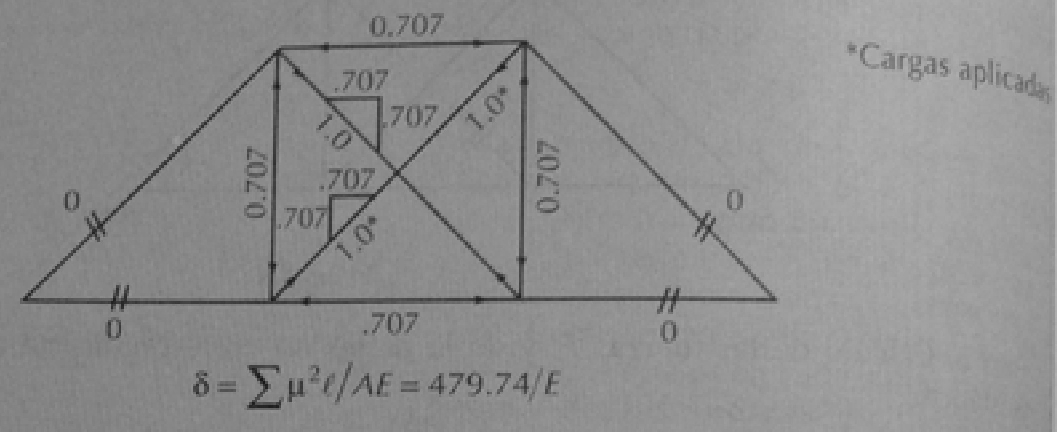



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Barra | $\ell$ (cm) | $A$ ($cm^2$) | $\ell/A$ ($cm^{-1}$) | $F'$ kN | $\mu$ | $\frac{F'\mu\ell}{AE}$ | $\frac{\mu^2\ell}{AE}$ | $F = F' + X\mu$ (kN) |
| $L_0L_1$ | 720 | 12.9 | 55.8 | 67.5 | 0 | 0 | 0 | 67.5 |
| $L_1L_2$ | 720 | 12.9 | 55.8 | 67.5 | −0.707 | −2 663 | 27.89 | 60.5 |
| $L_2L_3$ | 720 | 12.9 | 55.8 | 90.0 | 0 | 0 | 0 | 90.0 |
| $L_0U_1$ | 1018 | 12.9 | 78.9 | −95.4 | 0 | 0 | 0 | −95.4 |
| $U_1U_2$ | 720 | 12.9 | 55.8 | −90.0 | −0.707 | 3 551 | 27.89 | −96.9 |
| $U_2L_3$ | 1018 | 12.9 | 78.9 | −127.4 | 0 | 0 | 0 | −127.4 |
| $U_1L_1$ | 720 | 6.5 | 110.8 | 45.0 | −0.707 | −3 551 | 55.38 | 38.0 |
| $U_1L_2$ | 1018 | 6.5 | 156.6 | 31.2 | 1.000 | 4 996 | 156.60 | 41.7 |
| $U_2L_1$ | 1018 | 6.5 | 156.6 | 0.0 | 1.000 | 0 | 156.60 | 9.8 |
| $U_2L_2$ | 720 | 6.5 | 110.8 | 90.0 | −0.707 | −7 050 | 55.38 | 83.0 |
| $\sum$ | | | | | | −4717/$E$ | 479.74/$E$ | |

$$\Delta_{U_2L_1} = \sum \frac{F'\mu\ell}{AE} = -\frac{4717}{E}$$

**EJEMPLO 4.9 *(continuación)***

Paso *c)* Aplicación de la carga unitaria en el miembro $U_2L_1$, y cálculo de las fuerzas μ y su correspondiente deflexión.




$$\delta = \sum \mu^2 \ell / AE = 479.74/E$$

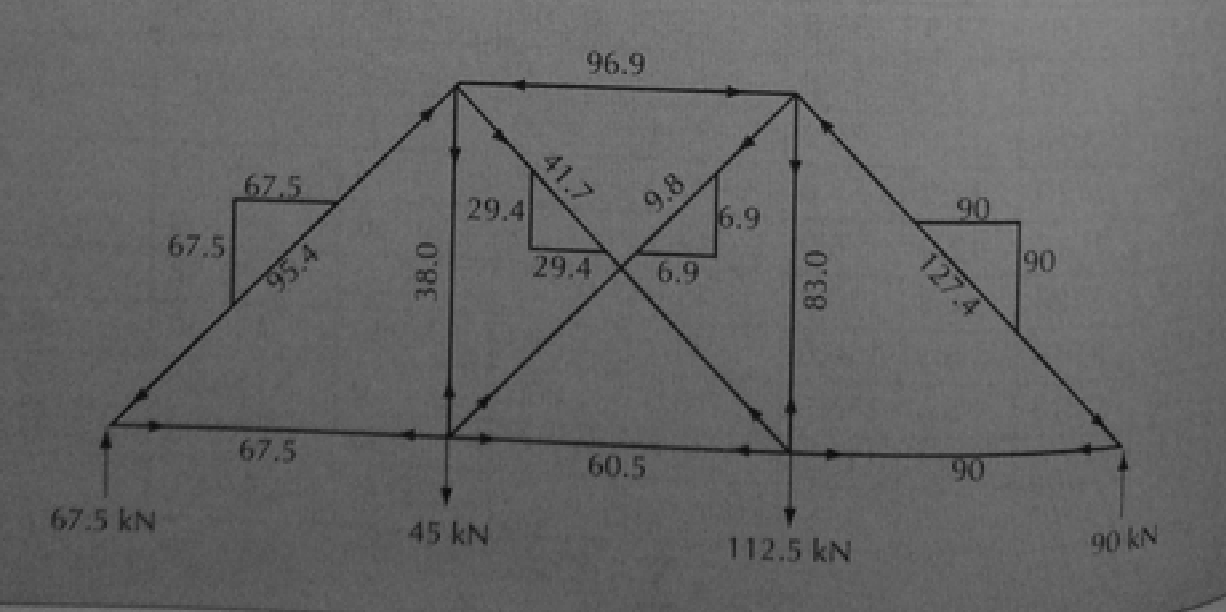
Paso *d)* Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica y cálculo de la fuerza correctiva.

$$\Delta + \delta X = 0$$

$$X = -\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{\sum (F'\mu\ \ell/AE)}{\sum \left(\mu^2\ \ell/AE\right)}$$

$$X = -\left[\frac{-4717/E}{479.74/E}\right] = 9.832\ \text{kN}$$

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo de las fuerzas finales *F* en las barras.



### 4.4.2 Planteamiento matricial para armaduras

Los mismos principios aplicados al planteamiento matricial del método de las fuerzas en vigas hiperestáticas se aplican a armaduras hiperestáticas, ya sea que su indeterminación sea externa o interna. Se trata también de escribir el sistema de ecuaciones 4.2 en la forma matricial 4.4. Si la armadura es externamente indeterminada, las deflexiones $\Delta$ serán las deflexiones de la armadura isostática en los apoyos suprimidos bajo la acción de las cargas reales, y las deflexiones $\delta$ serán las que ocurran en los mismos apoyos bajo la acción de las cargas unitarias. Si es internamente indeterminada, $\Delta$ serán las deformaciones en los extremos de los miembros cortados bajo la acción de las cargas reales y $\delta$ serán las mismas deformaciones pero bajo la acción de las cargas unitarias aplicadas en los cortes. En armaduras indeterminadas externamente e internamente, las $\Delta$ y las $\delta$ incluyen ambos tipos de deformaciones.

**Ejemplo 4.10**

Se ilustra el planteamiento matricial para una armadura hiperestática. La armadura mostrada tiene un grado de indeterminación externa y un grado de indeterminación interna.

La armadura isostática se ha planteado eliminando el apoyo en *B* y cortando el miembro $U_2$-$L_3$. En el paso *a* se muestra esta armadura con sus cargas externas.

En el paso *b* se resuelve la armadura isostática y se calculan la deflexión en el punto *B*, donde se eliminó el apoyo, y el desplazamiento en el miembro cortado (véase la tabla al final del paso *b*). Estas deformaciones se calcularon con la ecuación 4.8. Las fuerzas $\mu_B$ son las producidas por una fuerza unitaria en el punto *B* y las fuerzas $\mu_D$, las producidas por una fuerza unitaria en el miembro cortado $U_2$-$L_3$. Como el signo de $\Delta_D$ resultó negativo, en el miembro cortado ocurriría un acortamiento, ya que las fuerzas unitarias introducidas en este miembro son de tensión.

En el paso *c* se introducen las cargas unitarias para corregir las incompatibilidades geométricas de la isostática, o sea, $\Delta_B$ y $\Delta_D$. Las deformaciones producidas por estas cargas unitarias se calcularon con la ecuación 4.9.

A continuación, se plantean en el paso *d* las ecuaciones matriciales 4.4 y 4.5 con lo que se resuelven las incógnitas $X_B$ y $X_D$. La primera es el valor de la reacción en el apoyo B, y la segunda, el valor de la fuerza axial en el miembro $U_2$-$L_3$.

Finalmente, en el paso *e* se presentan las fuerzas totales en las barras de la armadura. En este caso con dos grados de indeterminación, hay que sumar las fuerzas $F'$ de la isostática con las cargas externas (paso *a*), las fuerzas $\mu_B$ de la isostática con la carga unitaria aplicada en *B* (primer croquis del paso *c*) multiplicadas por el valor obtenido de la incógnita $X_B$, y las fuerzas $\mu_D$ de la isostática con la fuerza unitaria aplicada en la barra $U_3L_2$ (segundo croquis del paso *c*) multiplicadas por el valor obtenido de la incógnita $X_D$. Por ejemplo, en la barra $L_2L_3$, la fuerza total será:

$$L_2L_3 = (213.75) + (0.5)\,(339.20) + (-0.707)\,(-1087.29) = 1152.1 \text{ kN}$$

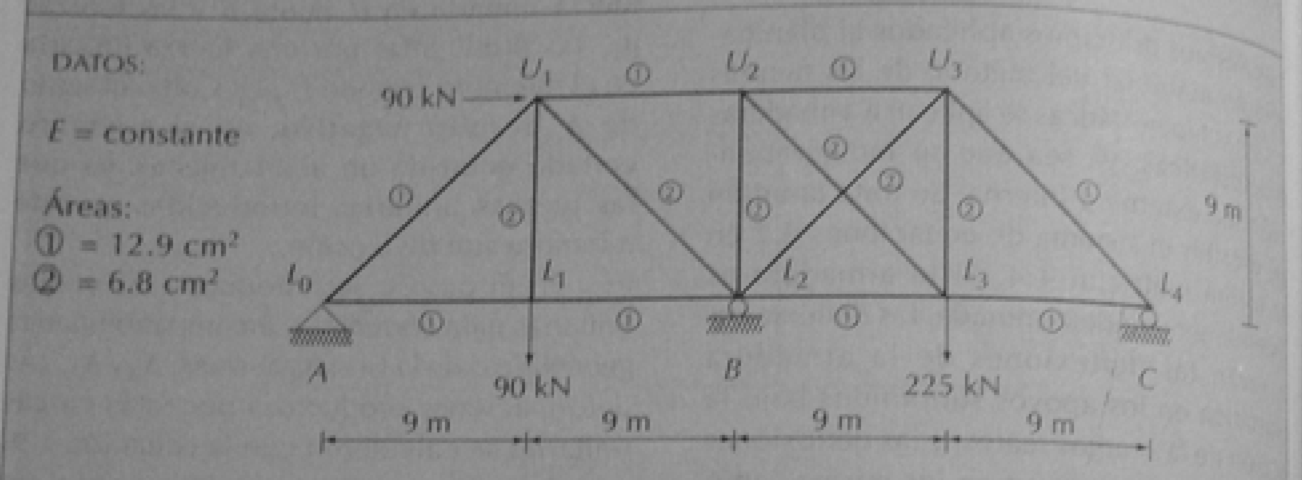
De esta manera se calcularon las fuerzas en todas las barras, las cuales se presentan también en la última columna de la tabla del paso *b*.

## EJEMPLO 4.10. RESOLUCIÓN DE UNA ARMADURA CON INDETERMINACIÓN EXTERNA E INTERNA POR EL PLANTEAMIENTO MATRICIAL

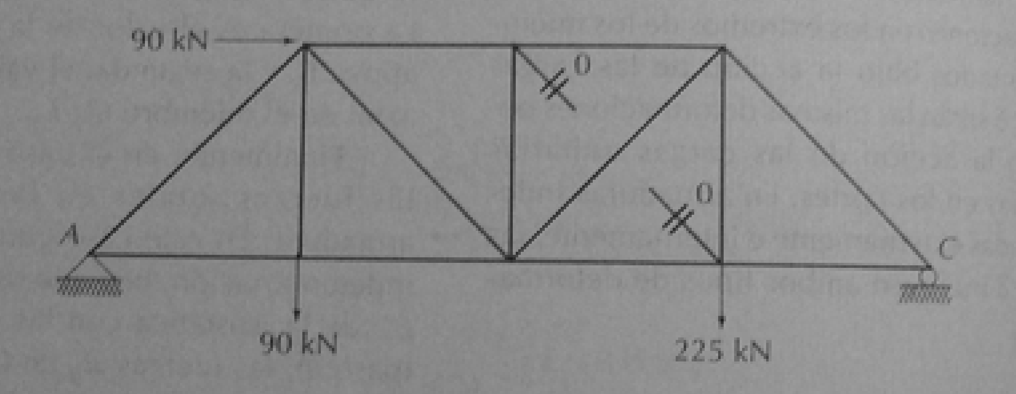
DATOS:

$E$ = constante

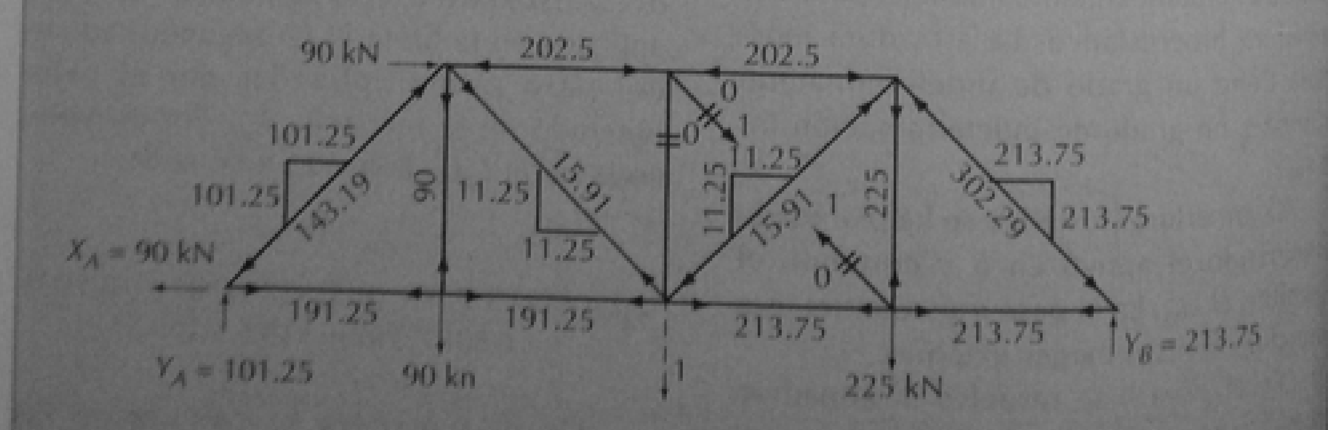
Áreas:
① = 12.9 cm²
② = 6.8 cm²




Paso *a)* Planteamiento de la armadura isostática.




Paso *b)* Cálculo de las fuerzas $F'$ y deflexiones correspondientes.




$\Delta_B = \sum F'\mu_B \ell / AE = 87\,591.49/E$

$\Delta_D = \sum F'\mu_D \ell / AE = -25\,699.48/E$

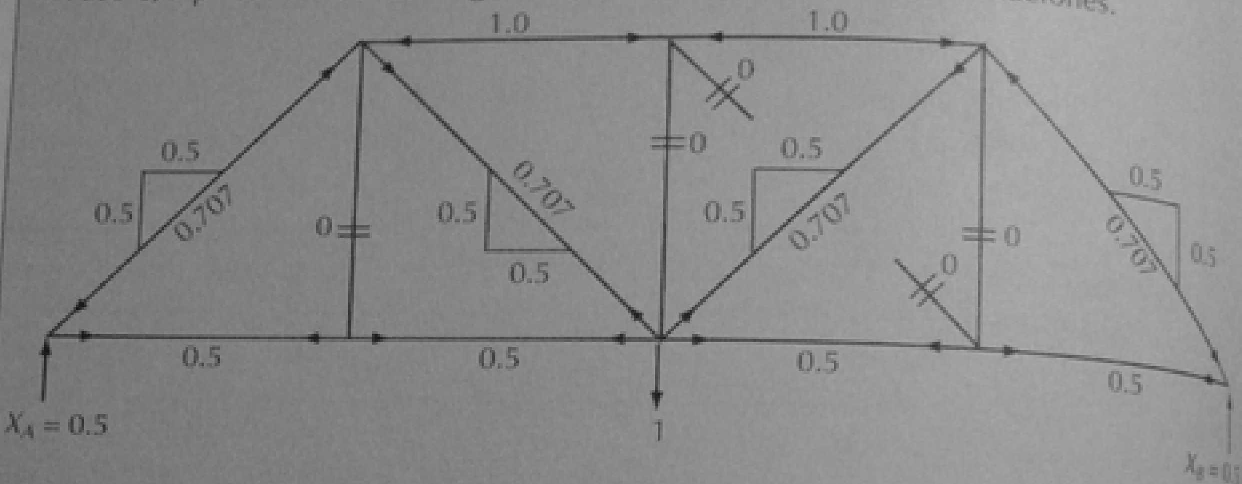
## EJEMPLO 4.10 *(continuación)*

| Barra | A $cm^2$ | $\ell$ $cm$ | $\ell/A$ $cm^{-1}$ | $F'$ $kN$ | $\mu_B$ | $\mu_D$ | $\frac{F'\mu_B\ell}{A}$ | $\frac{F'\mu_D\ell}{A}$ | $\frac{\mu_B^2\ell}{A}$ | $\frac{\mu_D^2\ell}{A}$ | $\frac{\mu_B\mu_D\ell}{A}$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_0L_1$ | 12.9 | 900 | 69.77 | 191.25 | 0.5 | 0 | 6671.52 | 0 | 17.44 | 0 | 0 | 88.32 |
| $L_1L_2$ | 12.9 | 900 | 69.77 | 191.25 | 0.5 | 0 | 6671.52 | 0 | 17.44 | 0 | 0 | 88.32 |
| $L_2L_3$ | 12.9 | 900 | 69.77 | 213.75 | 0.5 | −0.707 | 7456.40 | −10543.34 | 17.44 | 34.88 | −24.67 | 40.93 |
| $L_3L_4$ | 12.9 | 900 | 69.77 | 213.75 | 0.5 | 0 | 7456.40 | 0 | 17.44 | 0 | 0 | 110.82 |
| $L_0U_1$ | 12.9 | 1273 | 98.67 | −143.19 | −0.707 | 0 | 9989.95 | 0 | 49.33 | 0 | 0 | 2.38 |
| $U_1U_2$ | 12.9 | 900 | 69.77 | −202.50 | −1.000 | 0 | 14127.91 | 0 | 69.77 | 0 | 0 | 3.37 |
| $U_2U_3$ | 12.9 | 900 | 69.77 | −202.50 | −1.000 | −0.707 | 14127.91 | 9988.43 | 69.77 | 34.88 | 49.33 | −66.51 |
| $U_3L_4$ | 12.9 | 1273 | 98.67 | −302.29 | −0.707 | 0 | 21089.87 | 0 | 49.33 | 0 | 0 | −156.72 |
| $U_1L_1$ | 6.5 | 900 | 138.46 | 90.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 90 |
| $U_1L_2$ | 6.5 | 1273 | 195.81 | 15.91 | 0.707 | 0 | 2202.91 | 0 | 97.91 | 0 | 0 | −129.66 |
| $U_2L_2$ | 6.5 | 900 | 138.46 | 0 | 0 | −0.707 | 0 | 0 | 0 | 69.23 | 0 | −69.88 |
| $U_2L_3$ | 6.5 | 1273 | 195.81 | 0 | 0 | 1.000 | 0 | 0 | 0 | 195.81 | 0 | 98.83 |
| $U_3L_3$ | 6.5 | 900 | 138.46 | 225.00 | 0 | −0.707 | 0 | −22026.77 | 0 | 69.23 | 0 | 155.12 |
| $U_3L_2$ | 6.5 | 1273 | 195.81 | −15.91 | 0.707 | 1.000 | −2202.91 | −3116.91 | 97.91 | 195.81 | 138.46 | −62.65 |
| $\Sigma$ = | | | | | | | 87591.49 | −25699.48 | 503.78 | 599.86 | 163.13 | |

$$F = F' + \mu_B X_B + \mu_D X_D$$

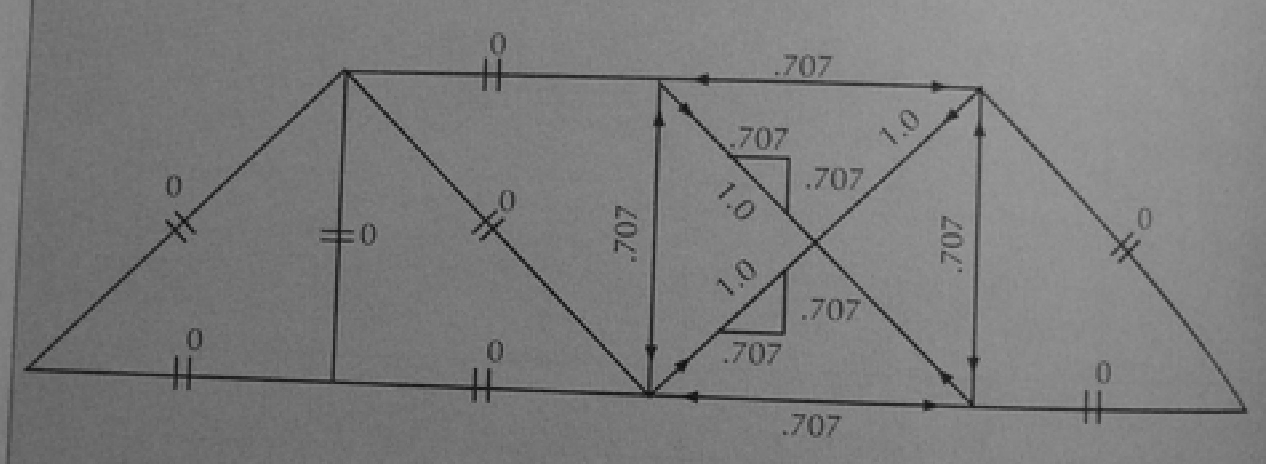
**EJEMPLO 4.10** ***(continuación)***

Paso *c)* Aplicación de las cargas unitarias y cálculo de las deformaciones.




$\delta_{BB} = \sum \mu_B^2 \ell / AE = 503.78/E$

$\delta_{DB} = \sum \mu_D \mu_B \ell / AE = 163.13/E$




$\delta_{BD} = \sum \mu_B \mu_D \ell / AE = 163.13/E$

$\delta_{DD} = \sum \mu_D^2 \ell / AE = 599.86/E$

Paso *d)* Cálculo de las redundantes por el planteamiento matricial.

$$[\delta]\{x\} = -\{\Delta\}$$

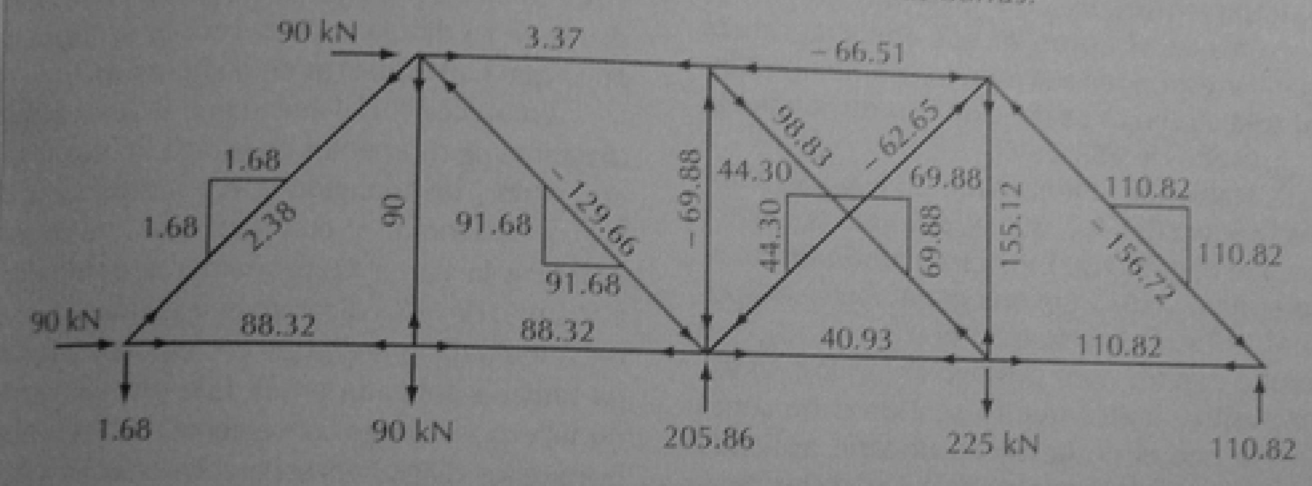
$$\begin{bmatrix} 503.78 & 163.13 \\ 163.13 & 599.86 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -87591.49 \\ 25699.48 \end{Bmatrix}$$

**EJEMPLO 4.10 *(continuación)***

$$\{X\} = -[\delta]^{-1}\{\Delta\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_B \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0022 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0018 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -87591.49 \\ 25699.48 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -205.87 \\ 98.83 \end{bmatrix}^{\uparrow} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{Tensión kN} \end{matrix}$$

Paso *e)* Cálculo de las reacciones finales y las fuerzas en las barras.




## 4.5 Método de las fuerzas para marcos

Se aplican los mismos principios generales expuestos en la sección 4.2. Para transformar un marco indeterminado en uno isostático, se eliminan las reacciones de apoyo redundantes. Esto puede hacerse de diversas maneras, por lo que conviene elegir un marco isostático en el que resulte más expedito el cálculo de deformaciones. También en marcos puede hacerse el planteamiento matricial usando las ecuaciones 4.4, para establecer el sistema de ecuaciones, y 4.5 para resolverlo. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 4.11**

Se presenta el caso sencillo de un marco con un solo grado de indeterminación. En el paso *a* se plantea el marco isostático que se obtiene eliminando la componente horizontal de reacción en el apoyo *D*. Esto equivale a transformar este apoyo en uno libre.

En el paso *b* se calcula la deflexión que corresponde a la componente de reacción eliminada, o sea, la deflexión horizontal del punto *D*, bajo la acción de las cargas externas. Se utilizó el método del trabajo virtual (sección 3.7.7). Para hacer este cálculo, que se muestra al final del ejemplo, se obtuvieron primero las tres componentes de reacción $V_A$, $H_A$ y $V_D$, y el diagrama de momentos flexionantes en todos los miembros del marco isostático. Después se aplicó una fuerza unitaria horizontal en el punto *D* y se calcularon las reacciones y los diagramas de momentos correspondientes. Por medio de la ecuación 3.63 se calculó entonces la deformación $\Delta_D$ que resultó de 9659.25/EI. Obsérvese que como resultó con signo negativo, su sentido es inverso al de la fuerza unitaria

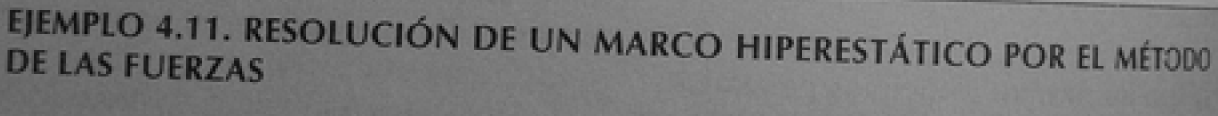
aplicada, o sea, es hacia la derecha. Nótese que los signos de los momentos flexionantes en las columnas están determinados de acuerdo con la convención establecida en la sección 2.9.2, o sea, que las columnas se observan como se indica en la figura 2.15.

En el paso *c* se aplicó una fuerza unitaria para corregir la incompatibilidad geométrica. Esta etapa resulta idéntica a la segunda parte del paso anterior. La deformación $\delta_{DD}$ se calcula entonces con la ecuación 3.63, pero tanto *M* como *m* son los diagramas que corresponden a la fuerza unitaria horizontal aplicada en *D*. La deflexión correspondiente $\delta_{DD}$ resultó de 182.25/EI.

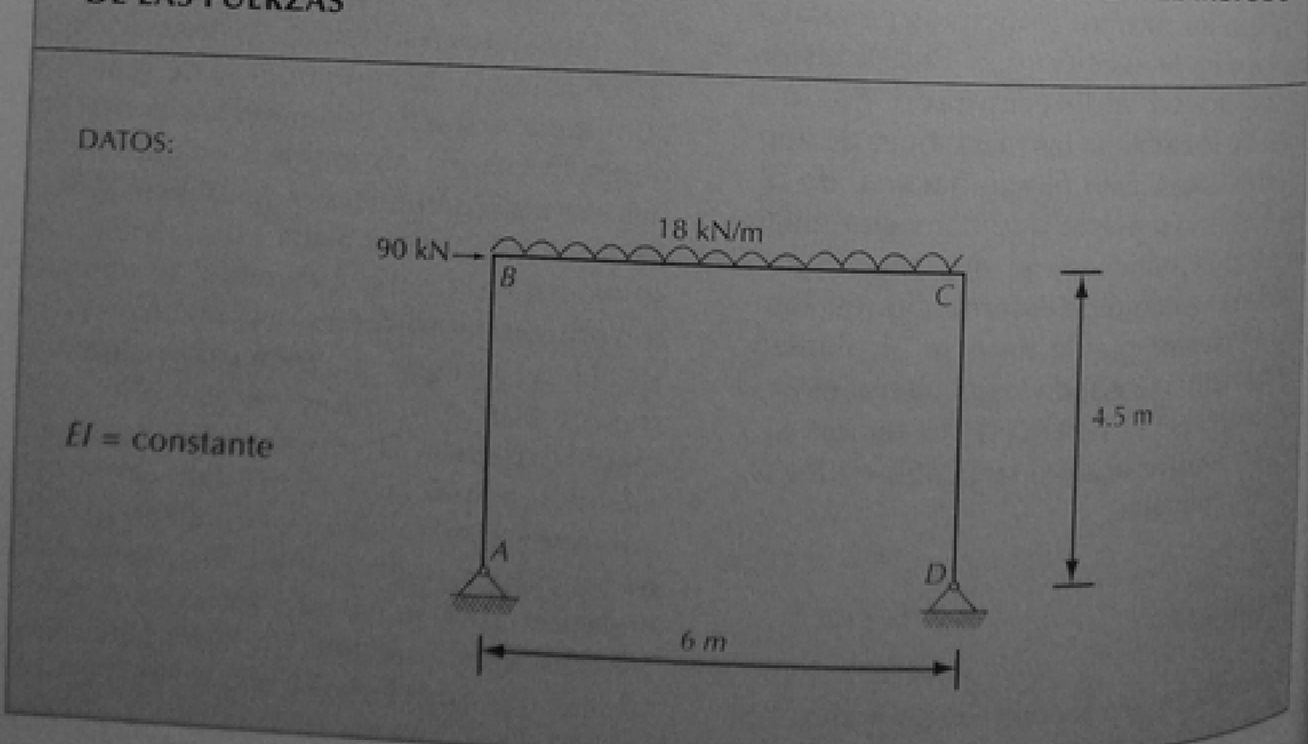
Habiendo determinado $\Delta_D$ y $\delta_{DD}$ se plantea la ecuación 4.2, que es una sola ecuación porque el grado de indeterminación del marco es igual a uno. De esta ecuación se despeja el valor de la reacción horizontal $H_D$ que resultó con un valor positivo de 55 ton. El valor positivo indica que su sentido debe ser el mismo que el de la fuerza unitaria aplicada para corregir la incompatibilidad. Estas operaciones se realizan en el paso *d* del ejemplo.

Por último, en el paso *e* se calculan las otras tres componentes de reacción, ya conocido el valor de $H_D$, y se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Obsérvese nuevamente que los signos de los momentos se han determinado con la convención de la sección 2.9.2. Por ejemplo, la columna *CD* hay que observarla desde la parte exterior del marco. Entonces, la reacción $H_D$ produce un momento en el sentido del reloj, y por lo tanto, positivo. El diagrama correspondiente se ha dibujado en la cara de la columna en la que hay esfuerzos de compresión.

En el paso 1 del anexo puede verse que el diagrama de momentos en la viga *BC* consta de dos partes, un triángulo que corresponde a la fuerza horizontal, y una parábola, que corresponde a la carga uniformemente distribuida. Cada uno de estos diagramas se combina con el rectángulo del paso 2, que corresponde a la carga unitaria aplicada en *D*. Este procedimiento de superposición es conveniente con frecuencia porque los diagramas separados coinciden con las figuras de la tabla 3.1 de integrales de Mohr.

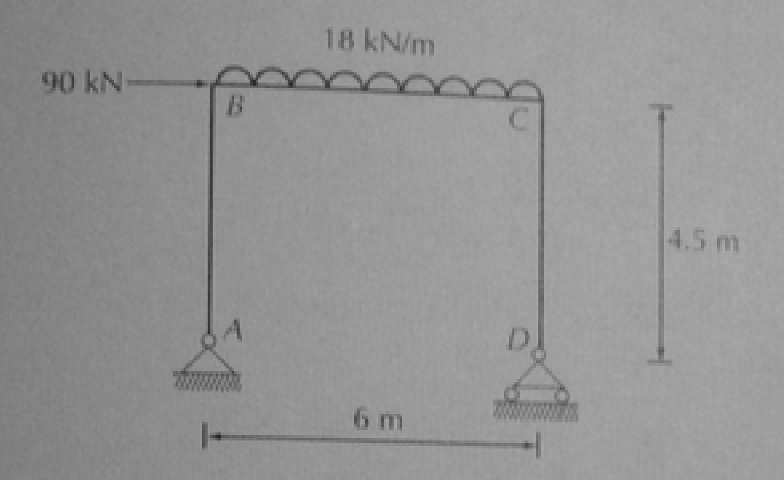


## EJEMPLO 4.11. RESOLUCIÓN DE UN MARCO HIPERESTÁTICO POR EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

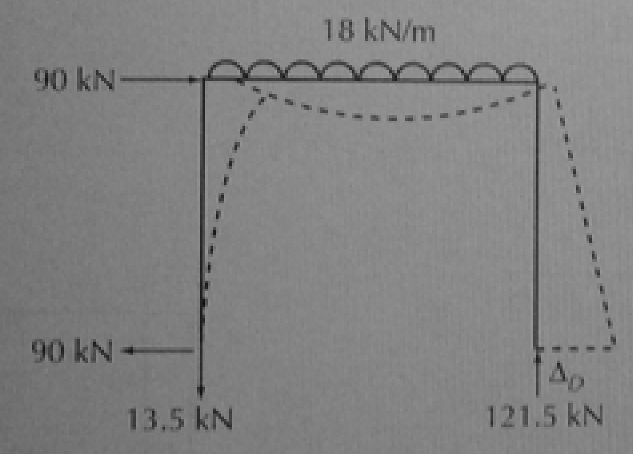


**EJEMPLO 4.11** ***(continuación)***

Paso *a)* Planteamiento del marco isostático.

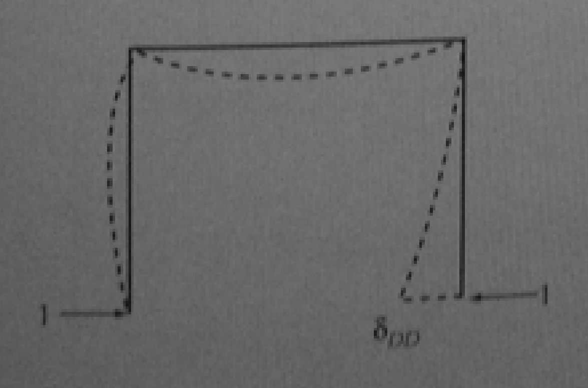



Paso *b)* Cálculo de las reacciones y la deflexión correspondiente del marco isostático (los cálculos se muestran al final).




$$\Delta_D = \frac{-9659.25}{EI}$$

Paso *c)* Aplicación de la carga unitaria y cálculo de la deformación correspondiente (los cálculos se muestran al final).




$$\delta_{DD} = \frac{182.25}{EI}$$

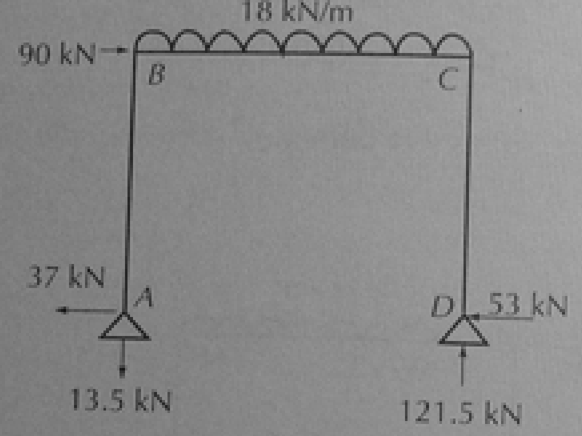
## EJEMPLO 4.11 *(continuación)*

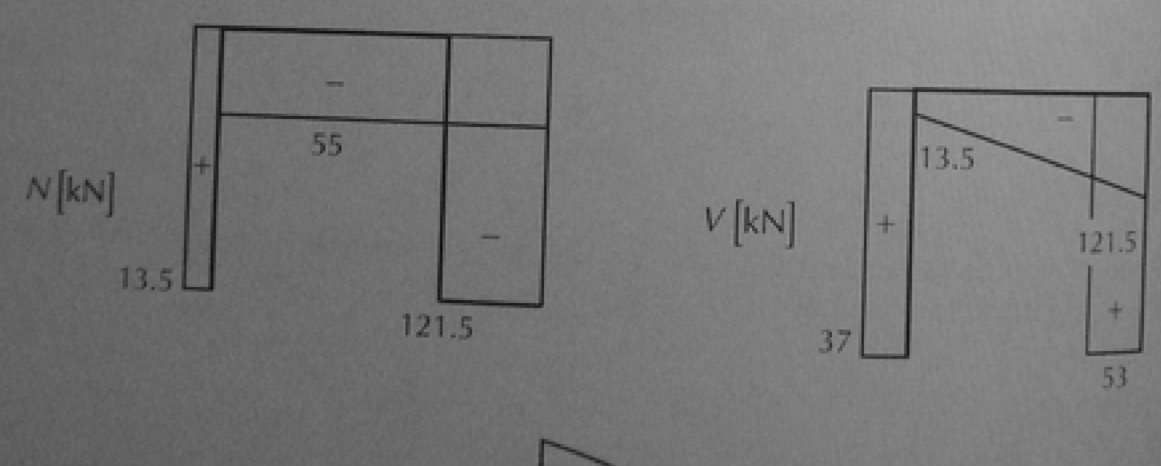
Paso *d)* Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica y cálculo de la fuerza correctiva.

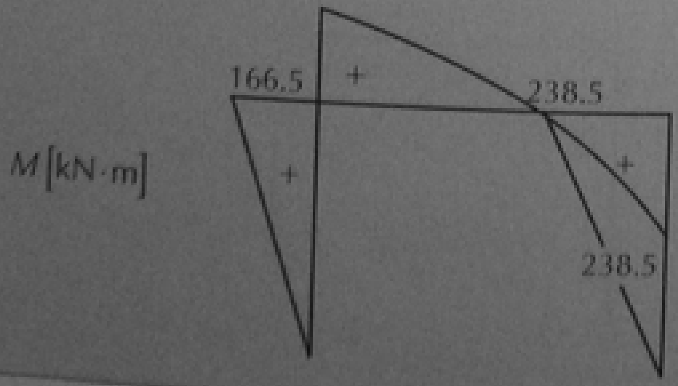
$$\Delta_D + H_D \delta_{DD} = 0$$

$$H_D = -\frac{\Delta_D}{\delta_{DD}} = -\frac{-9659.25/EI}{182.25/EI} = +53 \text{ ton}$$

Paso *e)* Reacciones finales y cálculo del diagrama de fuerza normal, cortante y momento flexionante.



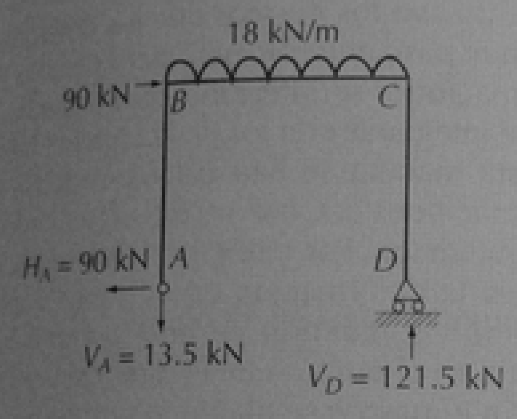



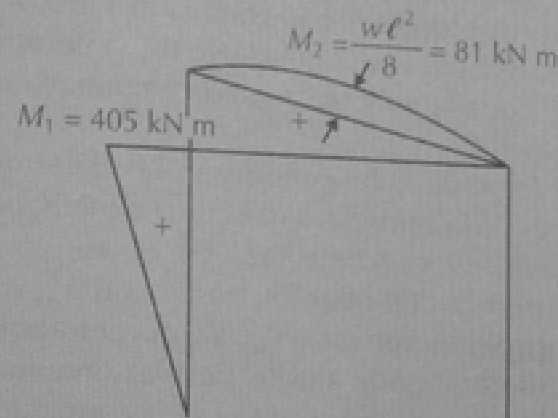



**EJEMPLO 4.11 *(continuación)***

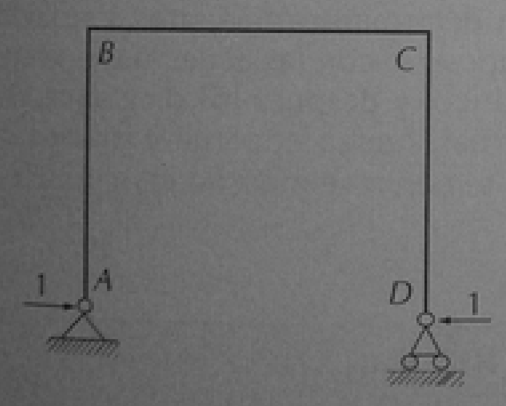
ANEXO: CÁLCULO DE DEFORMACIONES POR TRABAJO VIRTUAL. TABLA 3.1

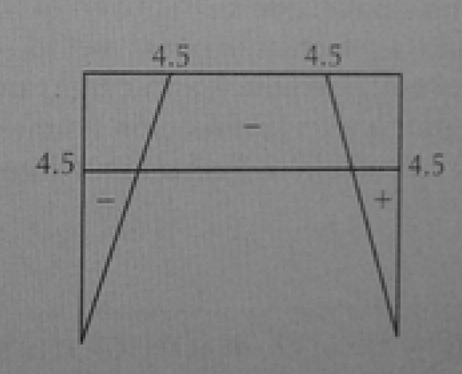
1. Cálculo de las reacciones del marco isostático y su correspondiente diagrama de momento flexionante ($M$).




2. Aplicación de la carga unitaria en $D$ y cálculo del diagrama de momento flexionante ($m$).




3. Cálculo de las deflexiones de la viga isostática con cargas externas y con la fuerza unitaria correctiva.

$$\Delta_D = \frac{1}{3}Mmh + \frac{1}{2}M_1m\ell + \frac{2}{3}M_2m\ell$$

$$\Delta_D = \frac{1}{3}(405)(-4.5)(4.5) + \frac{1}{2}(405)(-4.5)(6) + \frac{2}{3}(81)(-4.5)(6) = \frac{-9659.25}{EI}$$

$$\delta_{DD} = 2\left[\frac{1}{3}mmh\right] + mm\ell = \frac{2}{3}(-4.5)(-4.5)(4.5) + (-4.5)(-4.5)(6) = \frac{182.25}{EI}$$

## Ejemplo 4.12

El marco mostrado en este ejemplo tiene tres grados de indeterminación, ya que hay 6 incógnitas de reacción y 3 ecuaciones de equilibrio, sin ninguna ecuación de condición.

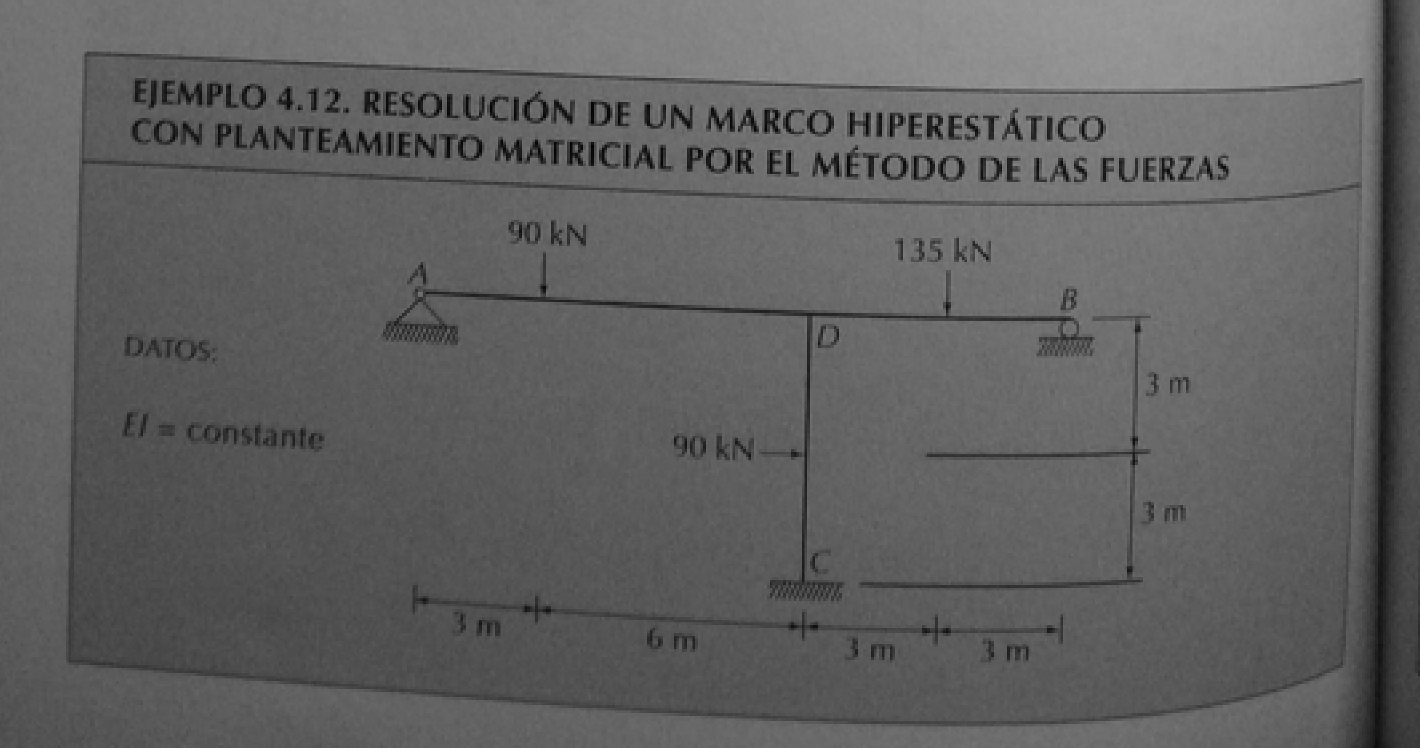
Para obtener la estructura isostática mostrada en el paso *a* se han eliminado 3 incógnitas de reacción, las 2 del apoyo *A* y la del apoyo *B*. Toda la estructura queda empotrada en el apoyo *C*.

En el paso *b* se muestran las deformaciones de la estructura isostática o incompatibilidades geométricas. En el apoyo *A* interesan la deformación horizontal $\Delta_{Ax}$ y la deformación vertical $\Delta_{Ay}$, ya que el apoyo articulado impide ambos desplazamientos. En el apoyo *B* sólo interesa la deformación vertical $\Delta_{By}$ porque, aunque existe también deformación en la dirección horizontal, no constituye una incompatibilidad geométrica ya que el tipo de apoyo permite desplazamientos horizontales. Los cálculos de estas deformaciones, que se incluyen al final del ejemplo, se efectuaron por el método del trabajo virtual, introduciendo cargas unitarias en el punto y en la dirección en que se deseaba calcular la deformación, e integrando los diagramas de momento correspondientes con el de la estructura isostática sujeta a las cargas reales. Esta integración se hizo con ayuda de la Tabla de Integrales de Mohr (Tabla 3.1).

En el paso *c* se introducen las cargas unitarias correctivas y se calculan las deformaciones correspondientes. Los diagramas de momento son los mismos que los determinados en el paso anterior, pero para calcular las deformaciones se integran con sí mismos en vez de integrarse con los de la viga isostática. De esta manera se han calculado todas las deformaciones δ. Obsérvese el significado de los subíndices. Por ejemplo, la deformación $\delta_{ByAx}$ es la deformación en el punto *B* en la dirección *y*, cuando se aplica una carga unitaria en el punto *A* en la dirección *x*.

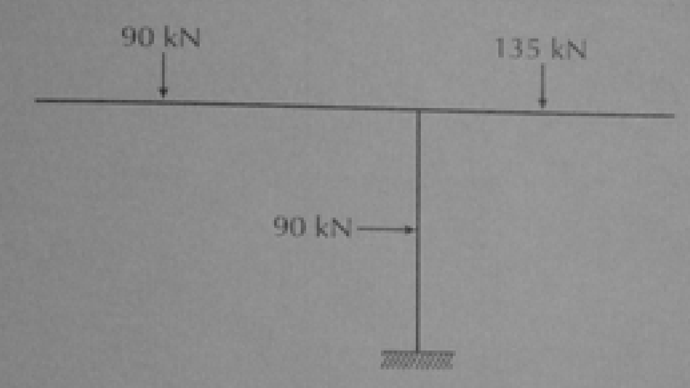
En el paso *d* se plantean y se resuelven las ecuaciones matriciales 4.4 y 4.5. De esta manera se obtienen las 3 incógnitas de reacción que se habían eliminado para plantear la estructura isostática.

Ya conocidas estas 3 reacciones, pueden determinarse las otras 3 reacciones en el apoyo *C* con las ecuaciones de equilibrio estático, y después los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante como se muestra en el paso *e*.



**EJEMPLO 4.12** ***(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento del marco isostático




Paso *b*) Cálculo de las deformaciones del marco isostático (los cálculos se muestran al final del ejemplo).

$\Delta_{Ay} = \dfrac{14985}{EI}$  $\Delta_{Ax} = \dfrac{-405}{EI}$  90 kN  135 kN  $\Delta_{By} = \dfrac{607.5}{EI}$

90 kN

$$\Delta = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -405 \\ 14985 \\ 607.5 \end{Bmatrix}$$

90 kN
225 kN
135 kN – m

Paso *c*) Aplicación de las cargas unitarias y cálculo de las deformaciones correspondientes (los cálculos se muestran al final del ejemplo).

$\delta_{AyAx} = \dfrac{-162}{EI}$

1

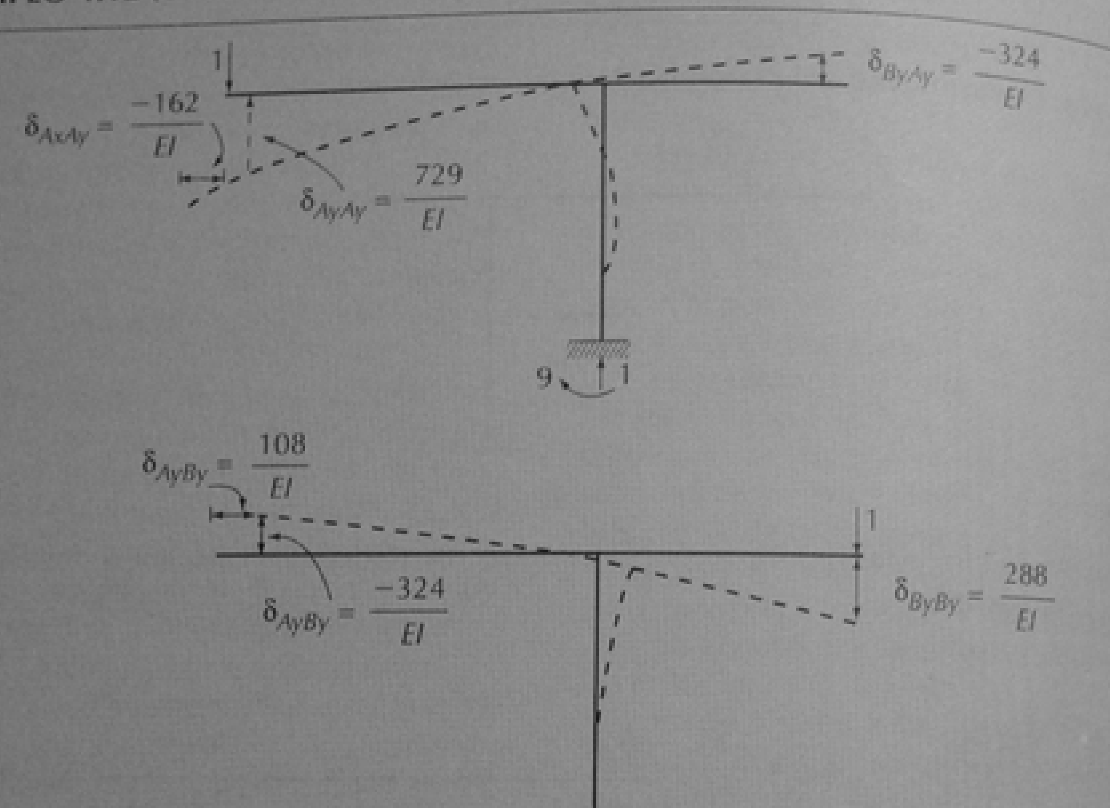
$\delta_{ByAx} = \dfrac{108}{EI}$

$\delta_{AxAx} = \dfrac{72}{EI}$

1

6

**EJEMPLO 4.12 *(continuación)***




Paso *d*) Planteamiento del sistema matricial de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas.

$$\{\Delta\}+[\delta]\{X\}=0$$

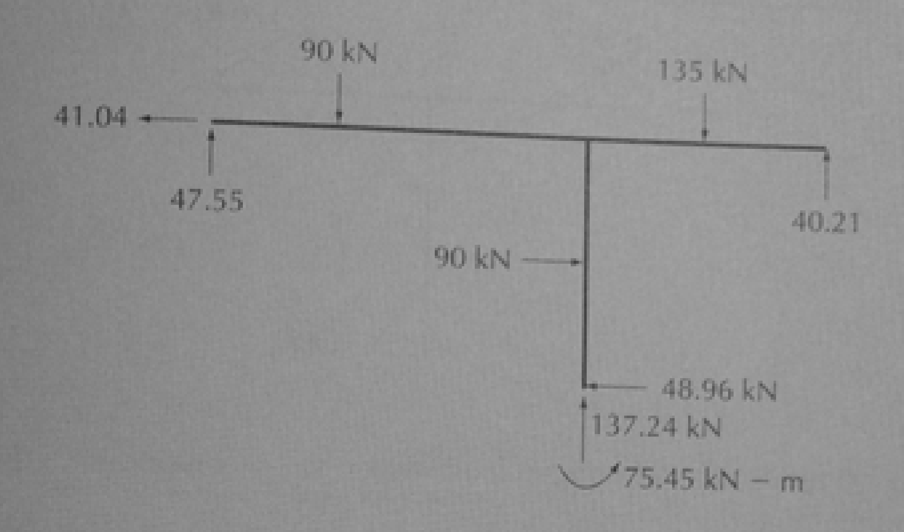
$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-405\\14985\\607.5\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}72 & -162 & 108\\-162 & 729 & -324\\108 & -324 & 288\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_{A_x}\\X_{A_y}\\X_{B_y}\end{Bmatrix}=0$$

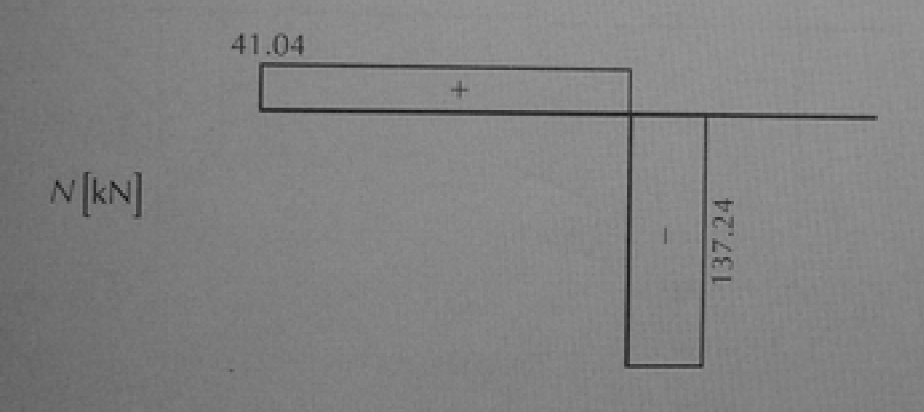
$$\{X\}=-[\delta]^{-1}\{\Delta\}$$

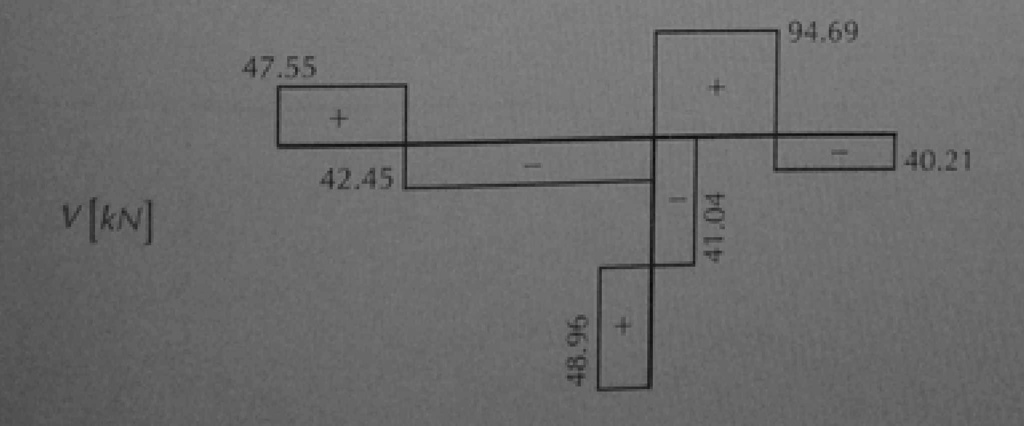
$$\begin{Bmatrix}X_{A_x}\\X_{A_y}\\X_{B_y}\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}.037037 & .004115 & -.009259\\.004115 & .003201 & .002058\\-.009259 & .002058 & .009259\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}405\\-14985\\-607.5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-41.04\\-47.55\\-40.21\end{Bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\\uparrow\\\uparrow\end{matrix}[kN]$$

**EJEMPLO 4.12** ***(continuación)***

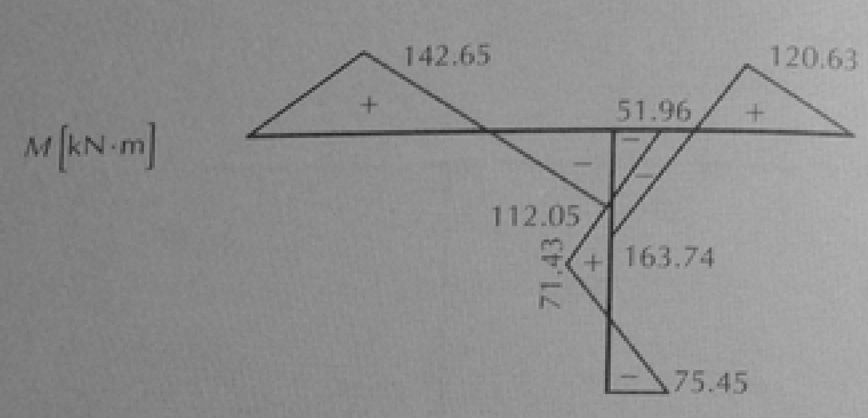
Paso *e*) Reacciones finales y cálculo de los diagramas de fuerza normal, cortante y momento flexionante.



## EJEMPLO 4.12 *(continuación)*




ANEXO

1. Cálculo de las reacciones del marco isostático y su correspondiente diagrama de momento flexionante ($M$).

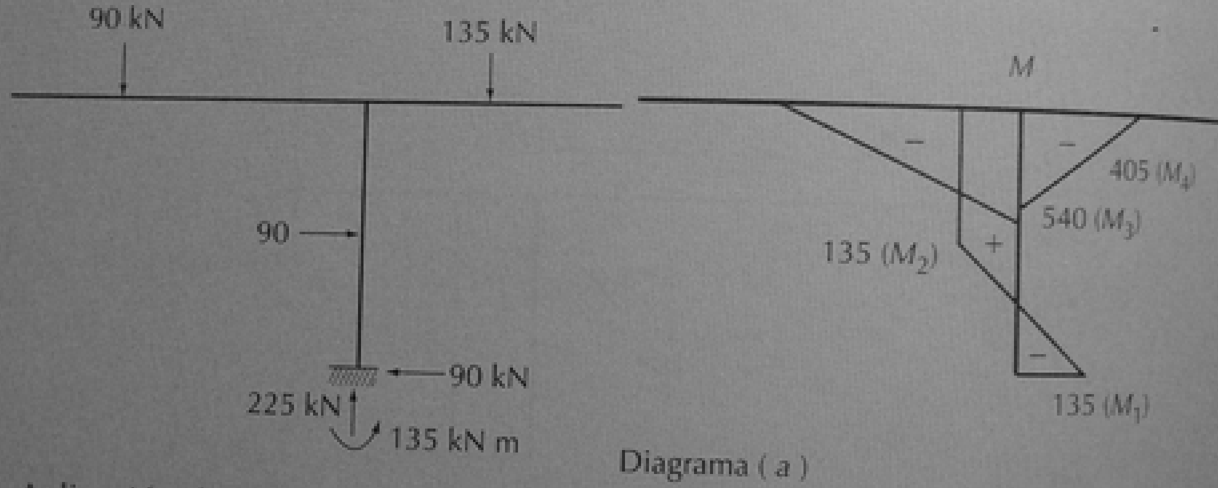



Diagrama ( *a* )

2. Aplicación de las cargas unitarias y cálculo de sus respectivos diagramas de momento flexionante ($m$).

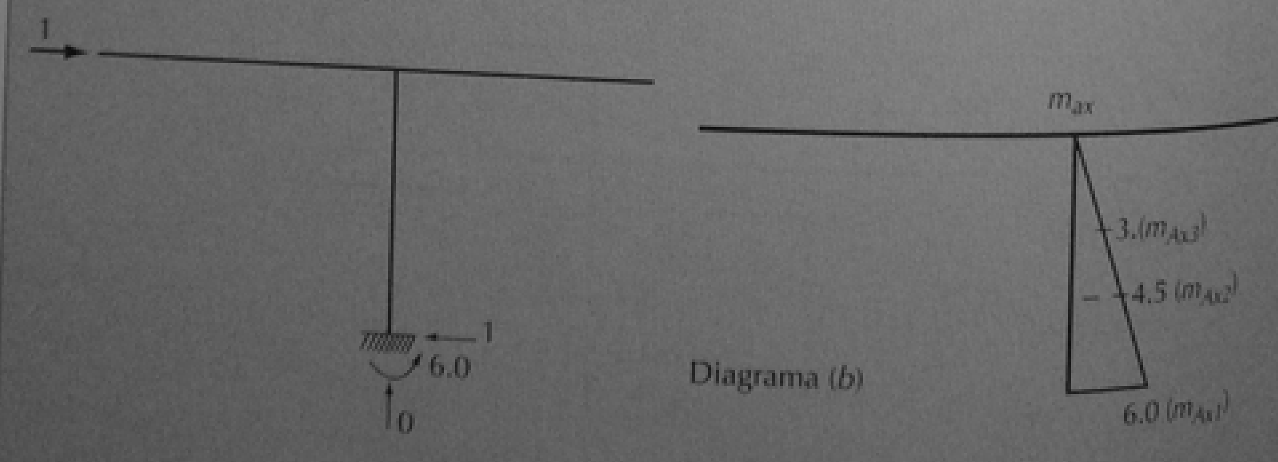
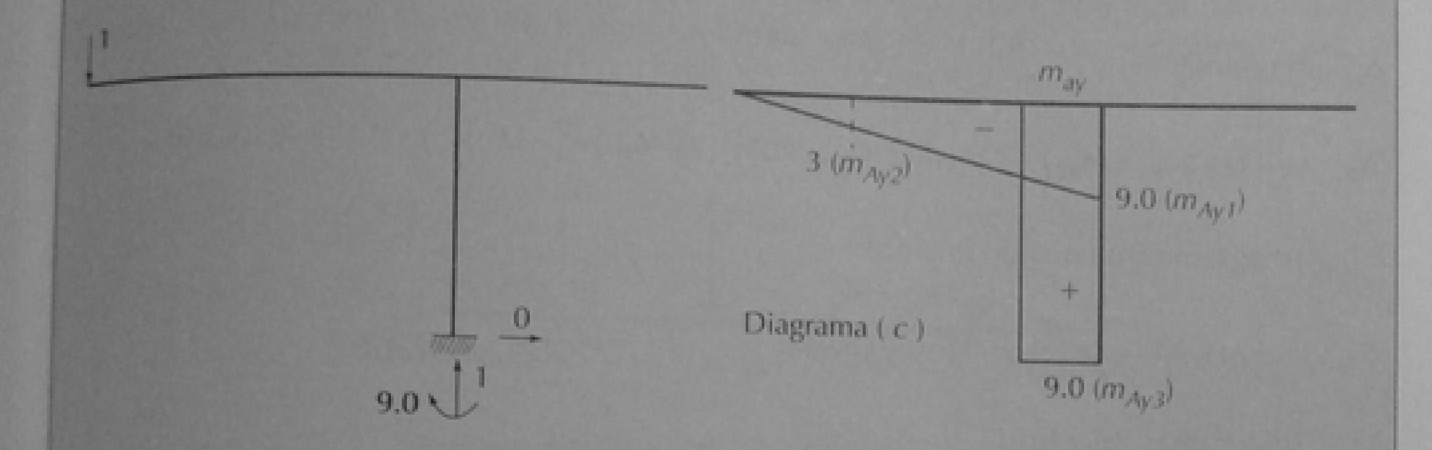
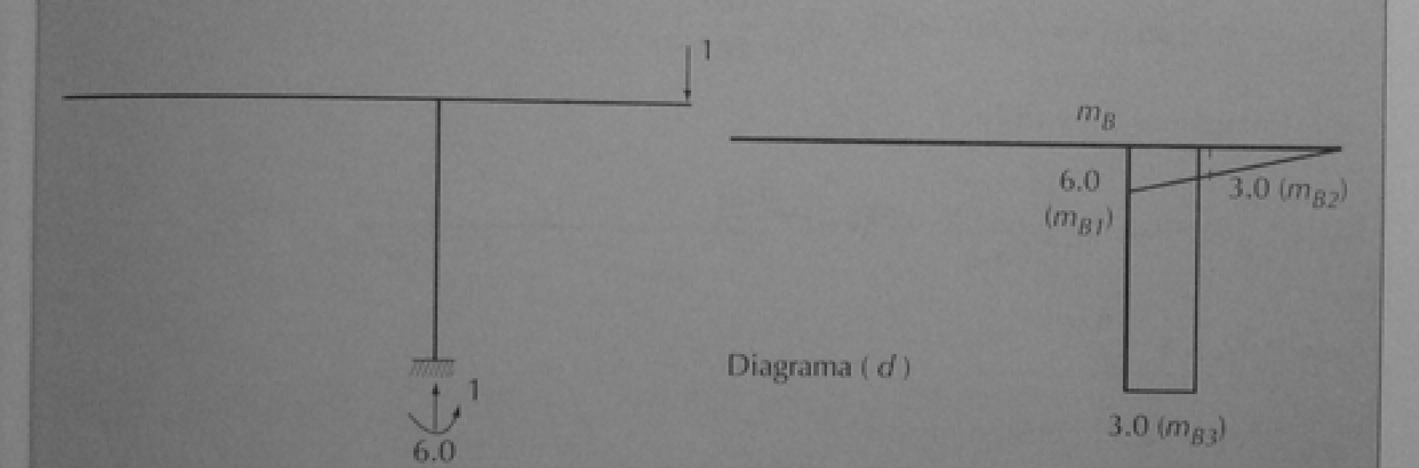



Diagrama (*b*)

**EJEMPLO 4.12** *(continuación)*




3. Cálculo de las deflexiones correspondientes.

$\Delta_{Ax}$ [diagramas (a) y (b)]:

$$\Delta_{Ax} = \frac{1}{6}(M_1)(m_{Ax2} - 2m_{Ax1})\,s + \frac{1}{6}(M_2)(2m_{Ax3} + m_{Ax2})s + \frac{1}{2}(M_2)(m_{Ax3})s$$

$$\Delta_{Ax} = \frac{1}{6}(-135)[(-4.5) - 2\times 6]1.5 + \frac{1}{6}(135)[2(-3) - 4.5]1.5 + \frac{1}{2}(135)(-3)3 = -\frac{405}{EI}$$

$\Delta_{Ay}$ [diagramas (a) y (c)]:

$$\Delta_{Ay} = \frac{1}{6}M_3\left(2m_{Ay1} + m_{Ay2}\right)s + M_2 m_{Ay3}s = \frac{1}{6}(-540)\left[(2)(-9.0) + (3.0)\right](6) + (135)(9.0)(3.0) = \frac{14985}{EI}$$

**EJEMPLO 4.12 *(continuación)***

$\Delta_{By}$ [diagramas (a) y (d)]:

$$\Delta_{By} = \frac{1}{6}M_4\left(2m_{B1} + m_{B2}\right)s + M_2 m_{B3} s = \frac{1}{6}(-405)\left[(2)(-6.0) + (-3.0)\right](3) + (135)(-6.0)(3.0) = \frac{607.5}{EI}$$

$\delta_{AxAx}$ [diagrama (b) consigo mismo]:

$$\delta_{AxAx} = \frac{1}{3}m_{Ax1}m_{Ax1}\,s = \frac{1}{3}(-6.0)(-6.0)(6.0) = \frac{72}{EI}$$

$\delta_{AyAx}$ [diagramas (b) y (c)]:

$$\delta_{AyAx} = \frac{1}{2}m_{Ay3}m_{Ax1}\,s = \frac{1}{2}(9.0)(-6.0)(6.0) = \frac{-162}{EI}$$

$\delta_{ByAx}$ [diagramas (b) y (d)]:

$$\delta_{ByAx} = \frac{1}{2}m_{B3}m_{Ax1}\,s = \frac{1}{2}(-6.0)(-6.0)(6.0) = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{AxAy} = \delta_{AyAx} = \frac{-162}{EI}$$

$\delta_{AyAy}$ [diagrama (c) consigo mismo]:

$$\delta_{AyAy} = \frac{1}{3}m_{Ay1}m_{Ay1}\,s + m_{Ay3}m_{Ay3}\,s = \frac{1}{3}(-9.0)(-9.0)(9.0) + (9.0)(9.0)(6.0) = \frac{729}{EI}$$

$\delta_{ByAy}$ [diagramas (c) y (d)]:

$$\delta_{ByAy} = m_{B3}m_{Ay3}\,s = (-6.0)(9.0)(6.0) = \frac{-324}{EI}$$

$$\delta_{AxBy} = \delta_{ByBx} = \frac{108}{EI}$$

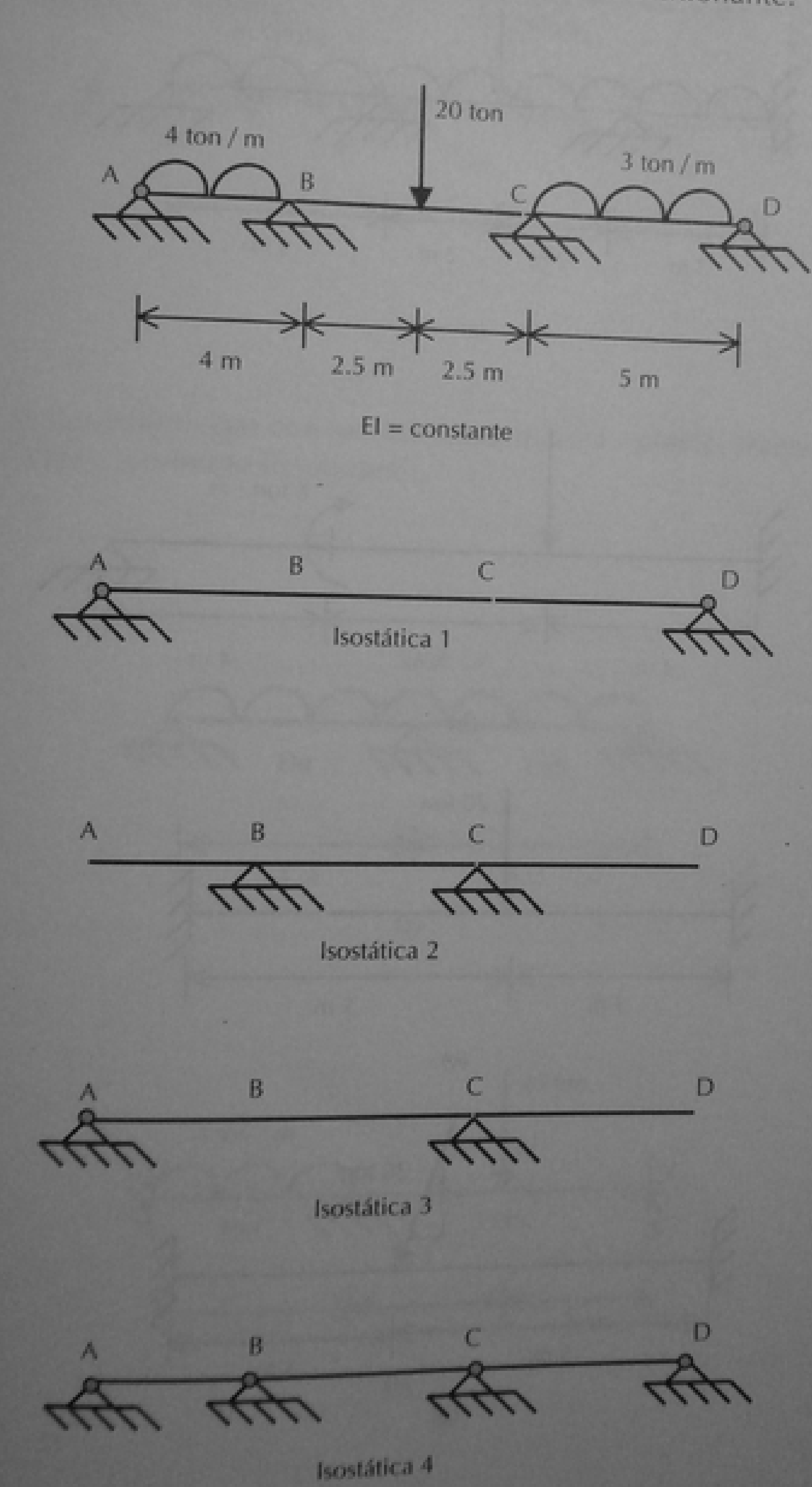
$$\delta_{AyBy} = \delta_{ByAy} = \frac{-324}{EI}$$

$\delta_{ByBy}$ [diagrama (d) consigo mismo]:

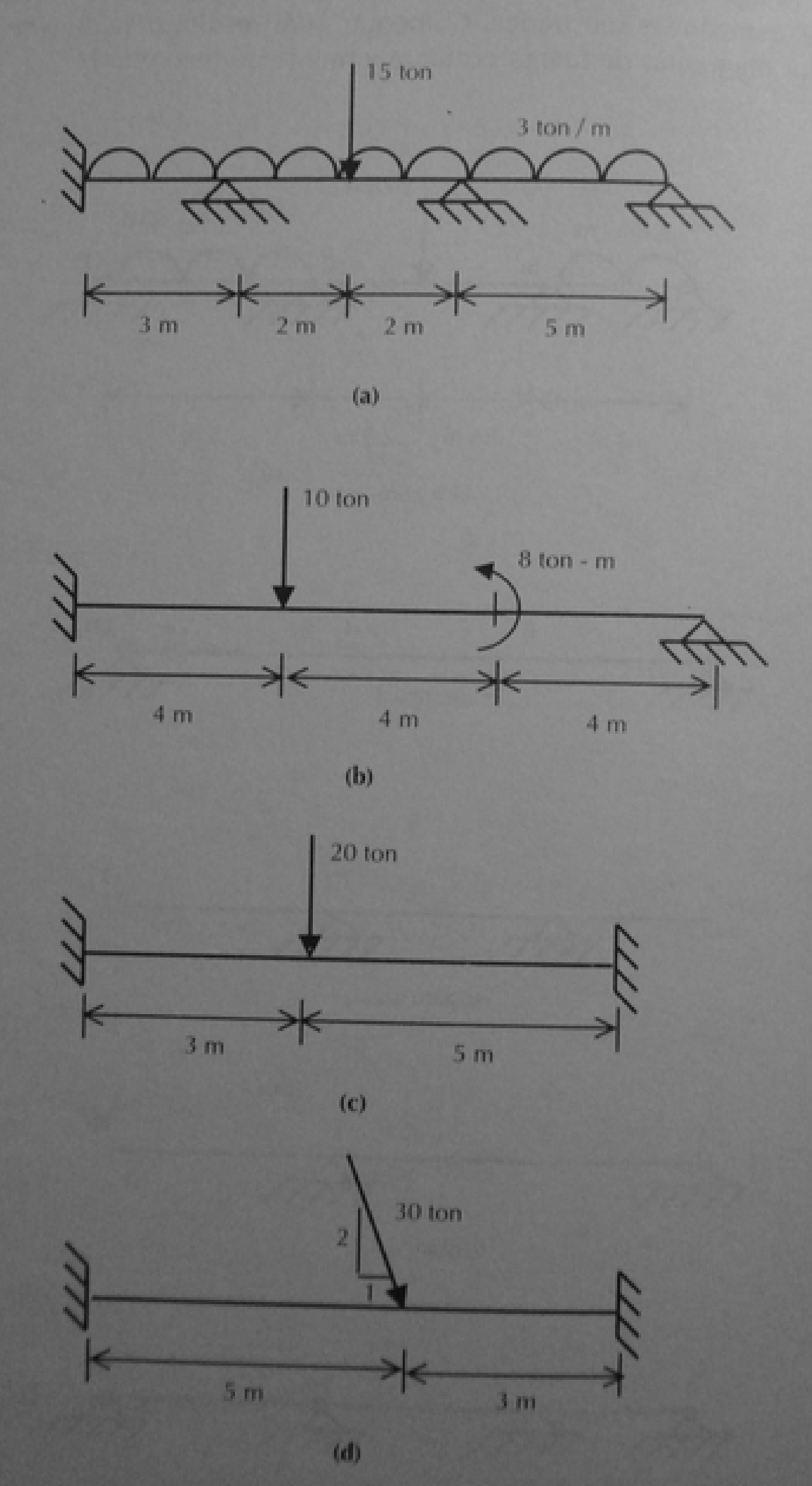
$$\delta_{ByBy} = \frac{1}{3}m_{B1}m_{B1}\,s + m_{B3}m_{B3}\,s = \frac{1}{3}(-6.0)(-6.0)(6.0) + (-6.0)(-6.0)(6) = \frac{288}{EI}$$

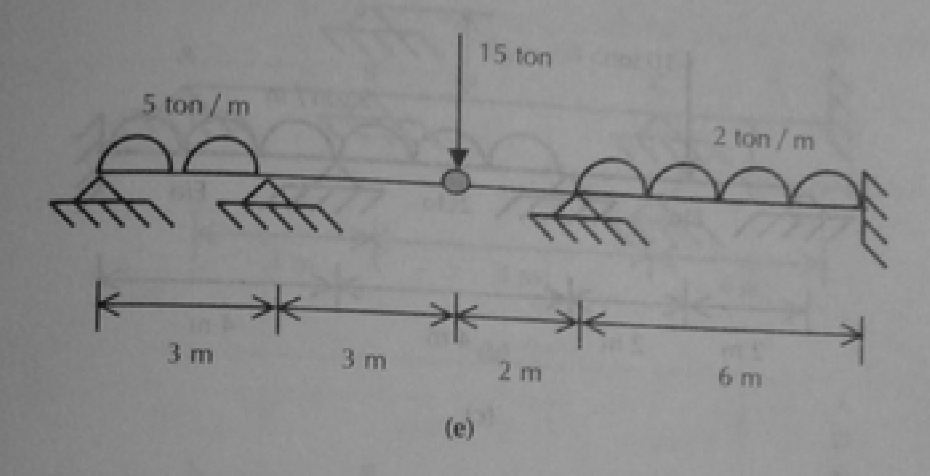
## PROBLEMAS

4.1 Resolver la siguiente viga por el método de las fuerzas utilizando cada una de las isostáticas fundamentales mostradas. Comentar cuál resulta más conveniente y por qué. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



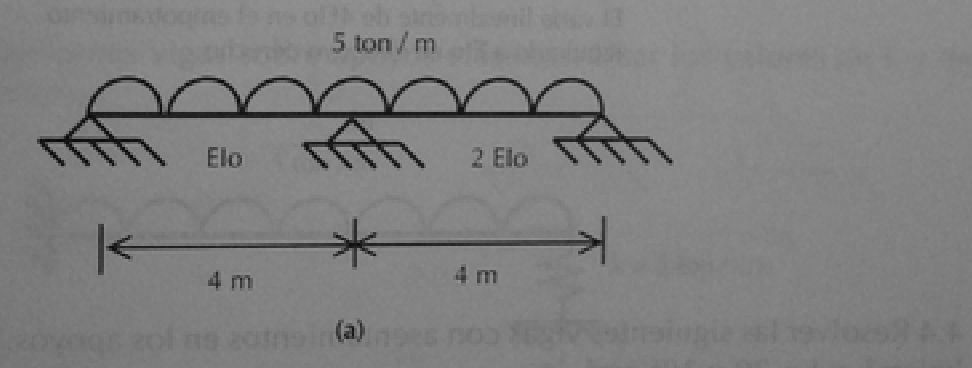
4.2 Resolver las vigas mostradas por el método de las fuerzas planteando la isostática fundamental que se crea más conveniente. En todos los casos EI = constante. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



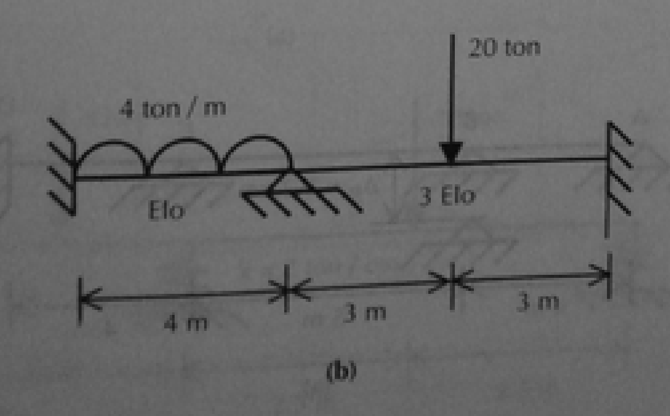


(e)

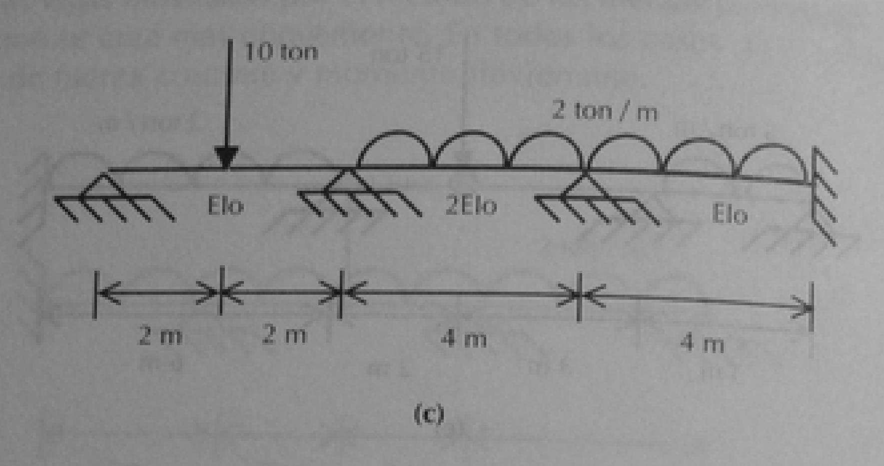
4.3 Resolver las siguientes vigas con momentos de inercia variable. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



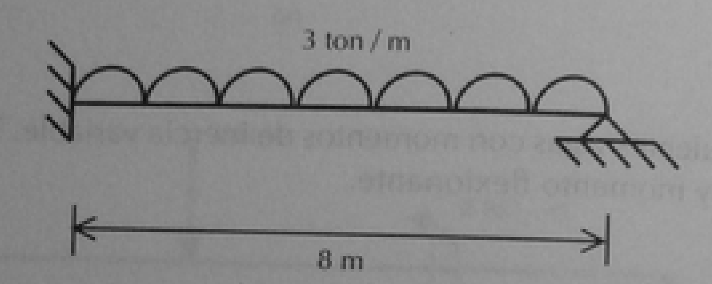
(a)



(b)



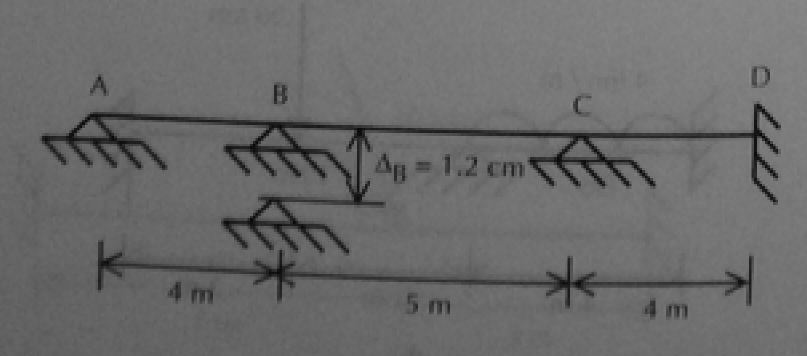

**(c)**



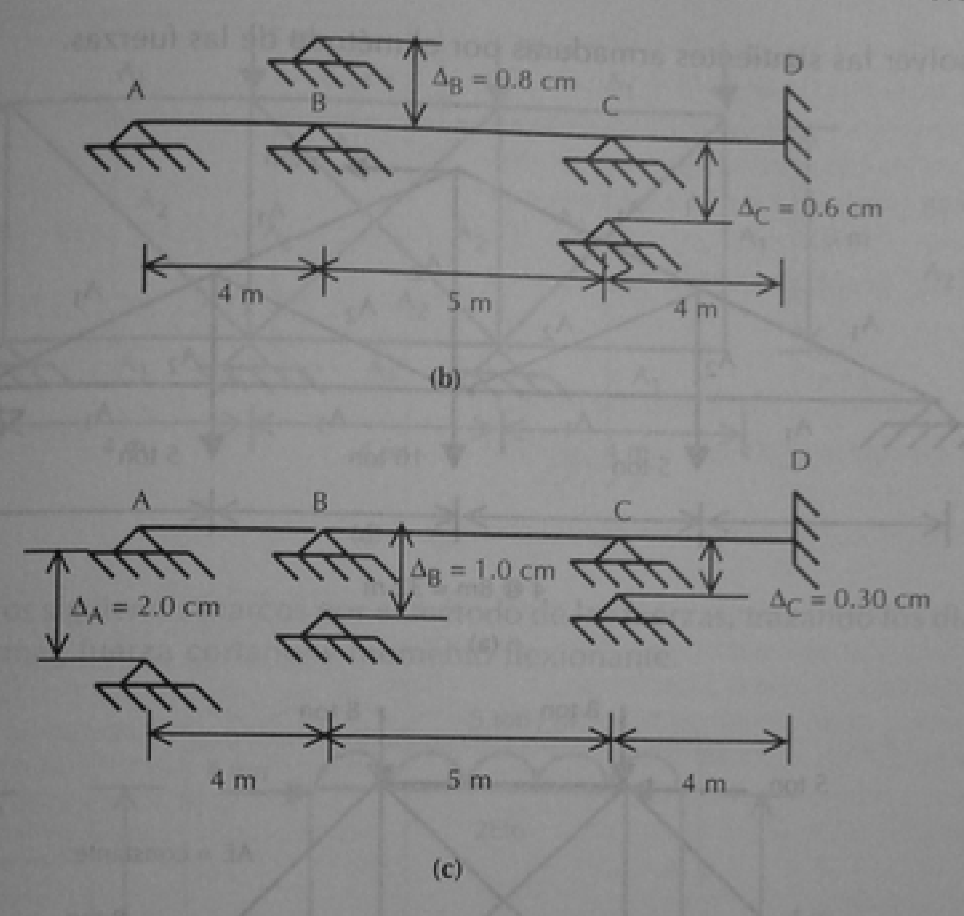

El varía linealmente de 4EIo en el empotramiento izquierdo a EIo en el apoyo derecho

**(d)**

4.4 Resolver las siguientes vigas con asentamientos en los apoyos. Suponer $E = 2 \times 10^6$ kg/cm$^2$ e $I = 30 \times 10^4$ cm$^4$ .

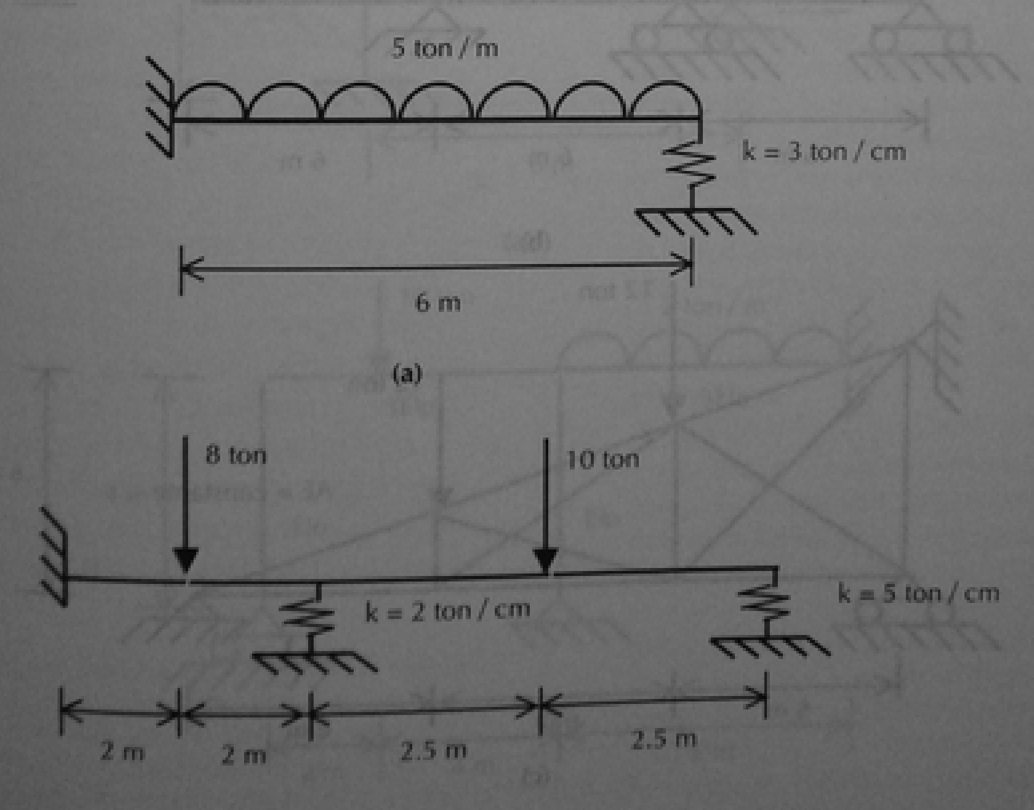



**(a)**



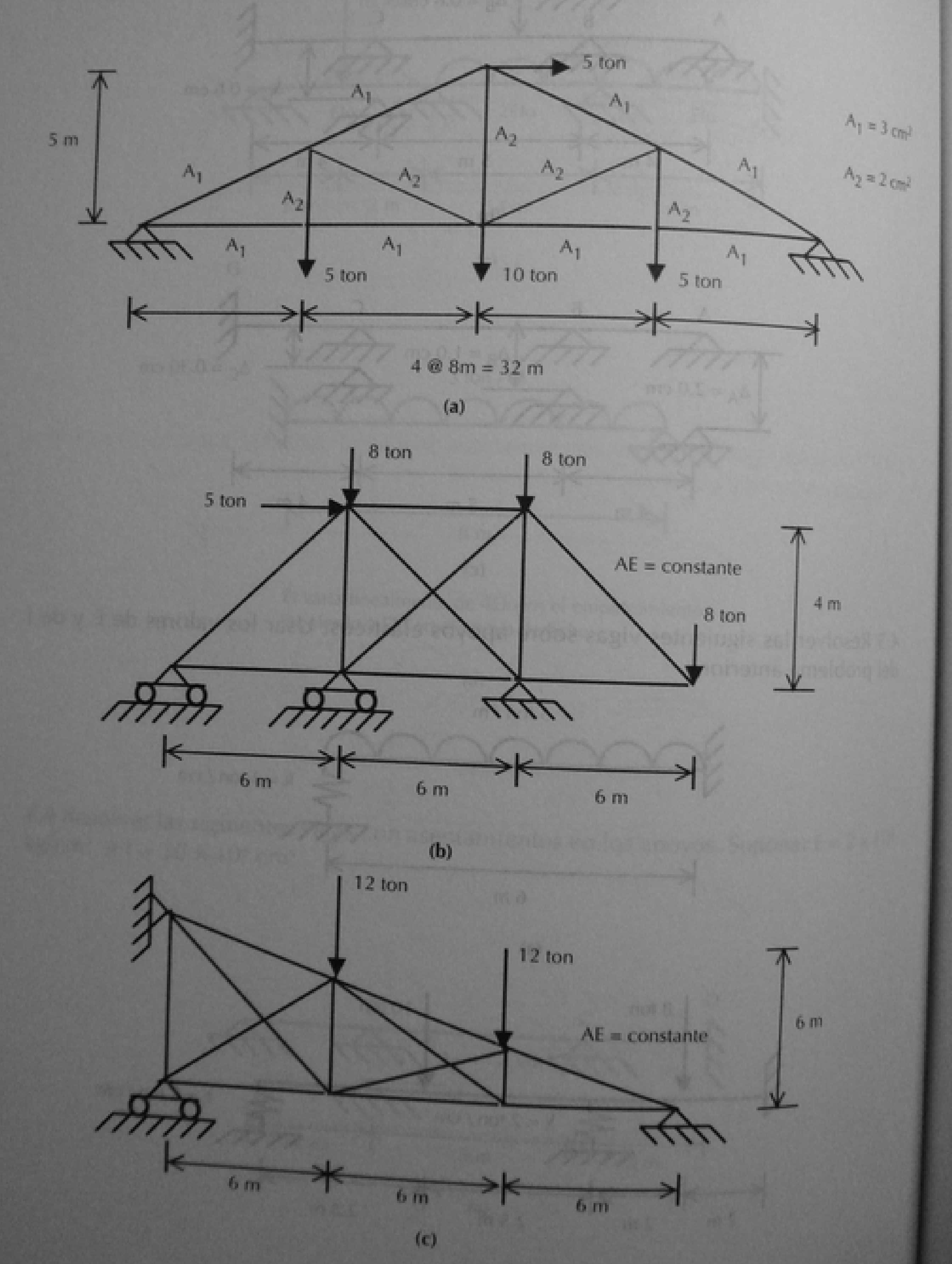

(c)

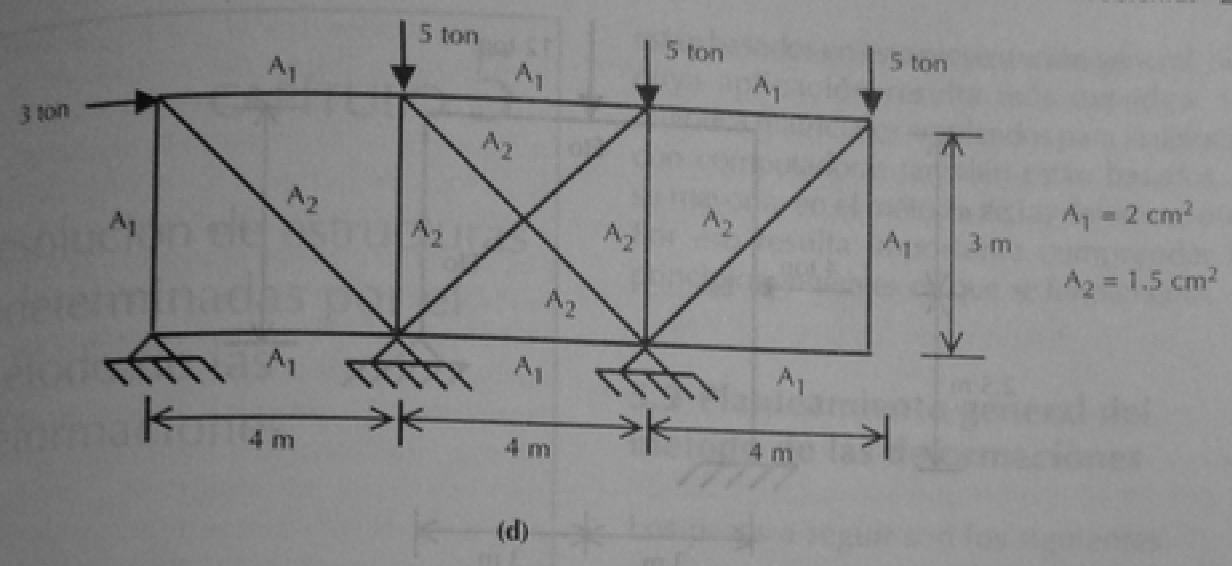
4.5 Resolver las siguientes vigas sobre apoyos elásticos. Usar los valores de E y de I del problema anterior.




(b)

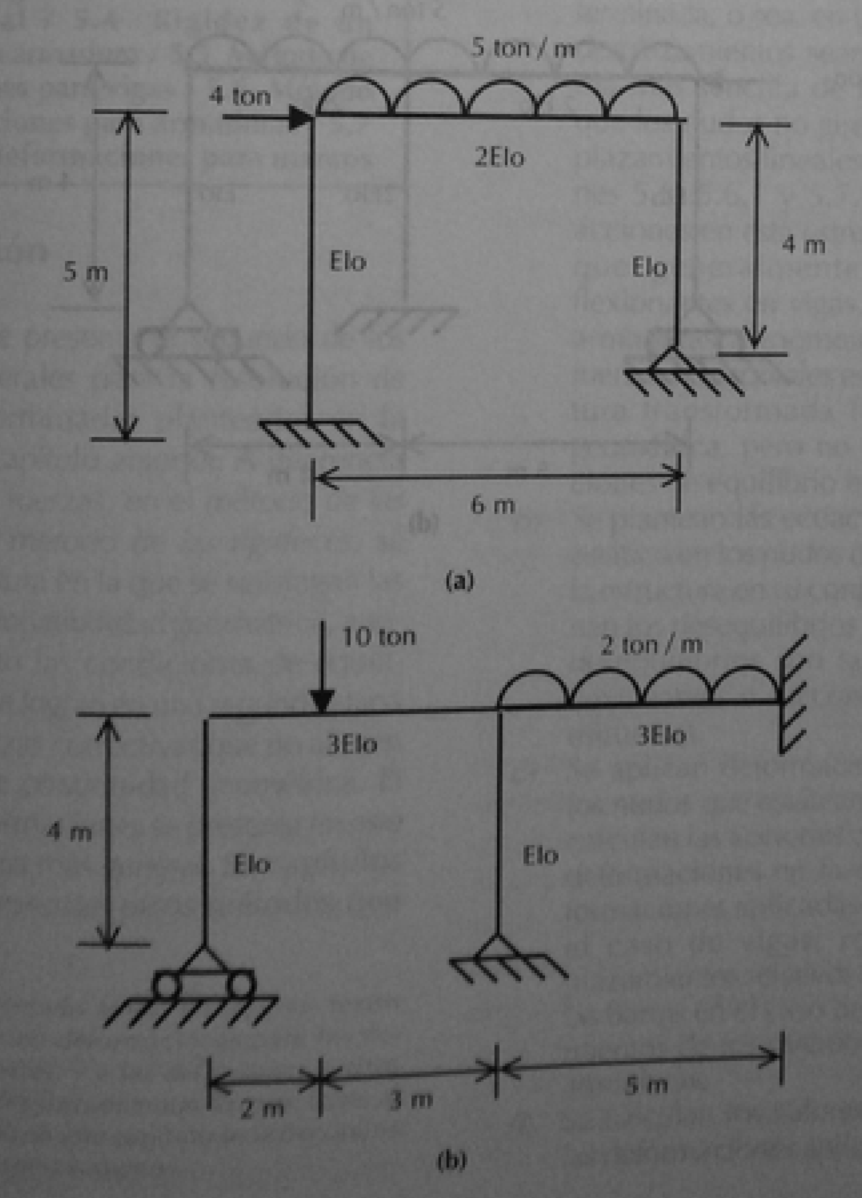
4.6 Resolver las siguientes armaduras por el método de las fuerzas.





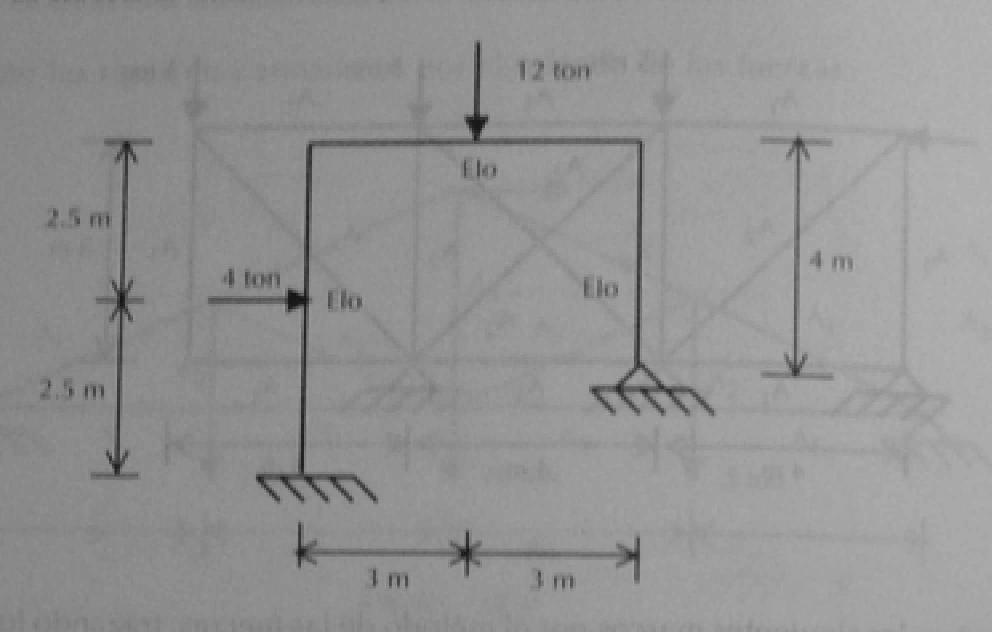

(d)

4.7 Resolver los siguientes marcos por el método de las fuerzas, trazando los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

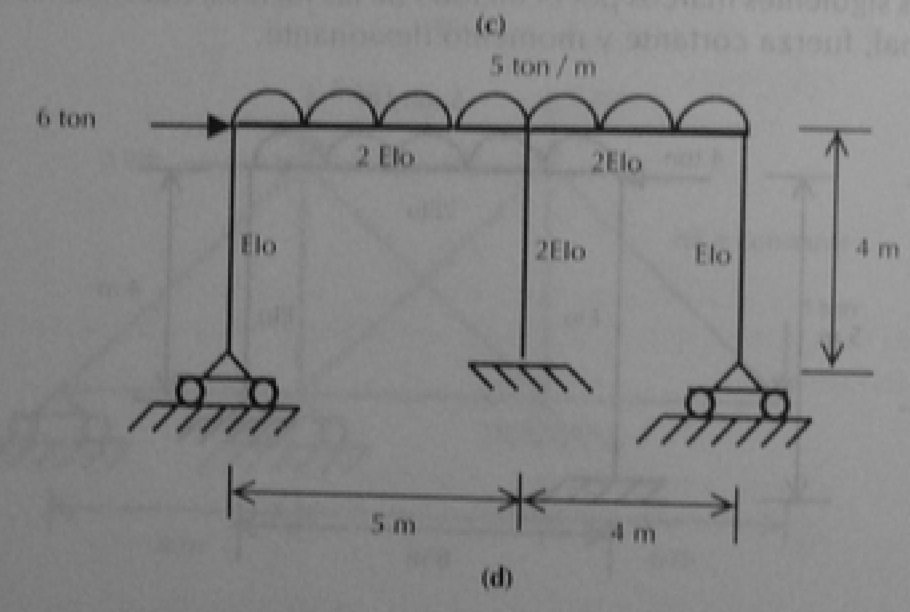



(a)

(b)


12 ton
EIo
2.5 m
4 ton
EIo
EIo
4 m
2.5 m
3 m
3 m

(c)


5 ton / m
6 ton
2 EIo
2EIo
EIo
2EIo
EIo
4 m
5 m
4 m

(d)

# CAPÍTULO 5

# Resolución de estructuras indeterminadas por el método de las deformaciones

**5.1 Introducción / 5.2 Planteamiento general del método de las deformaciones / 5.3 Rigidez angular, factor de transporte y rigidez lineal / 5.4 Rigidez de un miembro de una armadura / 5.5 Método de las deformaciones para vigas / 5.6 Método de las deformaciones para armaduras / 5.7 Método de las deformaciones para marcos**

## 5.1 Introducción

En este capítulo se presenta el segundo de los dos métodos generales para la resolución de estructuras indeterminadas planteados en la introducción del capítulo anterior. A diferencia del método de las fuerzas, en el *método de las deformaciones** o *método de las rigideces*, se plantea una estructura en la que se satisfagan las condiciones de compatibilidad geométrica, aunque no se cumplan las condiciones de equilibrio. Estas últimas se logran en una segunda etapa introduciendo fuerzas correctivas que no alteren las condiciones de continuidad geométrica. El método de las deformaciones se presenta en este capítulo en su forma más general. En capítulos posteriores se presentan otros métodos que están basados en esta presentación general, pero cuya aplicación resulta más expedita. Los métodos matriciales empleados para la solución con computadoras también están basados, en su mayoría, en el método de las deformaciones. Por eso resulta importante comprender los principios generales en que se fundamenta.

## 5.2 Planteamiento general del método de las deformaciones

Los pasos a seguir son los siguientes.

*a)* La estructura original hiperestática se transforma en otra que sea cinemáticamente determinada, o sea, en una estructura cuyos desplazamientos sean conocidos; la forma más sencilla de hacerlo es plantear que los nudos no giren y no tengan desplazamientos lineales (véanse las secciones 5.5, 5.6.1 y 5.7.1). Se obtienen las acciones en esta estructura transformada que generalmente son momentos flexionantes en vigas, fuerzas axiales en armaduras y momentos flexionantes y fuerzas horizontales en marcos. La estructura transformada tiene continuidad geométrica, pero no cumple las condiciones de equilibrio estático.

*b)* Se plantean las ecuaciones de equilibrio estático en los nudos de la estructura y en la estructura en su conjunto, y se determinan los desequilibrios que resulten. Estos desequilibrios son también momentos flexionantes o fuerzas, según el tipo de estructura.

*c)* Se aplican deformaciones arbitrarias en los nudos que están en desequilibrio y se calculan las acciones que producen estas deformaciones en la estructura. Las deformaciones aplicadas son rotaciones, en el caso de vigas; rotaciones y desplazamientos relativos de los extremos de las barras en el caso de marcos; o alargamientos de los miembros, en el caso de armaduras.

*d)* Se calculan los valores que deben tener las deformaciones aplicadas en los nudos

* Como se ha comentado antes, en algunos textos se reserva el término deformaciones para las deformaciones unitarias, y a las deflexiones y giros se les denomina desplazamientos. En este caso, al método presentado en este capítulo se le denomina método de los desplazamientos.

para corregir todos los desequilibrios determinados en el paso *b*).

*e*) Se calculan los valores de las acciones que corresponden a las deformaciones determinadas en el paso anterior.

*f*) Se calculan las acciones finales sumando las obtenidas en los pasos *a*) y *e*).

Una parte importante del método consiste en calcular las acciones producidas por las deformaciones impuestas a los nudos de las estructuras, a las que se alude en el paso *c*). Por lo tanto, antes de ilustrar la aplicación del método a diversas estructuras, se analiza en las dos secciones siguientes cómo pueden calcularse dichas acciones. En la sección 5.3 se trata el caso de miembros que trabajan fundamentalmente a flexión, o sea, vigas y columnas, y en la sección 5.4, el caso de miembros que trabajan fundamentalmente a carga axial, o sea, miembros de armaduras.

## 5.3 Rigidez angular, factor de transporte y rigidez lineal

Supóngase que se tiene una viga de claro $\ell$, con un extremo libremente apoyado y el extremo opuesto empotrado, como se muestra en la figura 5.1*a*. A esta viga se le impone una rotación $\theta_{AB}$ en el extremo *A*, manteniendo empotrado el extremo *B*, de tal manera que se deforma como se muestra con línea punteada en la figura 5.1*b*; se está aceptando la convención de signos de que una rotación positiva es la que tiene sentido horario. Sea $M_{AB}$ el momento que es necesario aplicar en el extremo *A* para que ocurra la rotación $\theta_{AB}$ y $M_{BA}$ el momento que debe desarrollarse en el extremo *B* para que este extremo se conserve empotrado, o sea, para que no gire; estos momentos se muestran en la figura 5.1*c*. Se trata ahora de encontrar los valores de $M_{AB}$ y $M_{BA}$ producidos por la rotación $\theta_{AB}$ impuesta en el extremo *A*.

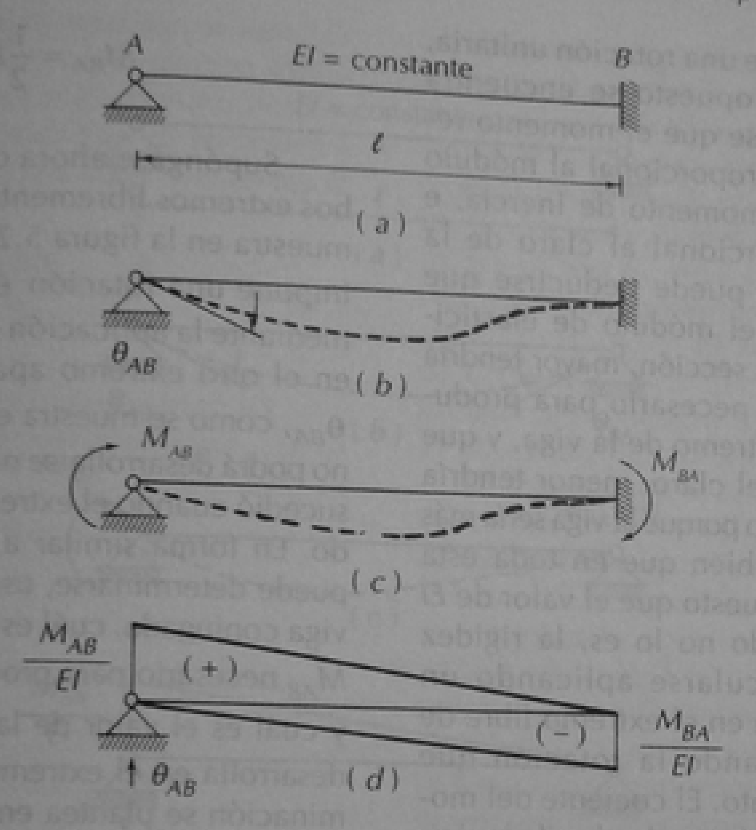
Los momentos $M_{AB}$ y $M_{BA}$ pueden determinarse a partir del método de la viga conjugada estudiado en la sección 3.5. En la figura 5.1*d* se muestra la viga conjugada de la viga de la figura 5.1*a*, cargada con los diagramas de *M/EI*. El extremo *A* se conserva como libremente apoyado y el extremo *B* se transforma en un apoyo libre. La reacción en el extremo *A* de la viga conjugada debe ser igual a la rotación $\theta_{AB}$ de la viga real, el momento $M_{AB}$ produce el diagrama de momentos flexionantes mostrado con signo positivo, y el momento $M_{BA}$ produce el diagrama de momentos flexionantes mostrado con signo negativo; obsérvese que, aunque el momento $M_{BA}$ es positivo, produce momentos flexionantes negativos en la viga. En la viga conjugada de la figura 5.1*d*, la reacción $\theta_{AB}$ es conocida y las incógnitas por determinar son los momentos $M_{AB}$ y $M_{BA}$.

Para determinar estos momentos, se plantean las ecuaciones de equilibrio de la viga de la figura 5.1*d*, como se muestra en la misma figura. Tomando suma de momentos respecto al punto *A* igual a cero, se obtiene la ecuación 2 de la figura 5.1, la cual señala que el momento en el extremo empotrado es la mitad del momento necesario para producir la rotación en el extremo libre. Tomando ahora la suma de momentos respecto al punto *B* se obtiene la ecuación 3; sustituyendo en esta ecuación el valor de $M_{BA}$ obtenido en la ecuación 2, y despejando $M_{AB}$ se llega a la ecuación 4, la cual indica el valor del momento que hay que aplicar en el extremo *A* de la viga de la figura 5.1*a* para que sufra una rotación $\theta_{AB}$.

Es útil analizar el caso de que la rotación impuesta al extremo de una viga tenga un valor unitario. En este caso $\theta_{AB} = 1$ y el momento en el extremo *A* tiene el valor

$$M_{AB} = \frac{4EI}{\ell} \qquad (5.1)$$

El segundo miembro de esta ecuación se conoce con el nombre de *rigidez angular*. Indica el valor del momento que es necesario aplicar en el extremo libremente apoyado de una viga




De $\sum M_A = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3} - \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.1)}$$

$$M_{BA} = \frac{1}{2}M_{AB} \qquad \text{(Ec.2)}$$

De $\sum M_B = 0$:

$$\theta_{AB}\cdot \ell - \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{1}{3}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.3)}$$

Sustituyendo $M_{BA}$, obtenido de la ecuación 2, en la ecuación 3 y despejando $M_{AB}$:

$$M_{AB} = \frac{4EI\,\theta_{AB}}{\ell} \qquad \text{(Ec.4)}$$

Si $\theta_{AB} = 1$:

$$M_{AB} = \frac{4EI}{\ell} \qquad \text{(Ec.5)}$$

**Figura 5.1. Determinación de la rigidez angular y del factor de transporte para una viga con un extremo libremente apoyado y otro empotrado**

para que experimente una rotación unitaria, cuando el extremo opuesto se encuentra empotrado. Obsérvese que el momento resulta directamente proporcional al módulo de elasticidad y al momento de inercia, e inversamente proporcional al claro de la viga. Intuitivamente puede deducirse que mientras mayor sea el módulo de elasticidad o la inercia de la sección, mayor tendría que ser el momento necesario para producir la rotación del extremo de la viga, y que mientras mayor sea el claro, menor tendría que ser dicho momento porque la viga sería más flexible. Nótese también que en toda esta deducción se ha supuesto que el valor de $EI$ es constante. Cuando no lo es, la rigidez angular puede calcularse aplicando un momento cualquiera en el extremo libre de la viga y determinando la rotación que produce este momento. El cociente del momento entre la rotación es el valor de la rigidez angular. El método de Newmark para calcular deformaciones, estudiado en el capítulo 3, es muy útil para estos casos, ya que permite tomar en cuenta de manera expedita la variación de $EI$ a lo largo de la viga.

El concepto de rigidez angular es de fundamental importancia en Análisis Estructural y se utiliza con mucha frecuencia en los métodos más usuales para la resolución de estructuras indeterminadas. El término $I/\ell$ suele representarse con la letra $K$ y se denomina *factor de rigidez*. Usando esta notación, la ecuación 5.1 puede escribirse

$$M_{AB} = 4EK \tag{5.2}$$

Otro concepto importante que se deriva de la figura 5.1 es el de *factor de transporte*. La Ec. 2 de esta figura expresa que si se aplica un momento $M_{AB}$ en el extremo libre de una viga, en el extremo opuesto, si está empotrado, aparece un momento $M_{BA}$ que vale la mitad del primer momento. O sea

$$M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB} \tag{5.3}$$

Supóngase ahora que la viga tiene ambos extremos libremente apoyados, como se muestra en la figura 5.2*a*. En este caso, si se impone una rotación $\theta_{AB}$ en el extremo $A$, mediante la aplicación de un momento $M_{AB}$ en el otro extremo aparecerá una rotación $\theta_{BA}$, como se muestra en la figura 5.2*b*, pero no podrá desarrollarse ningún momento como sucedió cuando el extremo $B$ estaba empotrado. En forma similar a la del caso anterior, puede determinarse, usando el método de la viga conjugada, cuál es el valor del momento $M_{AB}$ necesario para producir la rotación $\theta_{AB}$ y cuál es el valor de la rotación $\theta_{BA}$ que se desarrolla en el extremo opuesto. Esta determinación se plantea en la figura 5.2. La viga conjugada, figura 5.2*d*, tiene ahora los dos extremos libremente apoyados y su carga es únicamente el diagrama de momentos flexionantes producidos por $M_{AB}$ dividido entre $EI$. El parámetro conocido es la rotación $\theta_{AB}$ y las incógnitas son $M_{AB}$ y $\theta_{BA}$.

Según se deduce en la figura 5.2, el momento que es necesario aplicar en el extremo $A$ para producir la rotación $\theta_{AB}$ es:

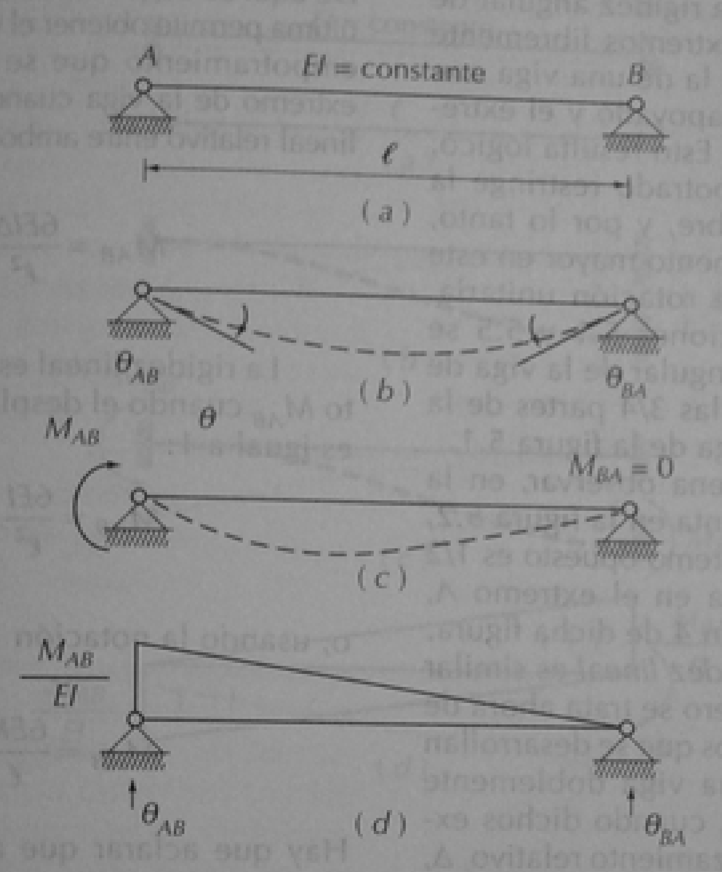
$$M_{AB} = \frac{3EI\theta_{AB}}{\ell} \tag{5.4}$$

Si la rotación es unitaria, el momento que se requiere aplicar, o sea, la rigidez angular, es:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell} \tag{5.5}$$

Usando la notación $K = I/\ell$, esta ecuación se puede escribir como

$$M_{AB} = 3EK \tag{5.6}$$




De $\sum M_A = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3} - \theta_{BA}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.1)}$$

De $\sum M_B = 0$:

$$\theta_{AB}\,\ell - \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2\ell}{3} = 0 \qquad \text{(Ec.2)}$$

$$M_{AB} = \frac{3EI\,\theta_{AB}}{\ell} \qquad \text{(Ec.3)}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1 y despejando $\theta_{BA}$:

$$\theta_{BA} = \frac{1}{2}\theta_{AB} \qquad \text{(Ec.4)}$$

**Figura 5.2.** Determinación de la rigidez angular para una viga con los dos extremos libremente apoyados

Se puede ver que la rigidez angular de una viga con sus dos extremos libremente apoyados es menor que la de una viga con un extremo libremente apoyado y el extremo opuesto empotrado. Esto resulta lógico, porque el extremo empotrado restringe la rotación del extremo libre, y por lo tanto, hay que aplicar un momento mayor en este último para producir la rotación unitaria. Comparando las ecuaciones 5.1 y 5.5 se deduce que la rigidez angular de la viga de la figura 5.2 es igual a las 3/4 partes de la rigidez angular de la viga de la figura 5.1.

También vale la pena observar, en la deducción que se presenta en la figura 5.2, que la rotación en el extremo opuesto es 1/2 de la rotación impuesta en el extremo *A*, según indica la ecuación 4 de dicha figura.

El concepto de *rigidez lineal* es similar al de rigidez angular, pero se trata ahora de determinar los momentos que se desarrollan en los extremos de una viga doblemente empotrada, figura 5.3*a*, cuando dichos extremos sufren un desplazamiento relativo, $\Delta$, como se muestra en la figura 5.3*b*. Este desplazamiento produce momentos en los extremos $M_{AB}$ y $M_{BA}$ mientras que no es posible que haya rotaciones $\theta$ por impedirlas los empotramientos, figura 5.3*c*. La viga conjugada para este caso se muestra en la figura 5.3*d*. Es una viga en el espacio, es decir, sin apoyos, cuya carga son los diagramas de momentos flexionantes producidos por los momentos en los extremos $M_{AB}$ y $M_{BA}$, divididos entre $EI$. En esta viga las incógnitas son los momentos $M_{AB}$ y $M_{BA}$, y los datos conocidos son las rotaciones en los extremos, que son nulas, y la deflexión del punto *B*, que es igual a $\Delta$. A partir de la primera condición se obtiene la ecuación 1, ya que las reacciones de la viga conjugada, $\theta_{AB}$ y $\theta_{BA}$, sólo pueden ser nulas si los dos diagramas de momentos flexionantes son iguales. De esta condición se deduce que los dos momentos en los extremos son iguales, lo cual era obvio por simetría. La segunda condición permite plantear una ecuación que indica que el momento flexionante de la viga conjugada en el punto *B*, $M_B$, es igual a la deflexión $\Delta$.

De aquí se deducen las ecuaciones 2 y 3. Esta última permite obtener el valor del momento de empotramiento que se desarrolla en cada extremo de la viga cuando el desplazamiento lineal relativo entre ambos es igual a $\Delta$:

$$M_{AB} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \tag{5.7}$$

La rigidez lineal es el valor del momento $M_{AB}$ cuando el desplazamiento relativo $\Delta$ es igual a 1:

$$M_{AB} = \frac{6EI}{\ell^2} \tag{5.8}$$

o, usando la notación $K = I/\ell$,

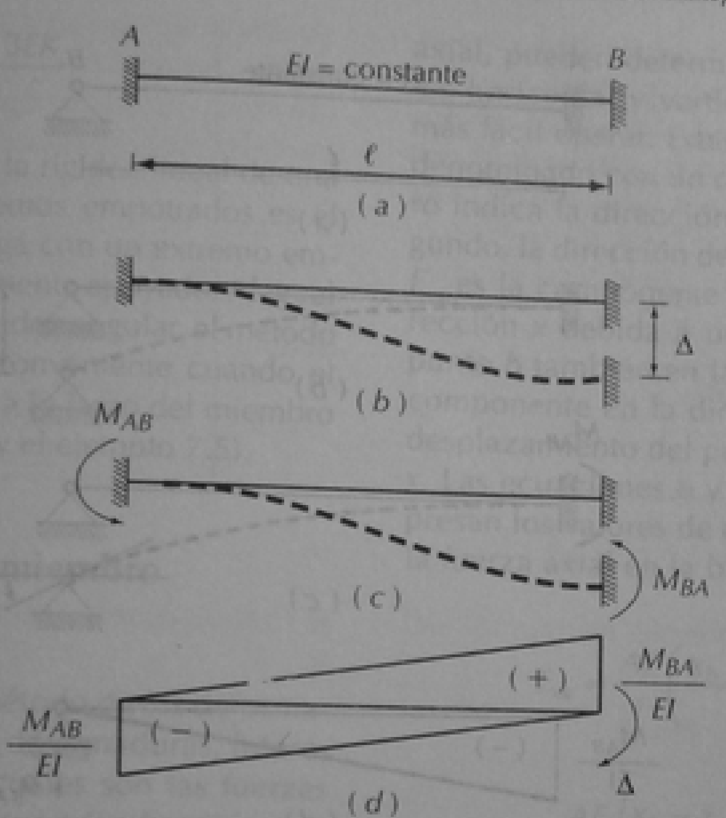
$$M_{AB} = \frac{6EK}{\ell} \tag{5.9}$$

Hay que aclarar que ambos momentos de empotramiento son negativos. En general, si la cuerda que une los dos extremos de un miembro gira en sentido horario, los momentos de empotramiento resultan negativos, y si gira en sentido antihorario, resultan positivos. Puede verse que en la figura 5.3, la cuerda que une los extremos *A* y *B* gira en sentido horario.

También interesa el caso de una viga con un apoyo empotrado y el otro libremente apoyado, figura 5.4. En esta figura se determina la rigidez lineal correspondiente, usando también el método de la viga conjugada. Los datos conocidos son la rotación en el apoyo *A*, que es nula, y la deflexión en el apoyo *B* que vale $\Delta$. Las incógnitas son el momento en el extremo empotrado $M_{AB}$ y la rotación el extremo libremente apoyado $\theta_{BA}$. Los cálculos de la figura 5.4 señalan que la rigidez lineal tiene el valor

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2} \tag{5.10}$$

o, usando la notación $K = I/\ell$,




Para que $\theta_{AB} = \theta_{BA} = 0$,

$$M_{AB} = M_{BA} \quad \text{(Ec.1)}$$

Para que la deflexión en $B$ sea igual a $\Delta$ :

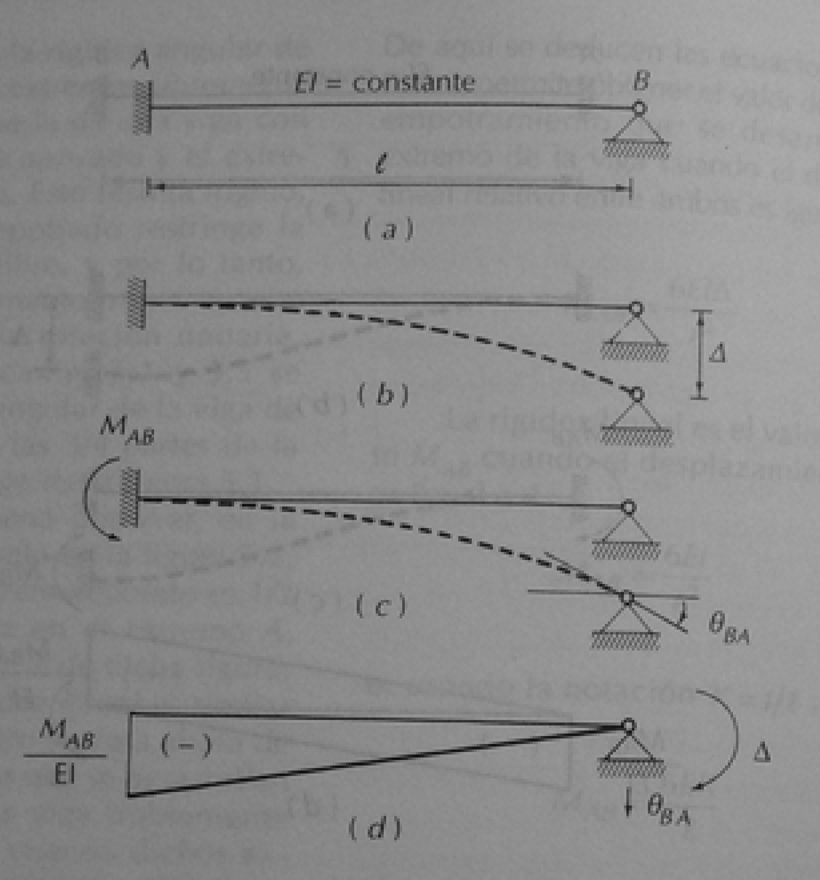
$$M_B = \Delta = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2}{3}\ell - \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3}$$

$$\Delta = \frac{M_{AB}}{EI}\left(\frac{1}{3}\ell^2 - \frac{1}{6}\ell^2\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\frac{M_{AB}\ell^2}{EI} \quad \text{(Ec.2)}$$

$$M_{AB} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \quad \text{(Ec.3)}$$

**Figura 5.3.** Determinación de la rigidez lineal de una viga con ambos extremos empotrados




Para que $\theta_A = 0$,

$$\theta_{BA} = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\ell \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Para que la deflexión en B sea igual a Δ:

$$M_B = \Delta = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\ell.\frac{2}{3}\ell$$

$$M_{AB} = \frac{3EI\Delta}{\ell^2} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Si $\Delta = 1$:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

**Figura 5.4.** Determinación de la rigidez lineal de una viga con un extremo empotrado y el otro libremente apoyado

$$M_{AB} = \frac{3EK}{\ell} \qquad (5.11)$$

Puede verse que la rigidez lineal de una viga con ambos extremos empotrados es el doble de la de una viga con un extremo empotrado y el otro libremente apoyado. Al igual que en el caso de la rigidez angular, el método de Newmark resulta conveniente cuando el valor de *EI* es variable a lo largo del miembro (Véase la sección 7.4 y el ejemplo 7.5).

## 5.4 Rigidez de un miembro de una armadura

En la aplicación del método de las deformaciones a la resolución de armaduras, interesa poder determinar cuáles son las fuerzas que se desarrollan en sus miembros cuando un nudo de la armadura sufre un desplazamiento. Se recordará que los miembros de una armadura trabajan bajo cargas axiales únicamente. Por lo tanto, las acciones producidas por los desplazamientos de un nudo serán fuerzas axiales.

En la figura 5.5 se presenta la determinación de las fuerzas axiales mencionadas. Supóngase que la recta *a-b* representa un miembro de una armadura de longitud $\ell$ y que el punto *b* sufre un desplazamiento horizontal unitario, figura 5.5*a*, y un desplazamiento vertical unitario, figura 5.5*b*, manteniéndose fijo el punto *a*. Con referencia a la figura 5.5*a*, o sea, al caso de desplazamiento horizontal, el alargamiento del miembro, $\Delta\ell$, resulta ser igual a sen $\alpha$, como se deduce del análisis del triángulo superior derecho. Ahora bien, el valor de sen $\alpha$ puede encontrarse en función de las coordenadas de los puntos *a* y *b* en el triángulo de la izquierda, ecuación 2. Haciendo las sustituciones indicadas en la figura se obtienen el alargamiento $\Delta\ell$ y la fuerza axial en la barra, *F*, ecuaciones 3 y 5. Teniendo la fuerza axial, pueden determinarse sus componentes horizontal y vertical, con las cuales es más fácil operar. Estas componentes se han denominado con un doble índice: el primero indica la dirección de la fuerza, y el segundo, la dirección del desplazamiento. Así, $F_{xx}$ es la componente de la fuerza en la dirección *x* debida a un desplazamiento del punto *b* también en la dirección *x*; $F_{yx}$ es la componente en la dirección *y* debida a un desplazamiento del punto *b* en la dirección *x*. Las ecuaciones 6 y 7 de la figura 5.5 expresan los valores de estas componentes de la fuerza axial en la barra *a-b*:

$$F_{xx} = \frac{AE}{\ell}\left(\frac{x_b - x_a}{\ell}\right)^2 \qquad (5.12)$$

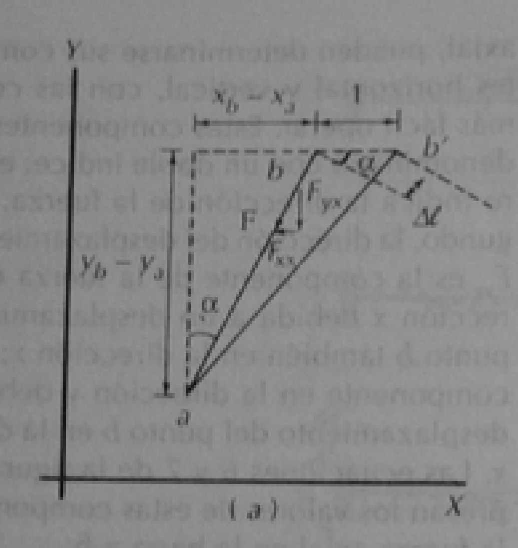
$$F_{yx} = \frac{AE}{\ell}\frac{(x_b - x_a)}{\ell}\frac{(y_b - y_a)}{\ell} \qquad (5.13)$$

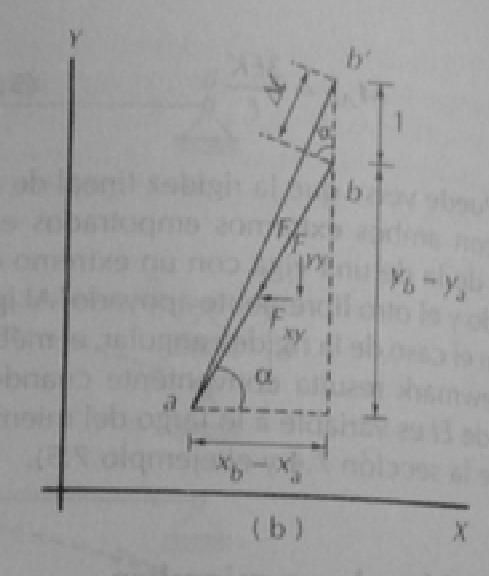
En la misma forma pueden encontrarse las componentes $F_{yy}$ y $F_{xy}$ para el caso de que el punto *b* tenga un desplazamiento vertical unitario, como el que se indica en la figura 5.5*b*. Esta obtención se presenta en la columna derecha de la figura 5.5 y las ecuaciones correspondientes son las siguientes:

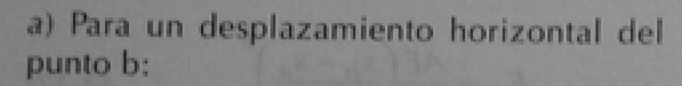
$$F_{yy} = \frac{AE}{\ell}\left(\frac{y_b - y_a}{\ell}\right)^2 \qquad (5.14)$$

$$F_{xy} = \frac{AE}{\ell}\frac{(x_b - x_a)}{\ell}\frac{(y_b - y_a)}{\ell} \qquad (5.15)$$

El caso que se ha analizado es el de una barra aislada, uno de cuyos extremos está fijo, extremo *a*, y el otro tiene un desplazamiento, extremo *b*. El caso más común en armaduras es aquel en que concurren varios miembros a un nudo. Esta situación puede analizarse suponiendo que existe un nudo



*a*) Para un desplazamiento horizontal del punto b:

$$\Delta\ell = 1\,\text{sen}\alpha \qquad \text{(Ec. 1)}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{x_b - x_a}{\ell} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Sustituyendo la ecuación 2 en la ecuación 1:

$$\Delta\ell = \frac{x_b - x_a}{\ell} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

$$F = AE\varepsilon$$

$$F = AE\frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad \text{(Ec. 4)}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 4:

$$F = \frac{AE}{\ell}\frac{(x_b - x_a)}{\ell} \qquad \text{(Ec. 5)}$$

$$F_{xx} = F\,\text{sen}\alpha$$

$$F_{xx} = \frac{AE}{\ell}\left(\frac{X_b - X_a}{\ell}\right)^2 \qquad \text{(Ec. 6)}$$

$$F_{xy} = F\cos\alpha$$

$$F_{yx} = \frac{AE}{\ell}\cdot\frac{(x_b - x_a)}{\ell}\frac{(y_b - y_a)}{\ell} \qquad \text{(Ec. 7)}$$

*b*) Para un desplazamiento vertical del punto b:

$$\Delta\ell = 1\,\text{sen}\alpha \qquad \text{(Ec. 8)}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{y_b - y_a}{\ell} \qquad \text{(Ec. 9)}$$

Sustituyendo la ecuación 9 en la ecuación 8:

$$\Delta\ell = \frac{y_b - y_a}{\ell} \qquad \text{(Ec. 10)}$$

$$F = AE\varepsilon$$

$$F = AE\frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad \text{(Ec. 11)}$$

Sustituyendo la ecuación 10 en la ecuación 11:

$$F = \frac{AE}{\ell}\frac{(y_b - y_a)}{\ell} \qquad \text{(Ec. 12)}$$

$$F_{yy} = F\,\text{sen}\alpha$$

$$F_{yy} = \frac{AE}{\ell}\left(\frac{y_b - y_a}{\ell}\right)^2 \qquad \text{(Ec. 13)}$$

$$F_{xy} = F\cos\alpha$$

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{AE}{\ell}\frac{(x_b - x_a)}{\ell}\frac{(y_b - y_a)}{\ell} \qquad \text{(Ec. 14)}$$

**Figura 5.5.** Fuerzas en un miembro de armadura cuando un extremo tiene desplazamientos unitarios

al que concurren varias barras, cada una de las cuales tiene fijo el extremo opuesto, y que el nudo considerado tiene un desplazamiento horizontal y un desplazamiento vertical. Si se denomina con la letra *j* al nudo que se desplaza, y con *i*1, *i*2, ..., *in* a los extremos opuestos de cada barra, figura 5.6, las fuerzas totales, *k*, en el nudo *j* pueden determinarse aplicando las ecuaciones 5.12 a 5.15 a cada barra; el subíndice *b* se cambia por el subíndice *j* y el subíndice *a* por los subíndices *i*1, *i*2, ...,*in*. El resultado es el siguiente:

$$k_{xx} = \sum_{i1,i2...} \left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji} \left(x_j - x_i\right)^2$$

$$k_{yy} = \sum_{i1,i2...} \left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji} \left(y_j - y_i\right)^2$$

$$k_{xy} = k_{yx} = \sum_{i1,i2...} \left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji} \left(x_j - x_i\right)\left(y_j - y_i\right) \tag{5.16}$$

Obsérvese que la sumatoria se lleva a cabo a través de todas las barras y que el subíndice del término $AE/\ell^3$ se refiere a la barra que se esté considerando como sumando de la sumatoria.

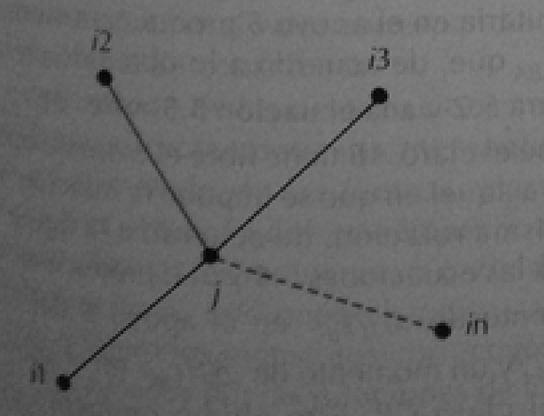



Figura 5.6. Barras que concurren a un nudo *j* con desplazamiento

Las ecuaciones 5.16 permiten determinar las fuerzas totales en el nudo *j*. En cada uno de los nudos opuestos *i*1, *i*2,..., *in* habrá una fuerza igual, pero de sentido contrario, al término de la sumatoria que corresponde al nudo en cuestión. Así, en el nudo *i*1 se desarrollarán fuerzas con el siguiente valor:

$$k_{xx} = -\left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji1} \left(x_j - x_{i1}\right)^2$$

$$k_{yy} = -\left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji1} \left(y_j - y_{i1}\right)^2$$

$$k_{xy} = k_{yx} = -\left(\frac{AE}{\ell^3}\right)_{ji1} \left(x_j - x_{i1}\right)\left(y_j - y_{i1}\right) \tag{5.17}$$

Las ecuaciones deducidas en esta sección y en la anterior permiten determinar las fuerzas que se desarrollan en miembros que trabajan a carga axial o a flexión, respectivamente, cuando sus extremos sufren deformaciones. Se había indicado que estas expresiones eran necesarias para poder llevar a cabo el paso *c* del planteamiento general del método de las deformaciones (sección 5.2). Habiéndolas obtenido, se ilustrará en las siguientes secciones la aplicación de este método.

## 5.5 Método de las deformaciones para vigas

Como se verá en los ejemplos siguientes, al aplicar el paso *a* descrito en el planteamiento general de la sección 5.2 será necesario restringir el giro en todos los apoyos de una viga en los que pueda existir momento flexionante. También se verá que para hacer los cálculos a los que se alude en el paso *d* se requerirá plantear un sistema

de ecuaciones simultáneas cuyo número es igual al de apoyos en los que se haya restringido el giro.

Por cada posible giro que pueda presentarse en los apoyos de una viga, se dice que ésta tiene un *grado de libertad* o *grado de interdeterminación cinemática*. Así, la viga del ejemplo 5.1 incluido más adelante tiene cinco grados de libertad, uno por cada apoyo. Obsérvese que en cada apoyo interior hay un solo giro, pues es igual a ambos lados del apoyo. Sin embargo, cuando se resuelva esta viga, se planteará un sistema de sólo tres ecuaciones simultáneas, ya que aunque haya giros en los apoyos $A$ y $E$, no será necesario calcularlos porque se sabe de antemano que el momento flexionante es nulo en dichos apoyos. La viga del ejemplo 5.2 tiene sólo dos grados de libertad, ya que no hay giros en los apoyos $A$ y $D$. Al resolver este problema se planterá un sistema de dos ecuaciones simultáneas.

### *5.5.1 Vigas de varios claros sobre apoyos rígidos*

**Ejemplo 5.1** Se resuelve la misma viga continua resuelta en el ejemplo 4.2 por el método de las fuerzas, siguiendo los pasos establecidos en la sección 5.2 de este capítulo.

En primer término, paso *a*, se plantea una viga en que se satisfacen las condiciones de compatibilidad geométrica, pero no las condiciones de equilibrio. Esto puede lograrse empotrando todos los apoyos de la viga, de tal manera que cada tramo interior se convierte en una viga doblemente empotrada, y los claros extremos se transforman en vigas con un extremo empotrado y el otro libremente apoyado. Los momentos de empotramiento perfecto para estos dos casos son conocidos para distintos tipos de carga. Para cargas uniformemente distribuidas, como las de este ejemplo, valen $w\ell^2/12$ y $w\ell^2/8$, respectivamente. Estos momentos se han denominado $\overline{M}$ en el ejemplo.

Los momentos de empotramiento perfecto pueden obtenerse para cualquier condición de carga por el método de las fuerzas estudiado en el capítulo anterior. En la tabla 5.1 incluida al final de este capítulo se presentan sus valores para las condiciones de carga más usuales. En la parte izquierda de la tabla los valores corresponden a vigas con un extremo empotrado y el otro libremente apoyado, mientras que en la parte derecha, a vigas con ambos extremos empotrados.

En el paso *b* se determinan los momentos de desequilibrio como las diferencias entre los momentos de empotramiento perfecto a ambos lados de cada apoyo. Así, el momento de –0.8 en el apoyo $B$ es la diferencia del momento de +20.0 en el claro $BA$ y el momento de –20.8 en el claro $BC$. Estos momentos de desequilibio indican que, aunque en la viga planteada en el paso *a* hay compatibilidad de deformaciones, no se cumplen las condiciones de equilibrio.

Para restaurar el equilibrio de la viga, se han impuesto en el paso *c* rotaciones unitarias en cada apoyo, excepto en los apoyos extremos que son libres. Estas rotaciones se aplican en cada apoyo manteniendo empotrados los demás. Por lo tanto, producen momentos en los dos claros adyacentes al apoyo únicamente. El valor de los momentos inducidos se puede calcular a partir del concepto de rigidez angular. Así, la rotación unitaria en el apoyo $B$ produce un momento $M_{BA}$ que, de acuerdo a lo obtenido en la figura 5.2 y a la ecuación 5.5, vale $3EI/\ell_{AB}$ ya que el claro $AB$ tiene libre el extremo opuesto a aquel en que se impone la rotación. Esta misma rotación, de acuerdo a la figura 5.1 y a las ecuaciones 5.1 y 5.3, produce un momento de $4EI/\ell_{BC}$ en el apoyo $B$ del claro $BC$, y un momento de $2EI/\ell_{BC}$ en el apoyo $C$ del claro $CB$. Este último momento es la mitad del producido por la rotación en el apoyo $B$.

Para restaurar el equilibrio de la viga planteada en el paso *a*, las rotaciones del paso *c* no deben ser unitarias, sino deben tener valores tales que el momento de desequilibrio en cada apoyo sea nulo. Estos valores pueden determinarse planteando el sistema de ecuaciones mostrado en el paso *d*, el cual indica que si las rotaciones impuestas en los apoyos tienen valores $\theta_B$, $\theta_C$ y $\theta_D$, los momentos de desequilibrio resultan iguales a cero. Por ejemplo, la primera ecuación indica que el momento de desequilibrio en el apoyo B, más los momentos $M_{BA}$ y $M_{BC}$ causados por una rotación $\theta_B$, más el momento $M_{BC}$ causado por una rotación $\theta_C$ es igual a cero; obsérvese en la figura del paso *c* que la rotación $\theta_D$ no produce momento en el apoyo *B*. En el sistema de ecuaciones del paso *d* se han sustituido los valores de las longitudes $\ell$ del paso c. Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen entonces los valores de las rotaciones que es necesario introducir. El sistema de ecuaciones puede resolverse en función del término *EI*, o bien, en forma más sencilla, haciendo $EI = 1$ e introduciendo, una vez resuelto el sistema, el término *EI* como denominador de los valores obtenidos para cada valor de $\theta$. Los valores negativos que resultaron para $\theta_B$ y $\theta_D$ en el ejemplo indican que las rotaciones deben tener sentido contrario al mostrado en el paso c. Si el término *EI* variase en cada claro, debe introducirse el valor correspondiente en el sistema de ecuaciones.

En el método de las deformaciones no se obtienen directamente los momentos como en el método de las fuerzas. Hasta ahora se han obtenido deformaciones y es necesario calcular los momentos a partir de las deformaciones. Esto puede hacerse calculando primero los momentos correctivos, o sea, los causados por las rotaciones de los apoyos, que se han denominado con la letra *m* en el ejemplo. Para hacer este cálculo, basta multiplicar los momentos indicados en la figura del paso *c* por los valores ya obtenidos de las rotaciones $\theta$. Por ejemplo el momento $m_{BC}$ a la derecha del apoyo *B*, será igual al momento $4EI/\ell_{BC}$ multiplicado por $\theta_B$, correspondiente a la primera figura del paso *c*, más el momento $2EI/\ell_{BC}$ multiplicado por $\theta_C$, correspondiente a la segunda figura de dicho paso. De esta manera se han obtenido todos los momentos del paso *e*.

Finalmente, en el paso *f* se han calculado los momentos totales, sumando los momentos correctivos determinados en el paso anterior a los momentos de empotramiento perfecto determinados en el paso *a*.

La determinación de los momentos correctivos a partir de las rotaciones, paso *e*, puede sistematizarse como se muestra en la figura 5.7. El momento correctivo en el apoyo interior de un claro extremo, cuando el apoyo exterior es libre, figura 5.7*a*, se puede calcular con la ecuación

$$m_{ji} = \frac{3EI}{\ell_{ij}}\theta_j \qquad (5.18)$$

ya que es el caso de la ecuación 5.4.

Si el apoyo exterior está empotrado, como en la figura 5.7*b*, la ecuación para calcular el momento correctivo es la ecuación 5.1 y por lo tanto

$$m_{ji} = \frac{4EI}{\ell_{ij}}\theta_j \qquad (5.19)$$

El momento en un claro interior, cuando los dos extremos sufren rotaciones, como en la figura 5.7*c*, puede obtenerse con las ecuaciones 5.1 y 5.3; por lo tanto

$$m_{jk} = \frac{4EI}{\ell_{jk}}\theta_j + \frac{2EI}{\ell_{jk}}\theta_k \qquad (5.20)$$

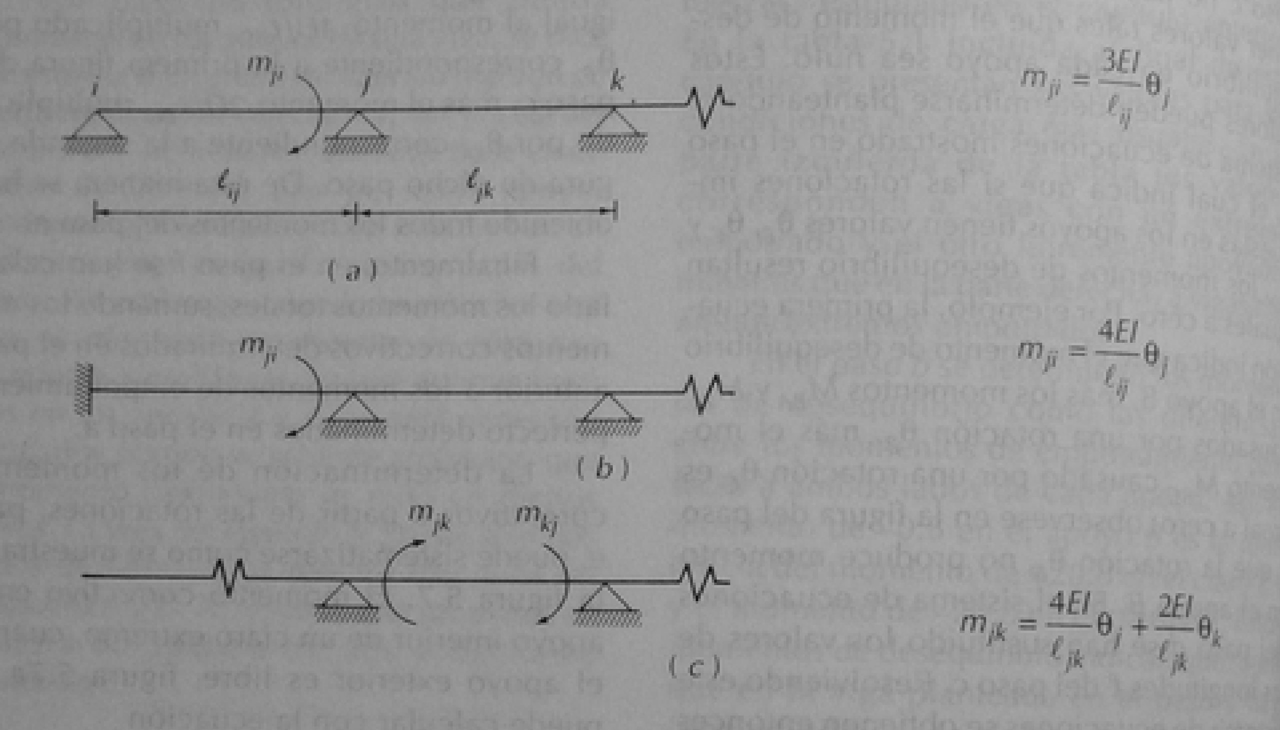
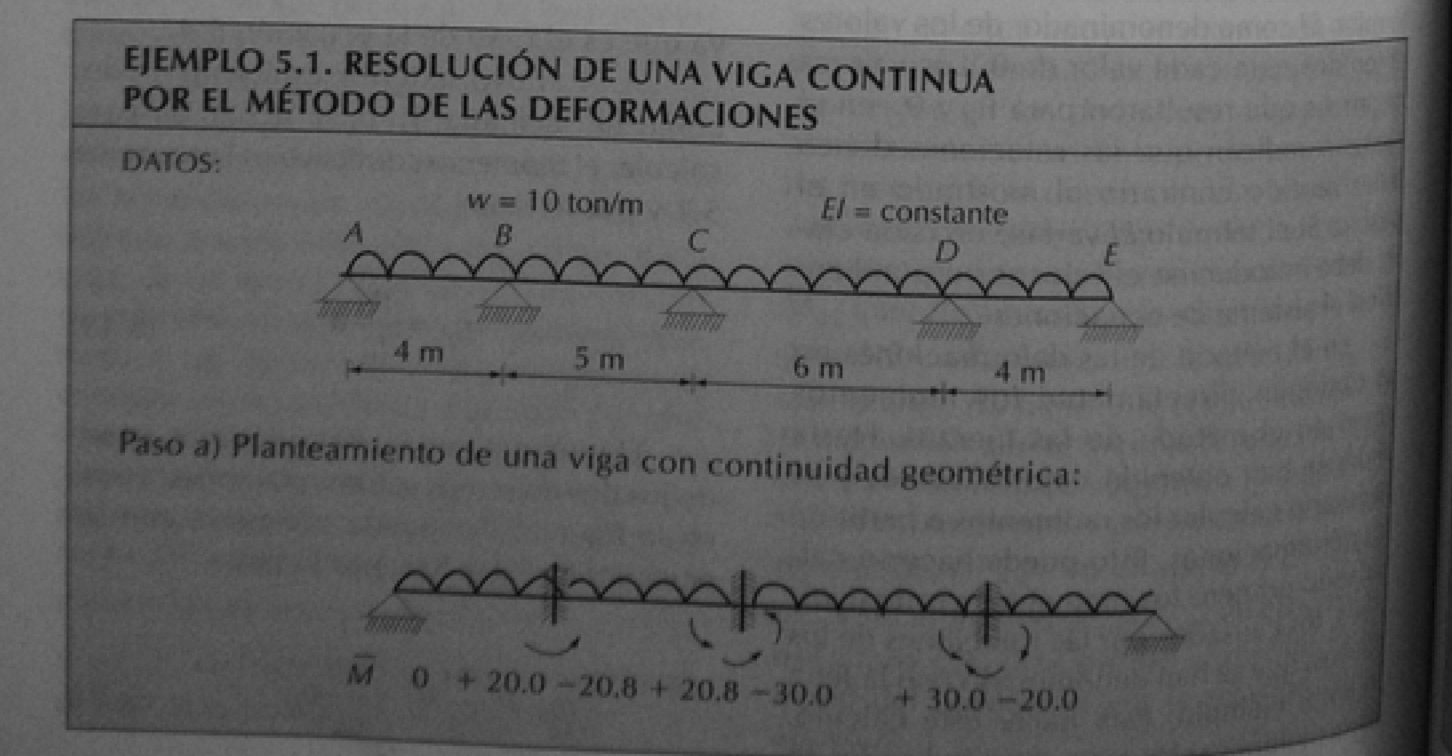



**Figura 5.7.** Momentos correctivos para distintas condiciones de apoyo y posición de los claros



## EJEMPLO 5.1. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA POR EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES

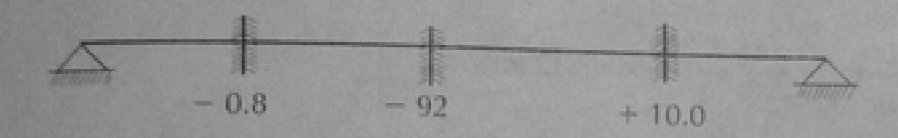
DATOS:



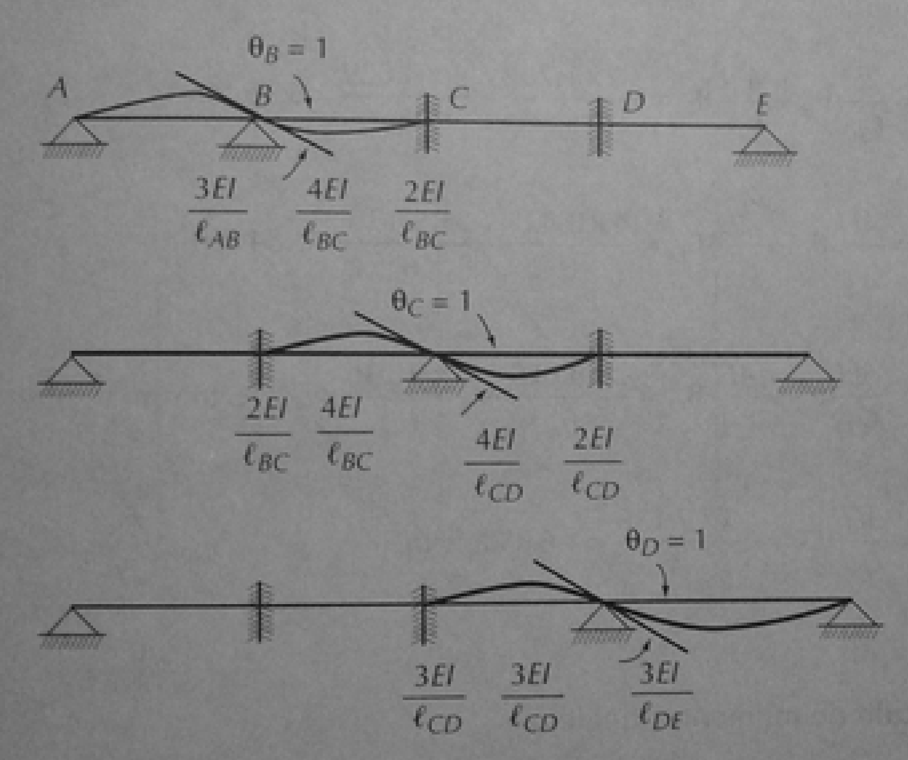
Paso *a*) Planteamiento de una viga con continuidad geométrica:

## EJEMPLO 5.1 *(continuación)*

Paso *b*) Cálculo de los momentos de desequilibrio:




Paso *c*) Imposición de rotaciones unitarias:




Paso *d*) Cálculo de las rotaciones reales:

$$-0.8+EI\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)\theta_B+EI\frac{2}{5}\theta_C=0$$

$$-9.2+EI\left(\frac{2}{5}\right)\theta_B+EI\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\right)\theta_C+EI\left(\frac{2}{6}\right)\theta_D=0$$

$$+10.0+EI\left(\frac{2}{6}\right)\theta_C+EI\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{4}\right)\theta_D=0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\theta_B=-\frac{1.762}{EI},\quad \theta_C=\frac{8.829}{EI},\quad \theta_D=-\frac{9.136}{EI},$$

**EJEMPLO 5.1** ***(continuación)***

Paso *e*) Cálculo de los momentos producidos por las rotaciones (momentos correctivos):

$$m_{BA}=\frac{3EI}{\ell_{AB}}\theta_B=-\frac{3\times1.762}{4}=-1.32\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{BC}=\frac{4EI}{\ell_{BC}}\theta_B+\frac{2EI}{\ell_{BC}}\theta_C=-\frac{4\times1.762}{5}+\frac{2\times8.829}{5}=2.12\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{CB}=\frac{2EI}{\ell_{BC}}\theta_B+\frac{4EI}{\ell_{BC}}\theta_C=\frac{-2\times1.762}{5}+\frac{4\times8.829}{5}=6.36\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{CD}=\frac{4EI}{\ell_{CD}}\theta_C+\frac{2EI}{\ell_{CD}}\theta_D=\frac{4\times8.829}{6}-\frac{2\times9.136}{6}=2.84\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{DC}=\frac{2EI}{\ell_{CD}}\theta_C+\frac{4EI}{\ell_{CD}}\theta_D=\frac{2\times8.829}{6}-\frac{4\times9.136}{6}=-3.15\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{DE}=\frac{3EI}{\ell_{DE}}\theta_D=-\frac{3\times9.136}{4}=-6.85\text{ ton}\cdot\text{m}$$

Paso *f*) Cálculo de momentos finales.

$$M_{BA}=20.00-1.32=18.68\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}=-20.80+2.12=-18.68\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}=+20.80+6.36=27.16\text{ ton}\cdot\text{m}$$

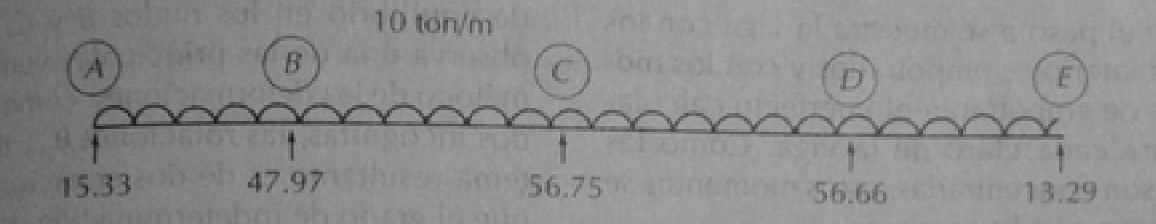
$$M_{CD}=-30.00+2.84=-27.16\text{ ton}\cdot\text{m}$$

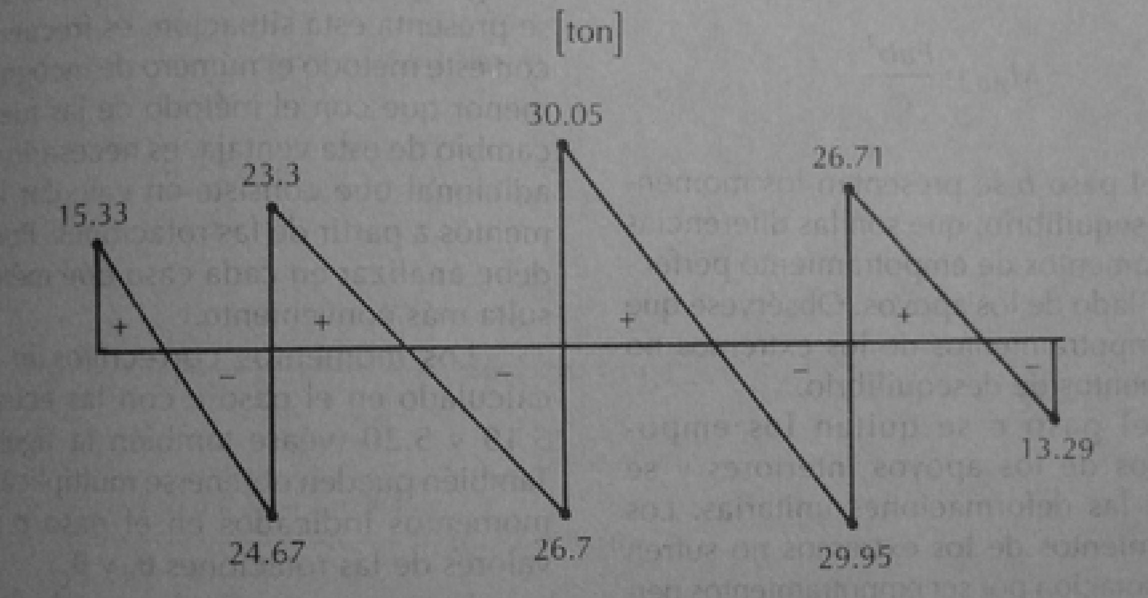
$$M_{DC}=+30.00-3.15=26.85\text{ ton}\cdot\text{m}$$

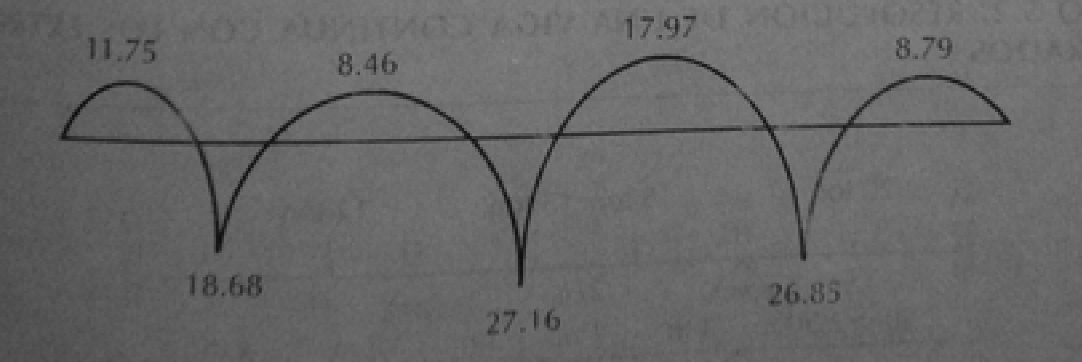
$$M_{DE}=-20.00-6.85=-26.85\text{ ton}\cdot\text{m}$$

EJEMPLO 5.1 *(continuación)*

Obtener cortantes y trazar diagramas de *V* y *M*.



**Ejemplo 5.2** Se resuelve otra viga continua con la diferencia, respecto al ejemplo anterior, de que los apoyos extremos están empotrados y de que el factor *EI* en el claro central es el doble que en los claros extremos.

En el paso *a* se muestra la viga con los apoyos interiores empotrados y con los momentos de empotramiento perfecto calculados para cada claro de la viga. Como las cargas son concentradas, estos momentos se calcularon con la ecuación

$$M_{AB} = \frac{Pab^2}{\ell^2}$$

En el paso *b* se presentan los momentos de desequilibrio, que son las diferencias de los momentos de empotramiento perfecto a cada lado de los apoyos. Obsérvese que en los empotramientos de los extremos no hay momentos de desequilibrio.

En el paso *c* se quitan los empotramientos de los apoyos interiores y se imponen las deformaciones unitarias. Los empotramientos de los extremos no sufren ninguna rotación por ser empotramientos perfectos. Los momentos producidos por las rotaciones se calcularon con las ecuaciones 5.1 y 5.3. Obsérvese que en los empotramientos de los extremos aparecen momentos que se determinan con la ecuación 5.3. Nótese también que al aplicar la ecuación 5.1 se usaron los valores de *EI* correspondientes a cada claro.

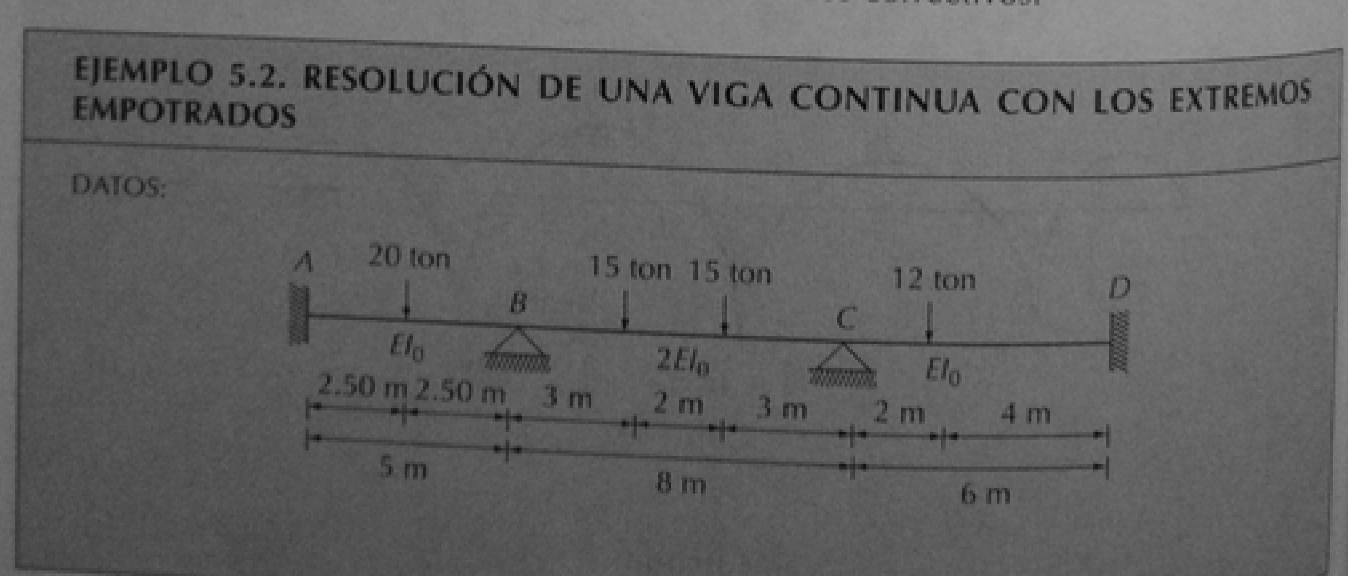
En el paso *d* se plantean las ecuaciones de equilibrio en los nudos *B* y *C*. Aquí se observa una de las principales ventajas del método de las deformaciones: como sólo hay dos incógnitas, las rotaciones $\theta_B$ y $\theta_C$, el sistema resultante es de dos ecuaciones, aunque el grado de indeterminación estática de la viga es mucho mayor. Aunque no siempre se presenta esta situación, es frecuente que con este método el número de incógnitas sea menor que con el método de las fuerzas. A cambio de esta ventaja, es necesario el paso adicional que consiste en calcular los momentos a partir de las rotaciones. Por eso se debe analizar en cada caso qué método resulta más conveniente.

Los momentos correctivos *m* se han calculado en el paso e con las ecuaciones 5.19 y 5.20 (véase también la figura 5.7). También pueden obtenerse multiplicando los momentos indicados en el paso *c* por los valores de las rotaciones $\theta_B$ y $\theta_C$.

Los momentos finales se calculan en el paso *f* sumando los momentos de empotramiento perfecto calculados en el paso *a* con los correctivos.

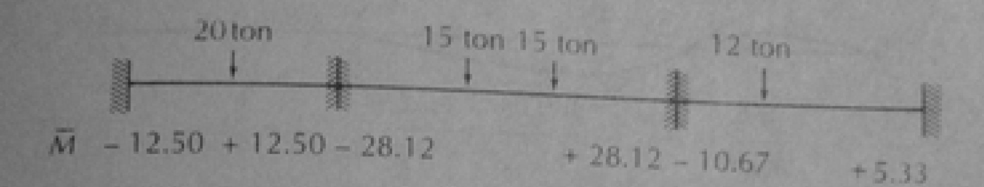
**EJEMPLO 5.2. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON LOS EXTREMOS EMPOTRADOS**

DATOS:



**EJEMPLO 5.2 *(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento de una viga con continuidad geométrica:




$$\overline{M}_{AB} = -\frac{20\times 2.50^3}{5^2} = -12.50 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{AB} = +\frac{20\times 2.50^3}{5^2} = +12.50 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

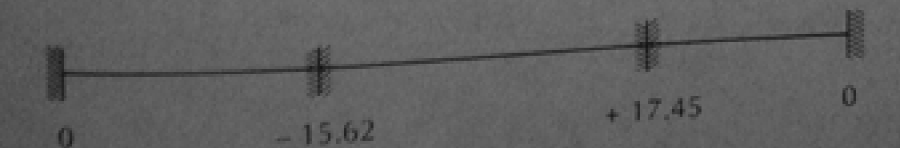
$$\overline{M}_{BC} = -\frac{15\left(3\times 5^2 + 5\times 3^2\right)}{8^2} = -28.12 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{CB} = +\frac{15\left(3\times 5^2 + 5\times 3^2\right)}{8^2} = 28.12 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{12\times 2\times 4^2}{6^2} = -10.67 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

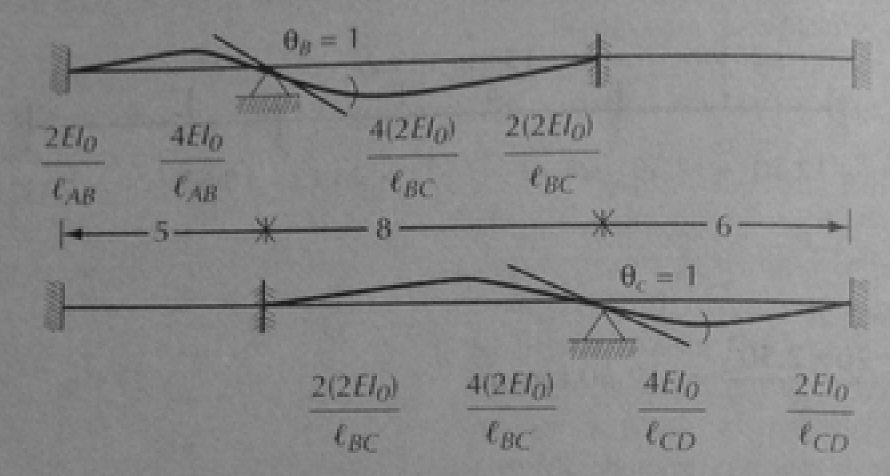
$$\overline{M}_{DC} = +\frac{12\times 4\times 2^2}{6^2} = +5.33 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Paso *b*) Cálculo de los momentos de desequilibrio:



**EJEMPLO 5.2 *(continuación)***

Paso *c*) Imposición de rotaciones unitarias:




Paso *d*) Cálculo de las rotaciones reales.

$$-15.62 + EI_o\left(\frac{4}{5}+\frac{8}{8}\right)\theta_B + EI_o\left(\frac{4}{8}\right)\theta_C = 0$$

$$+17.45 + EI_o\left(\frac{4}{8}\right)\cdot\theta_B + EI_o\left(\frac{8}{8}+\frac{4}{6}\right)\theta_C = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\theta_B = \frac{12.639}{EI_o}, \quad \theta_C = \frac{-14.259}{EI_o}$$

Paso *e*) Cálculo de los momentos correctivos:

$$m_{AB} = \frac{2EI_o}{\ell_{AB}}\theta_B = \frac{2\times 12.639}{5} = 5.056 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{BA} = \frac{4EI_o}{\ell_{AB}}\theta_B = \frac{4\times 12.639}{5} = 10.111 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{BC} = \frac{4(2EI_o)}{\ell_{BC}}\theta_B + \frac{2(2EI_o)}{\ell_{BC}}\theta_C = \frac{8\times 12.639}{8} - \frac{4\times 14.259}{8} = 5.510 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$m_{CB} = \frac{2(2EI_o)}{\ell_{BC}}\theta_B + \frac{4(2EI_o)}{\ell_{BC}}\theta_C = \frac{4\times 12.639}{8} - \frac{8\times 14.259}{8} = -7.940 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

**EJEMPLO 5.2 *(continuación)***

$$m_{CD} = \frac{4EI_o}{\ell_{CD}}\theta_C = \frac{-4\times 14.259}{6} = -9.506 \text{ ton·m}$$

$$m_{DC} = \frac{2EI_o}{\ell_{CD}}\theta_C = \frac{-2\times 14.259}{6} = -4.753 \text{ ton·m}$$

Paso *f)* Cálculo de momentos finales.

$$M_{AB} = -12.50 + 5.056 = -7.444$$

$$M_{BA} = +12.50 + 10.111 = +22.611$$

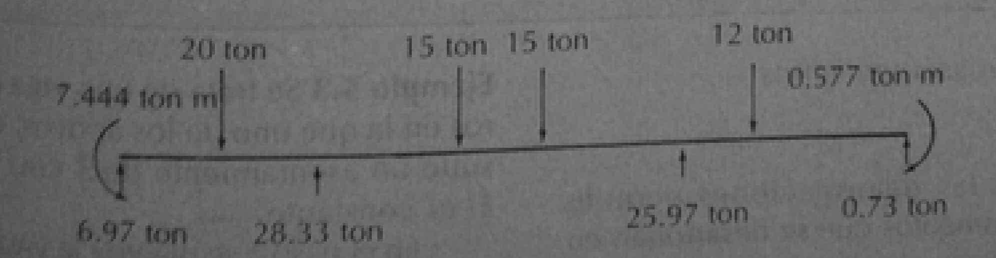
$$M_{BC} = -28.12 + 5.510 = -22.610$$

$$M_{CB} = +28.12 - 7.940 = +20.180$$

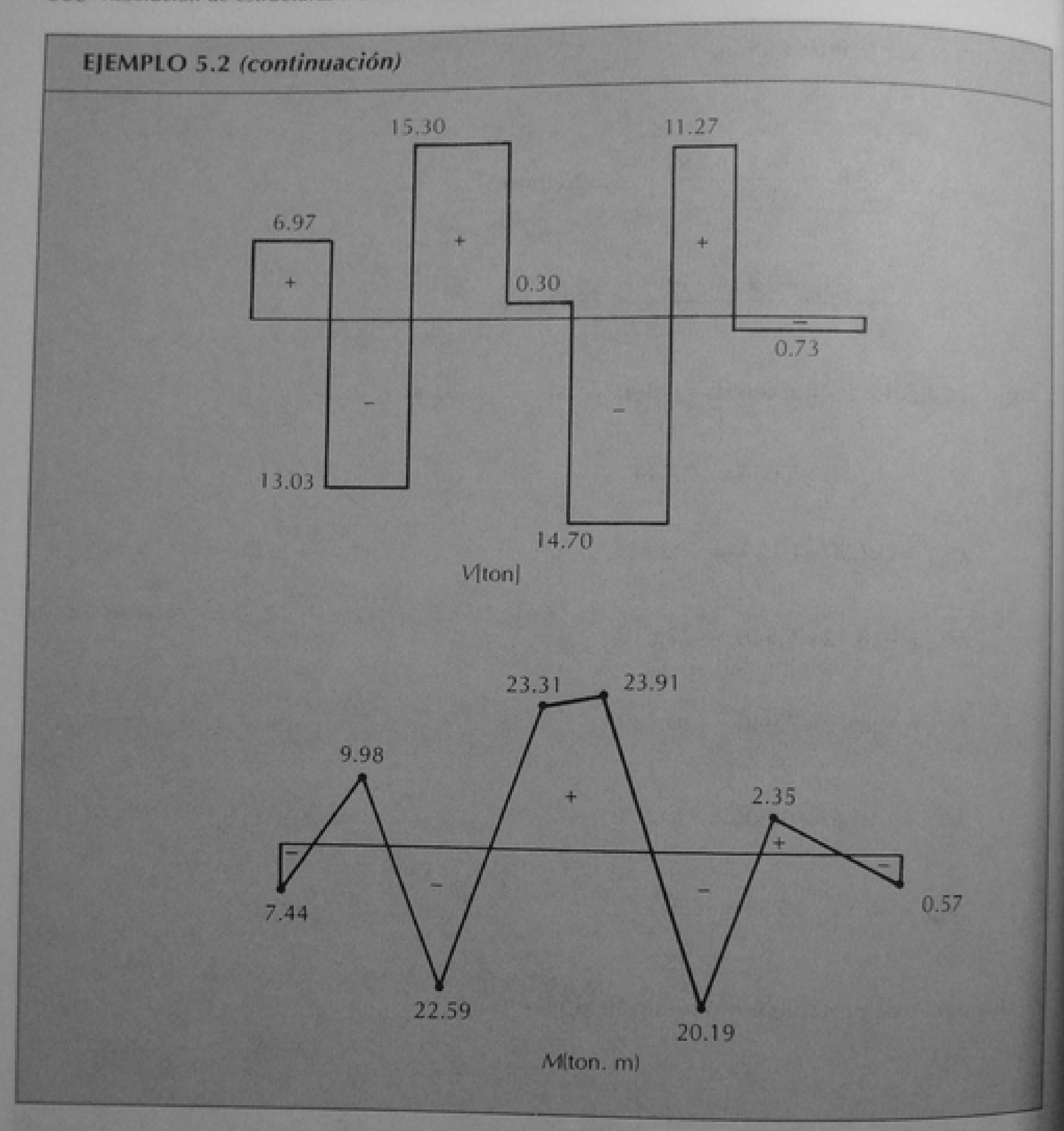
$$M_{CD} = -10.67 - 9.506 = -20.176$$

$$M_{DC} = +5.33 - 4.753 = +0.577$$

Diagramas de cortante y momento flexionante.



**EJEMPLO 5.2 (continuación)**




### *5.5.2 Vigas con asentamientos en los apoyos*

El método de las deformaciones permite calcular los momentos que se desarrollan en vigas cuyos apoyos tienen asentamientos diferenciales, haciendo uso del concepto de rigidez lineal planteado en la sección 5.3. En el siguiente ejemplo se ilustra esta aplicación.

**Ejemplo 5.3** Se trata de una viga de tres claros en la que uno de los apoyos, el apoyo *B*, sufre un asentamiento de 3 cm. El valor de *EI* es constante.

En el paso *a* se plantea la viga con continuidad geométrica empotrando los apoyos *B* y *C*. No es necesario empotrar el apoyo extremo *A* porque en él no se desarrolla ningún momento, y el otro apoyo extremo, el *D*, está

empotrado en la viga original. Los momentos de empotramiento perfecto $\overline{M}$, se calculan con las ecuaciones 5.7 y 5.10 (véanse también las figuras 5.3 y 5.4). El momento $M_{BA}$ se calcula con la ecuación 5.10 porque el extremo opuesto está libremente apoyado, mientras que los momentos $M_{BC}$ y $M_{CB}$ se calculan con la ecuación 5.7 porque los extremos opuestos están empotrados. Obsérvese que, por efecto del asentamiento del apoyo *B*, el tramo *AB* experimenta una rotación en sentido horario, por lo que el momento $M_{BA}$ es negativo; mientras que el claro *BC* tiene una rotación en sentido antihorario por lo que los momentos $M_{BC}$ y $M_{CB}$ son positivos, de acuerdo a la convención de signos establecida en la sección 5.3 para el cálculo de rigideces lineales.

En el paso *b* se calculan los momentos de desequilibrio. Obsérvese que los momentos a ambos lados del apoyo *B* son de signo contrario por lo que se restan.

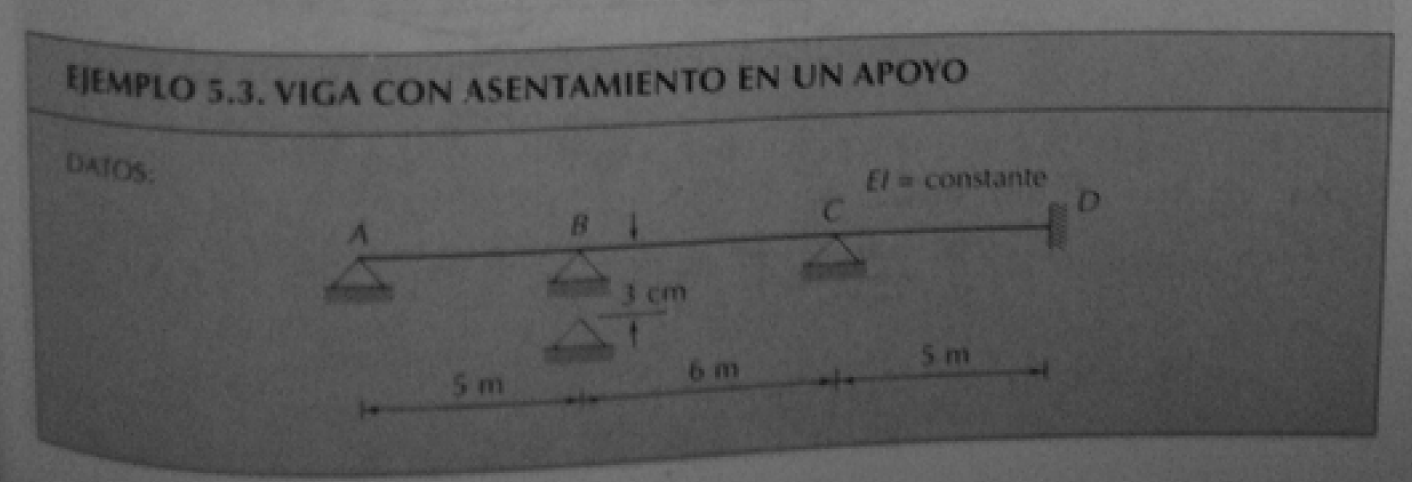
Al igual que en los ejemplos anteriores, en el paso *c* se imponen las rotaciones unitarias en cada apoyo, manteniendo los otros empotrados, excepto el apoyo libre extremo que se conserva libre. Los momentos producidos por estas rotaciones son las rigideces angulares de cada tramo de la viga, o bien, los momentos transportados cuando se trata del extremo opuesto al que sufre la rotación.

En el paso *d* se plantean las ecuaciones de equilibrio de cada nudo en función de las incógnitas $\theta_B$ y $\theta_C$. Estas ecuaciones, al igual que en los ejemplos anteriores, indican que la suma de momentos alrededor de cada apoyo es igual a cero. Resolviendo el sistema de dos ecuaciones simultáneas se obtienen los valores de las rotaciones $\theta_B$ y $\theta_C$ que deben introducirse para restaurar el equilibrio. Nótese que ahora las rotaciones quedan en radianes y ya no están en función de *EI*.

En el paso *e* se han calculado los momentos correctivos multiplicando los momentos indicados en el paso *c* por los valores de las rotaciones $\theta_B$ y $\theta_C$.

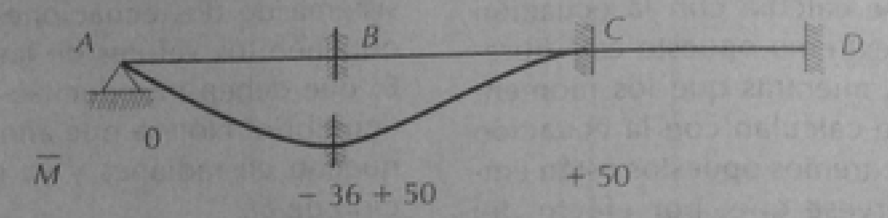
Por último, en el paso *f* se han calculado los momentos finales sumando los momentos de empotramiento perfecto calculados en el paso *a* con los momentos correctivos calculados en el paso *e*. Es importante observar que ahora los momentos quedan en función del parámetro *EI*. Para tener los valores de estos momentos en términos absolutos debe sustituirse en las expresiones del paso *f* el valor de *EI*. Como el asentamiento $\Delta$ y los claros $\ell$ se han expresado en cm, el valor de *EI* debe expresarse en ton-cm² o en kg-cm² para tener los momentos finales en ton-cm o en kg-cm, respectivamente. El lector puede ver en forma intuitiva que los momentos debidos a asentamientos de los apoyos dependen del valor de *EI*, o sea de la rigidez de la viga. Mientras más rígida sea la viga, mayores serán los momentos.

## EJEMPLO 5.3. VIGA CON ASENTAMIENTO EN UN APOYO



**EJEMPLO 5.3 *(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento de una viga con continuidad geométrica:

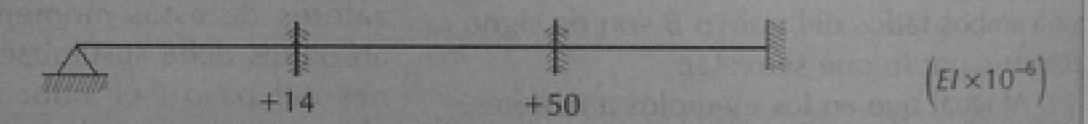



$$\overline{M}_{BA} = \frac{3EI\Delta}{\ell^2_{AB}} = -EI\left(\frac{3\times 3}{500^2}\right) = -\left(EI\times 10^{-6}\right)(36)$$

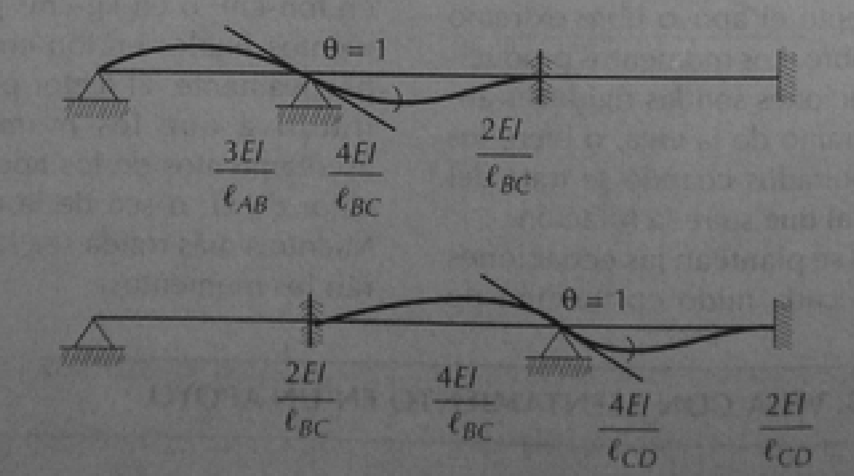
$$\overline{M}_{BC} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2_{BC}} = EI\left(\frac{6\times 3}{600^2}\right) = +\left(EI\times 10^{-6}\right)(50)$$

$$\overline{M}_{CB} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2_{BC}} = EI\left(\frac{6\times 3}{600^2}\right) = +\left(EI\times 10^{-6}\right)(50)$$

Paso *b*) Cálculo de los momentos de desequilibrio:




Paso *c*) Imposición de rotaciones unitarias:




Paso *d*) Cálculo de rotaciones reales:

$$(+14)\left(EI\times 10^{-6}\right) + \left(\frac{3EI}{500} + \frac{4EI}{600}\right)\theta_B + \left(\frac{2EI}{600}\right)\theta_C = 0$$

$$(+50)\left(EI\times 10^{-6}\right) + \left(\frac{2EI}{600}\right)\theta_B + \left(\frac{4EI}{600} + \frac{4EI}{500}\right)\theta_C = 0$$

**EJEMPLO 5.3 (continuación)**

Eliminando $EI$ y simplificando:

$$+14+12667\,\theta_B+3333\,\theta_C=0$$

$$+50+3333\,\theta_B+14667\,\theta_C=0$$

$$\theta_B=-221\times10^{-6},\quad \theta_C=-3359\times10^{-6}$$

Paso e) Cálculo de los momentos correctivos:

$$m_{BA}=\frac{3EI}{\ell_{BA}}\theta_B=-\frac{3\times221}{500}EI\ \times10^{-6}=-1.33\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$m_{BC}=\frac{4EI}{\ell_{BC}}\theta_B+\frac{2EI}{\ell_{BC}}\theta_C=\left(-\frac{4\times221}{600}-\frac{2\times3359}{600}\right)EI\ \times10^{-6}=-12.67\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$m_{CB}=\frac{2EI}{\ell_{BC}}\theta_B+\frac{4EI}{\ell_{BC}}\theta_C=\left(-\frac{2\times221}{600}-\frac{4\times3359}{600}\right)EI\ \times10^{-6}=-23.13\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$m_{CD}=\frac{4EI}{\ell_{CD}}\theta_C=-\frac{4\times3359}{500}EI\ \times10^{-6}=-26.87\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$m_{DC}=\frac{2EI}{\ell_{CD}}\theta_C=-\frac{2\times3359}{500}EI\ \times10^{-6}=-13.44\left(EI\times10^{-6}\right)$$

Paso f) Cálculo de momentos finales:

$$M_{BA}=-36\left(EI\times10^{-6}\right)-1.33\left(EI\times10^{-6}\right)=-37.33\left(EI\times10^{-6}\right)$$

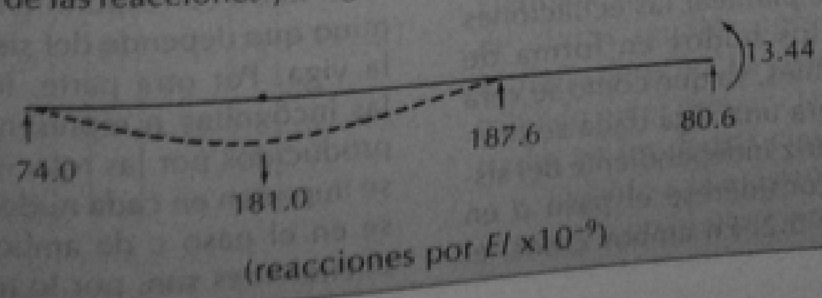
$$M_{BC}=+50\left(EI\times10^{-6}\right)-12.67\left(EI\times10^{-6}\right)=+37.33\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$M_{CB}=+50\left(EI\times10^{-6}\right)-23.13\left(EI\times10^{-6}\right)=+26.87\left(EI\times10^{-6}\right)$$

$$M_{CD}=0-26.87\left(EI\times10^{-6}\right)=-26.87\left(EI\times10^{-6}\right)$$

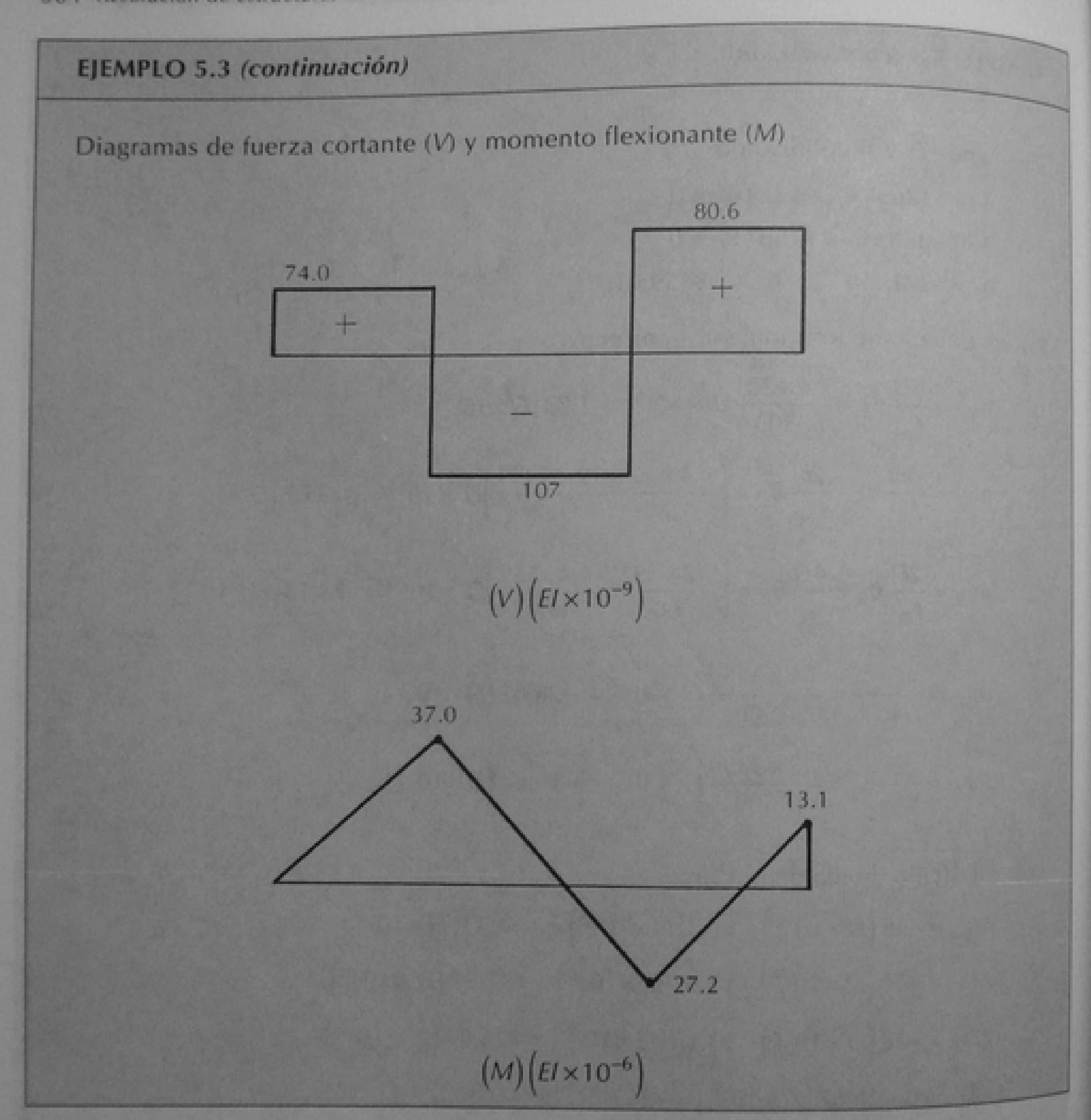
$$M_{DC}=0-13.44\left(EI\times10^{-6}\right)=-13.44\left(EI\times10^{-6}\right)$$

Paso g) Cálculo de las reacciones y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



**EJEMPLO 5.3** ***(continuación)***

Diagramas de fuerza cortante (*V*) y momento flexionante (*M*)




### *5.5.3 Planteamiento matricial para vigas*

Al igual que en el método de las fuerzas, resulta conveniente plantear las ecuaciones de equilibrio de los nudos en forma de ecuaciones matriciales, ya que como se verá a continuación, para una viga dada se puede obtener una matriz independiente del sistema de cargas. Considérese el paso *d* en los ejemplos 5.1 y 5.2. En ambos casos, el primer término de cada ecuación del sistema representa el momento de desequilibrio en el nudo correspondiente, o sea, es un término que depende del sistema de cargas en la viga. Por otra parte, los coeficientes de las incógnitas $\theta$ representan los momentos producidos por las rotaciones unitarias que se imponen en cada nudo, como puede verse en el paso c de ambos ejemplos; estos coeficientes son, por lo tanto, las rigideces

angulares de los miembros que concurren en el nudo al que se impone la rotación, o bien, el momento transportado a los extremos opuestos a dicho nudo. Estos coeficientes dependen exclusivamente de las características de las vigas. Por lo tanto, sistemas de ecuaciones como los del paso *d* de los ejemplos pueden escribirse en la siguiente forma generalizada:

$$
\begin{aligned}
P_1 + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + \ldots + k_{1n}\theta_n &= 0 \\
P_2 + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + \ldots + k_{2n}\theta_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n + k_{n1}\theta_1 + k_{n2}\theta_2 + \ldots + k_{nn}\theta_n &= 0
\end{aligned}
\qquad (5.21)
$$

Los términos $P_i$ representan los momentos de desequilibrio en los nudos *i*. Los términos $k_{ii}$ representan la suma de las rigideces angulares de los miembros que concurren en el nudo *i*; cuando los extremos opuestos están empotrados, estas rigideces valen $4EI/\ell$ y cuando están libremente apoyados, valen $3EI/\ell$. Los términos $k_{ij}$ representan los momentos transportados a los nudos *j* cuando se impone una rotación unitaria en el nudo *i*. En miembros de sección prismática, el momento transportado al extremo *j*, cuando se genera un momento en el extremo *i*, es igual al momento transportado al extremo *i* cuando se genera un momento en el extremo *j*; esto puede verse en el paso *c* del ejemplo 5.5. Por lo tanto, $k_{ij} = k_{ji}$ y la matriz es simétrica. Todos los términos *k* se denominan *coeficientes de rigidez*. Y los términos $\theta_i$ representan las rotaciones en el nudo *i*. En notación matricial, las ecuaciones 5.21 pueden escribirse en la siguiente forma:

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\
k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\theta_1 \\ \theta_2 \\ . \\ . \\ \theta_n
\end{Bmatrix}
= -
\begin{Bmatrix}
P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ P_n
\end{Bmatrix}
\qquad (5.22)
$$

o en forma compacta:

$$[k]\{\theta\} = -\{P\} \qquad (5.23)$$

La matriz *k* siempre es cuadrada, de grado *n* X *n*, y se denomina *matriz de rigideces*. El grado *n* es igual al número de rotaciones desconocidas en la viga original, o sea, igual al número de rotaciones unitarias que es necesario imponer en el paso *c*. Además, por el Teorema de Maxwell, resulta una matriz simétrica. La matriz {θ} es una matriz columna de grado *n* X 1, al igual que la matriz {*P*}. Los términos $P_i$ son los momentos de desequilibrio en los nudos.

Los valores de las incógnitas $\theta_i$ pueden obtenerse resolviendo la ecuación matricial 5.23, de tal manera que

$$\{\theta\} = -[k]^{-1}\,\{P\} \qquad (5.24)$$

donde $[k]^{-1}$ es la matriz inversa de $[k]$.

El planteamiento matricial resulta especialmente conveniente en el método de las deformaciones porque los coeficientes de rigidez *k* son más fáciles de calcular que los coeficientes de flexibilidad δ en el método de las fuerzas. Se obtienen directamente de las rigideces angulares y de los momentos transportados, sin necesidad de calcular las deformaciones de las vigas. Por esta razón, la mayoría de los programas de computadora que se usan actualmente para análisis estructural se basan en el cálculo de la matriz de rigideces.

En el siguiente ejemplo se ilustra este planteamiento matricial.

**Ejemplo 5.4** Se resuelve una viga continua de claros iguales con un voladizo en el extremo derecho. La viga tiene una carga distribuida en el primer claro y cargas concentradas en los demás claros.

Debido a la existencia del voladizo, es necesario en el paso *a* empotrar también el

apoyo *E*, ya que el momento $M_{ED}$ no es nulo. Los momentos de empotramiento perfecto se calculan de la manera usual y el momento en el voladizo es igual a $P\ell$.

Los momentos de desequilibrio del paso *b* se calculan igual que en los otros ejemplos.

El paso *c* no es estrictamente necesario en el planteamiento matricial, ya que pueden obtenerse directamente los coeficientes de rigidez $k_{ij}$, pero se ha incluido para mayor claridad en la exposición. Obsérvese que la rigidez del voladizo $k_{EF}$ es igual a 0, ya que para hacer girar una viga apoyada en un extremo y libre en el otro, no se requiere ningún momento, como se ve en la figura 5.8.

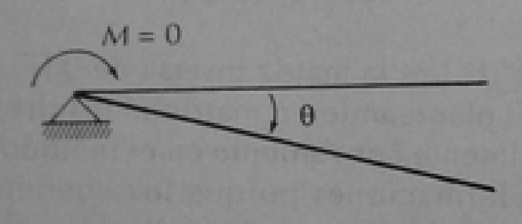



**Figura 5.8.** Rigidez de un voladizo

En el paso *d* se establecen las matrices de la ecuación 5.22. En la matriz [*k*] se puede factorizar el término $EI/\ell$ ya que los claros son iguales y el valor de *EI* es constante. Para determinar los coeficientes $k_{ij}$ se han numerado en la figura de los pasos *b* y *c* los apoyos en que aparecen las incógnitas; son 4 apoyos. Para establecer cualquier coeficiente, debe recordarse que $k_{ij}$ es la suma de las rigideces angulares de los miembros que concurren en el nudo *i* cuando el nudo *j* experimenta una rotación unitaria. Por ejemplo, con referencia a las figuras del paso *c*, $k_{22}$ es la suma de las rigideces de los miembros *CB* y *CD*, que son los que concurren en el nudo 2, cuando este mismo nudo sufre una rotación unitaria, que es el caso de la segunda figura del paso *c*; por lo tanto $k_{22}$ es la suma de $4EI/5$, del miembro *CB* y $4EI/5$ del miembro *CD*; por eso $k_{22}$ en la matriz [*k*] del paso *d* vale 8 (*EI*/5 se ha factorizado). De la misma manera, $k_{23}$, que es la rigidez de los miembros que concurren en el nudo 2 cuando el nudo 3 es el que gira, es la suma de las rigideces de los miembros *CB* y *CD* en la tercera figura del paso *c*; su valor es entonces $2EI/5$; por eso en la intersección del segundo renglón y la tercera columna de la matriz [*k*] aparece un 2. Como puede verse, la matriz de rigideces es muy sencilla de formular, ya que las rigideces de los miembros son siempre $4EI/L$, si el extremo opuesto está empotrado, o $3EI/L$, si el extremo opuesto está libremente apoyado. Por eso se decía que no era necesario dibujar las figuras en el paso *c*. Además, la matriz [*k*] siempre resulta con muchos términos nulos, ya que la rotación de un nudo sólo afecta a los miembros que concurren en él. Esto hace más fáciles las operaciones matriciales. Conviene calcular todos los términos de la matriz y después verificar que se cumpla la condición $k_{ij} = k_{ji}$, o sea, que sea simétrica, como una comprobación de los cálculos.

Después se ha planteado la matriz {*P*} que son simplemente los momentos de desequilibrio, obtenidos en el paso *b*, con signo cambiado. La notación {......} indica que es una matriz columna.

A continuación se han obtenido los valores de la matriz {θ} con la ecuación 5.24. La inversión de la matriz [*k*] y la multiplicación de $[k]^{-1}$ con {*P*} se hicieron con la hoja de cálculo Excel, pero pueden efectuarse estos cálculos a mano o con cualquier programa de computadora que haga operaciones con matrices. Obsérvese que al invertir la matriz [*k*] también se invierte el término $EI/\ell$. Por esta razón los valores de θ quedan en función de $\ell/EI$.

En el paso *e* se calculan los momentos correctivos *m*. Este cálculo puede hacerse como en los ejemplos anteriores, usando las ecuaciones 5.19 y 5.20, o bien, puede plan-

plantearse también en forma matricial como se muestra en el ejemplo. Si se escriben primero las matrices columna $\{m\}$ y $\{\theta\}$, la matriz intermedia puede obtenerse calculando sus términos con la ecuación 5.20. Por ejemplo, el momento $m_{BC}$, de acuerdo con esa ecuación, sería $4EI/L_{BC}$, que es $k_{BC}$, multiplicado por $\theta_B$, más $2EI/L_{BC}$, que es $0.5k_{BC}$, multiplicado por $\theta_C$. Por eso, los dos primeros términos del tercer renglón, que corresponde a $m_{BC}$, son $k_{BC}$ y $0.5k_{BC}$, que se multiplican por $\theta_B$ y $\theta_C$, respectivamente, mientras que los otros términos del renglón son nulos ya que se multiplican por $\theta_D$ y $\theta_E$, respectivamente. Así pueden obtenerse todos los términos de esta matriz, para calcular después los momentos correctivos multiplicando dicha matriz por la matriz $\{\theta\}$.

Finalmente en el paso *f* se calculan los momentos finales sumando los de empotramiento perfecto con los momentos correctivos. Están en ton-m porque son las unidades que se emplearon a lo largo del ejemplo.

## EJEMPLO 5.4. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON EL PLANTEAMIENTO MATRICIAL

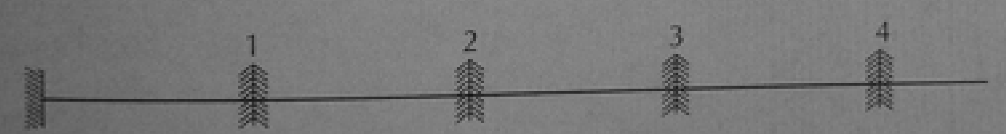
DATOS:

5 ton

*A* 8 ton/m *B* 20 ton *C* 30 ton *D* 15 ton *E* 5 ton *F*

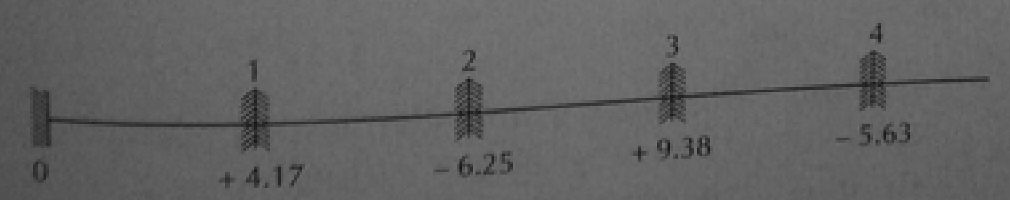
5 m 5 m 5 m 5 m 3 m

Paso *a*) Planteamiento de una viga con continuidad geométrica.



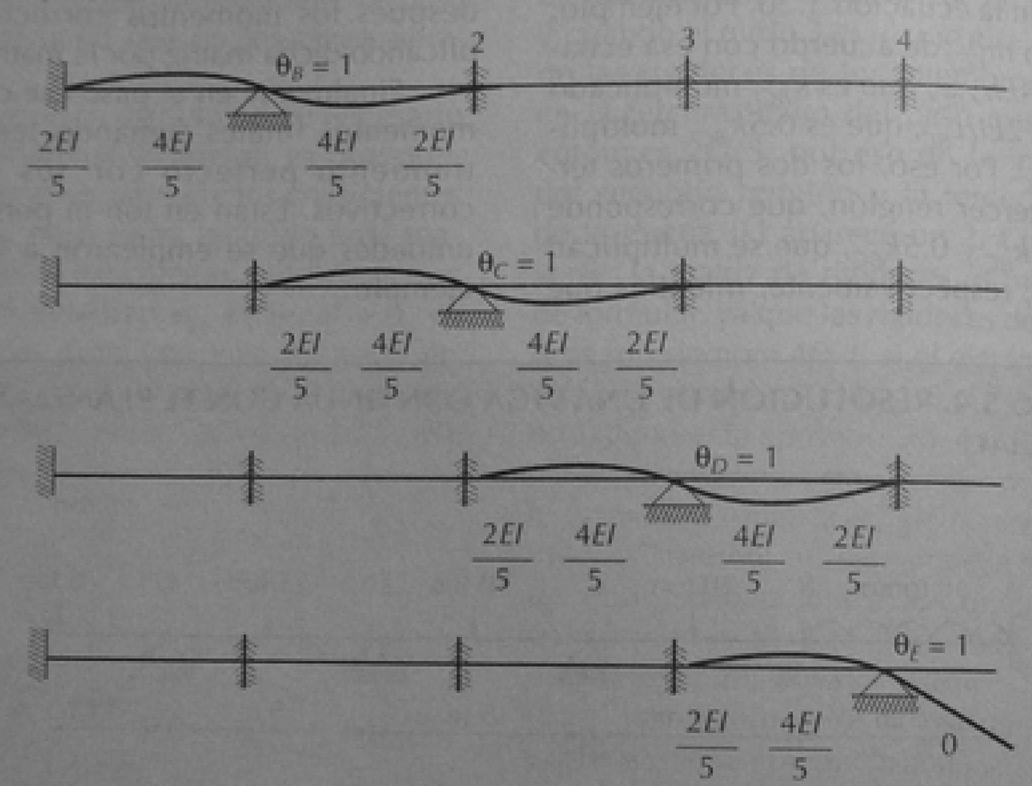

$\overline{M}$ −16.67 + 16.67 − 12.50 + 12.50 − 18.75 + 18.75 − 9.37 + 9.37 − 15.00

Paso *b*) Cálculo de los momentos de desequilibrio.



**EJEMPLO 5.4 *(continuación)***

Paso *c*) Imposición de rotaciones unitarias:




Paso *d*) Cálculo de las rotaciones reales:

$$[k]=\frac{EI}{5}\begin{bmatrix}8 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\{P\}=\{+4.17,-6.25,+9.38,-5.63\}$$

$$\{\theta\}=\frac{5}{EI}\begin{bmatrix}8 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-4.17\\ +6.25\\ -9.38\\ +5.63\end{Bmatrix} \text{ (ecuación 5.24)}$$

$$\{\theta\}=\frac{5}{EI}\begin{bmatrix}0.134020 & -0.036082 & 0.010309 & -0.005154\\ -0.036082 & 0.144330 & -0.041237 & -0.020618\\ 0.010309 & -0.041237 & 0.154639 & -0.077319\\ -0.005154 & 0.020618 & -0.077319 & 0.288660\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-4.17\\ +6.25\\ -9.38\\ +5.63\end{Bmatrix}$$

**EJEMPLO 5.4 *(continuación)***

$$\{\theta\}=\frac{5}{EI}\begin{Bmatrix}-0.910103\\+1.555412\\-2.186546\\+2.500773\end{Bmatrix}$$

Paso e) Cálculo de los momentos correctivos:

$$\begin{Bmatrix}m_{AB}\\m_{BA}\\m_{BC}\\m_{CB}\\m_{CD}\\m_{DC}\\m_{DE}\\m_{ED}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5k_{AB}&0&0&0\\k_{BA}&0&0&0\\k_{BC}&0.5k_{CB}&0&0\\0.5k_{BC}&k_{CB}&0&0\\0&k_{CD}&0.5k_{DC}&0\\0&0.5k_{DC}&k_{DC}&0\\0&0&k_{DE}&0.5k_{DE}\\0&0&0.5k_{DE}&k_{ED}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B\\\theta_C\\\theta_D\\\theta_E\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}m_{AB}\\m_{BA}\\m_{BC}\\m_{CB}\\m_{CD}\\m_{DC}\\m_{DE}\\m_{ED}\end{Bmatrix}=\frac{EI}{5}\cdot\frac{5}{EI}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\4&0&0&0\\4&2&0&0\\2&4&0&0\\0&4&2&0\\0&2&4&0\\0&0&4&2\\0&0&2&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.910103\\+1.555412\\-2.186546\\+2.500773\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}m_{AB}\\m_{BA}\\m_{BC}\\m_{CB}\\m_{CD}\\m_{DC}\\m_{DE}\\m_{ED}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1.8202\\-3.6404\\-0.5296\\+4.4014\\+1.8485\\-5.6354\\-3.7446\\+5.6300\end{Bmatrix}$$

**EJEMPLO 5.4 *(continuación)***

Paso *f*) Cálculo de momentos finales:

$$M_{AB} = -16.67 - 1.8202 = -18.4902 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = +16.67 - 3.6404 = +13.0296 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -12.50 - 0.5296 = -13.0296 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = +12.50 + 4.4014 = +16.9014 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -18.75 + 1.8485 = -16.9015 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

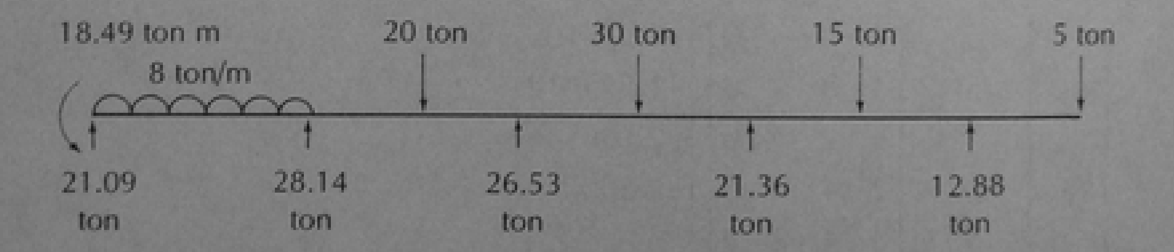
$$M_{DC} = +18.75 - 5.6354 = +13.1146 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{DE} = -9.37 - 3.7446 = -13.1146 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

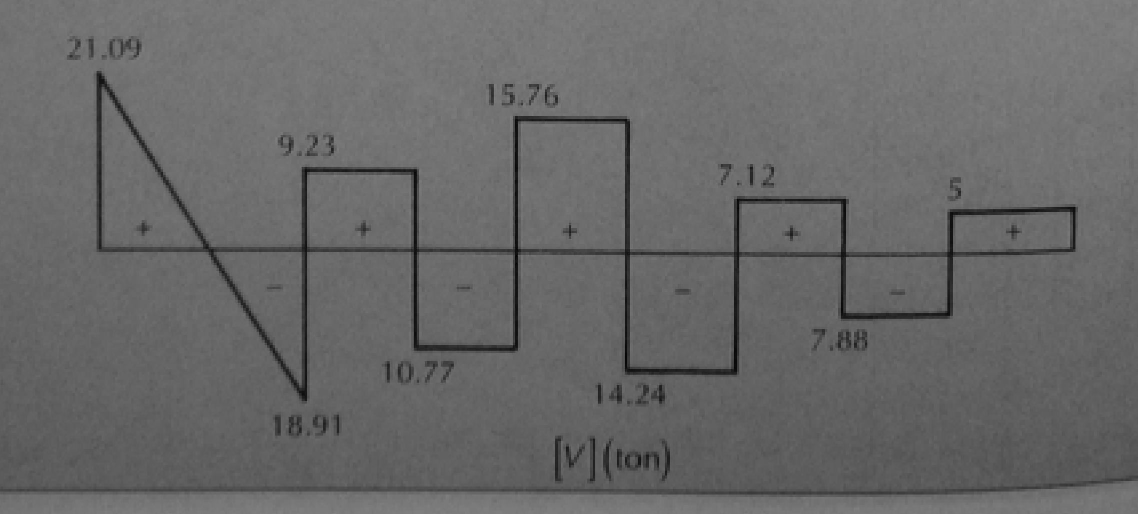
$$M_{ED} = +9.37 + 5.63 = +15.00 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

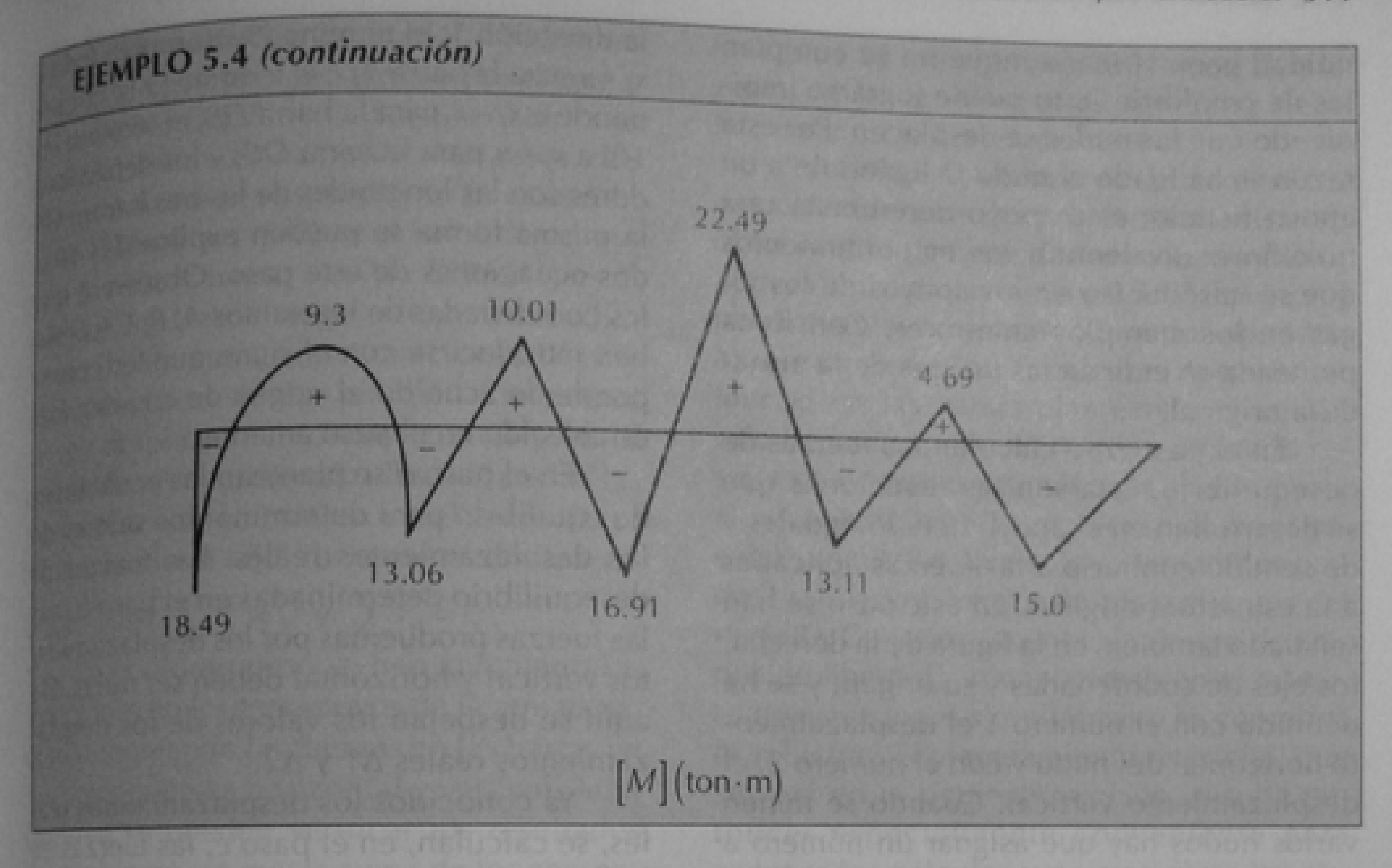
$$M_{EF} = -15 \text{ton}\cdot\text{m}$$

Cálculo de las reacciones:




Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.






## 5.6 Método de las deformaciones para armaduras

### 5.6.1 Consideraciones generales

Los nudos de una armadura sufren desplazamientos lineales al acortarse o alargarse sus miembros, ya que éstos trabajan exclusivamente a cargas axiales. Por lo tanto, al plantear una estructura con continuidad geométrica deben restringirse los desplazamientos de los nudos. Cada nudo, excepto los que coinciden con apoyos, tiene la posibilidad de tener un desplazamiento horizontal y uno vertical, o bien un desplazamiento en una dirección cualquiera. De cualquier manera, se tienen dos grados de indeterminación cinemática por nudo, así que el número de ecuaciones simultáneas que hay que resolver es generalmente de $2n$, siendo $n$ el número de nudos de la armadura. Esto trae como consecuencia que el método de las fuerzas sea casi siempre más apropiado para resolver armaduras que el método de las deformaciones. Sin embargo, para ciertos casos en los que el número de nudos es pequeño, este último resulta más conveniente; especialmente cuando se plantea en forma matricial y se dispone de programas de computadora para inversión de matrices su empleo llega a ser más sencillo. En el siguiente ejemplo se ilustra su aplicación usando una armadura muy sencilla que sólo tiene un nudo fuera de los apoyos.

**Ejemplo 5.5** La estructura de este ejemplo consiste en tres barras que sólo resisten carga axial y que concurren en un nudo al que se aplica una fuerza horizontal y una vertical. El trabajo es el de una armadura precisamente porque los miembros trabajan a carga axial y están articulados en sus extremos. Las longitudes de los miembros se han calculado a partir de las cotas de cada nudo.

De acuerdo con el planteamiento general del método de la deformaciones, en el paso a se debe establecer una estructura en la que se cumplan las condiciones de conti-

nuidad geométrica, aunque no se cumplan las de equilibrio. Esto puede lograrse impidiendo que los nudos se desplacen. Por esta razón se ha fijado el nudo *D* ligándolo a un apoyo ficticio; este apoyo desempeña una función equivalente a los empotramientos que se introducían en los apoyos de las vigas en los ejemplos anteriores. Con línea punteada se indican las fuerzas de la armadura original.

En el paso *b* se calculan las fuerzas de desequilibrio. Esta son las reacciones que se desarrollan en el apoyo ficticio, iguales y de sentido contrario a las fuerzas aplicadas a la estructura original. En este paso se han señalado también, en la figura de la derecha, los ejes de coordenadas y su origen, y se ha definido con el número 1 el desplazamiento horizontal del nudo y con el número 2, el desplazamiento vertical. Cuando se tienen varios nudos hay que asignar un número a cada desplazamiento de cada nudo.

En el paso siguiente se impone un desplazamiento horizontal y uno vertical, ambos unitarios, al nudo *D* de tal manera que pasa a ocupar la posición *D´*. Obsérvese que estos desplazamientos tienen el sentido positivo de los ejes de coordenadas. En este mismo paso se han calculado las fuerzas que se inducen en las barras por los desplazamientos unitarios, utilizando las ecuaciones 5.16 deducidas en la sección 5.4. De acuerdo con la notación empleada al deducir estas ecuaciones, $k_{xx}$ es la fuerza en dirección $x$ cuando el nudo se desplaza en la misma dirección; $k_{yy}$ es la fuerza en dirección $y$ cuando el nudo se desplaza en la misma dirección, y $k_{xy}$ es la fuerza en dirección $x$ cuando el nudo se desplaza en dirección $y$. Considerando entonces esta notación, y que al nudo que se desplaza se le ha denominado nudo *j* en las ecuaciones 5.16, la primera ecuación del paso *c* se explicaría de la siguiente forma: $k_{11}$ es la fuerza en el nudo *D*, en la dirección 1 del paso anterior, cuando este mismo nudo se desplaza también en la dirección 1; el término (3-0) corresponde a $x_j - x_i$ para la barra *AD*; el término (3-5) corresponde a $x_j - x_i$ para la barra *DB*; el término (3-10) a $x_j - x_i$ para la barra *DC*; y los denominadores son las longitudes de las tres barras. De la misma forma se pueden explicar las otras dos ecuaciones de este paso. Obsérvese que las coordenadas de los puntos *A, B, C* y *D* deben introducirse con el signo que les corresponde de acuerdo al origen de coordenadas establecido en el paso anterior.

En el paso *d* se plantean las ecuaciones de equilibrio para determinar los valores de los desplazamientos reales. Las fuerzas de desequilibrio determinadas en el paso *b* más las fuerzas producidas por los desplazamientos vertical y horizontal deben ser nulas. De aquí se despejan los valores de los desplazamientos reales Δ1 y Δ2.

Ya conocidos los desplazamientos reales, se calculan, en el paso *e*, las fuerzas en las barras de la armadura. Esto puede hacerse a partir de las ecuaciones 4 y 5 de la figura 5.5, observando que para un desplazamiento horizontal Δx, figura 5.5*a*:

$$\Delta\ell = \Delta x \quad \operatorname{sen}\alpha = \Delta x \quad \frac{x_b - x_a}{\ell}$$

y por lo tanto la ecuación 4 se transforma en

$$F = AE\Delta x \frac{x_b - x_a}{\ell^2} \qquad (5.25)$$

En forma análoga, para un desplazamiento vertical Δy, figura 5.5*b*, la ecuación 11 se transforma en:

$$F = AE\Delta y \frac{y_b - y_a}{\ell^2} \qquad (5.26)$$

De acuerdo con lo anterior, la primera ecuación del paso *e* se explica de la siguiente manera: el término $5.83^2$ es la longitud de la barra *DA* elevada al cuadrado que se ha

factorizado como denominador. El término (3-0) es el valor de $x_b - x_a$ correspondiente a los extremos *D* y *A* de la barra, y el término 89.0310/*AE* es el valor de $\Delta x$; estos dos últimos valores se sustituyen en la ecuación 5.25. El término (–5-0) es el valor de $y_b - y_a$ para la misma barra, y (–73. 2296/*AE*) es el valor de $\Delta y$. Desde luego que para cada barra se deben sumar las ecuaciones 5.25 y 5.26 ya que se suman también los efectos de los desplazamientos horizontal y vertical. Después de obtenidas las fuerzas en las tres barras que concurren en el nudo *D*, se ha verificado el equilibrio del nudo con las ecuaciones $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

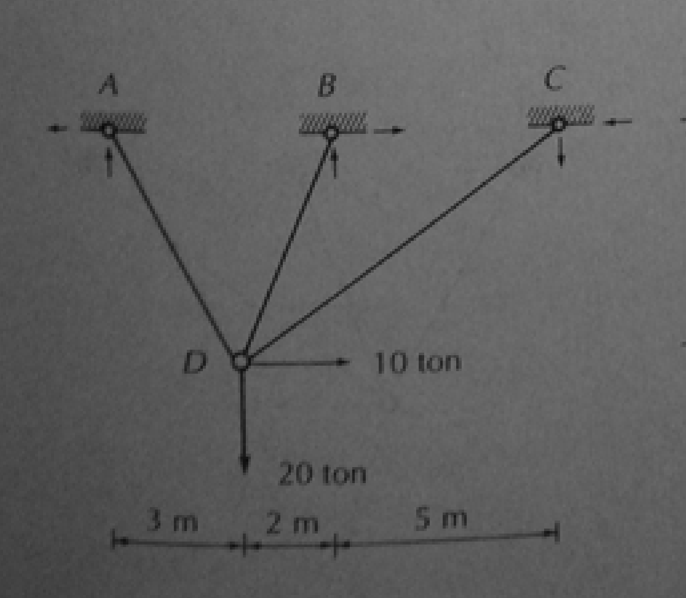
En el último paso se han calculado las reacciones en los tres apoyos de la armadura, descomponiendo las fuerzas en las barras en sus componentes horizontal y vertical. Aquí también se pueden verificar los resultados del problema, ya que la suma de las componentes horizontales debe equilibrar a la fuerza de 10 ton aplicada en el nudo *D*, y la suma de las componentes verticales debe hacerlo con la fuerza de 20 ton.

Una manera alternativa de resolver los dos últimos pasos del problema consiste en obtener directamente las reacciones en los apoyos con las ecuaciones 5.17, que proporcionan las fuerzas en los nudos opuestos al que se desplaza, y calcular después las fuerzas en las barras planteando el equilibrio de cada apoyo. El método utilizado resulta en operaciones más sencillas.

La solución del problema anterior resultó sencilla porque sólo se tenían dos grados de libertad: los dos desplazamientos del nudo *D*. Cuando aumenta el número de grados de libertad, aumenta también el número de ecuaciones simultáneas y se complica la solución. El planteamiento matricial, que se verá en la siguiente sección, resulta entonces especialmente conveniente para ordenar los cálculos y para resolver los sistemas de ecuaciones de grado elevado.

**EJEMPLO 5.5. RESOLUCIÓN DE UNA ARMADURA POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS**

DATOS:



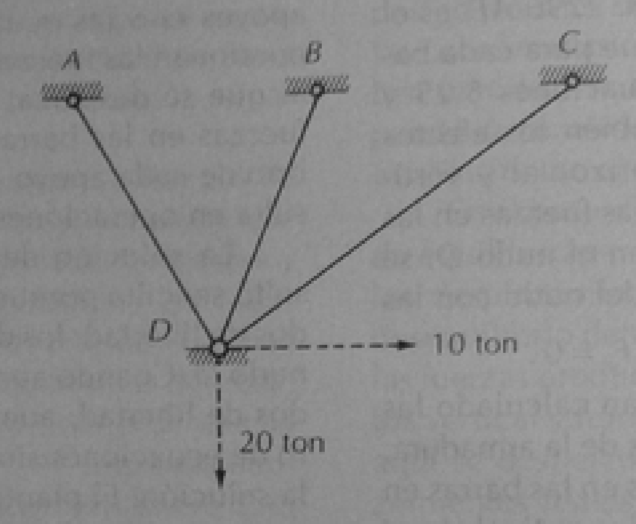

$$\ell_{AD} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5.83$$

$$\ell_{BD} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5.38$$

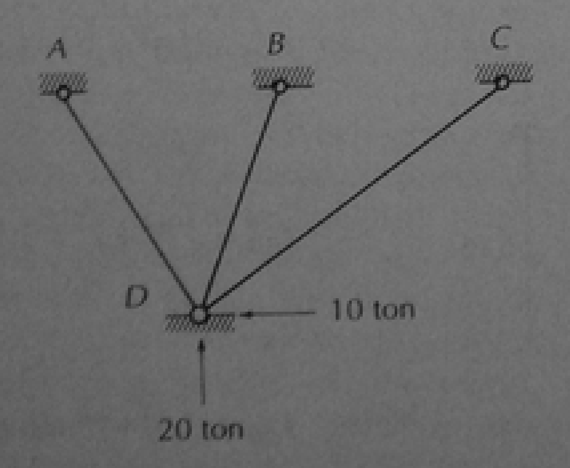
$$\ell_{CD} = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8.60$$

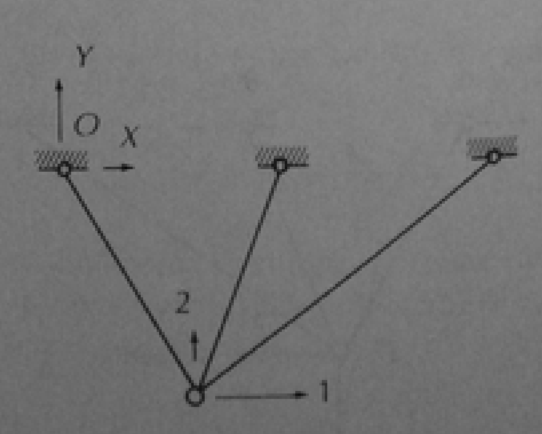
**EJEMPLO 5.5 *(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento de una estructura con continuidad geométrica:



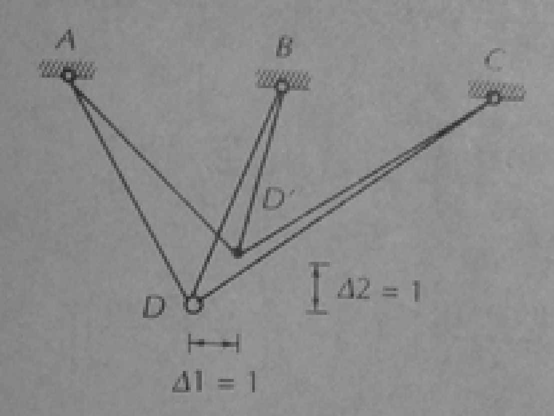

Paso *b*) Cálculo de las fuerzas de desequilibrio.



**EJEMPLO 5.5 *(continuación)***

Paso *c*) Imposición de desplazamientos unitarios.




$$k_{11} = AE\left[\frac{(3-0)^2}{5.83^3}+\frac{(3-5)^2}{5.38^3}+\frac{(3-10)^2}{8.60^3}\right] = AE\left[0.0454+0.0257+0.0770\right] = 0.1481AE$$

$$k_{22} = AE\left[\frac{(-5-0)^2}{5.83^3}+\frac{(-5-0)^2}{5.38^3}+\frac{(-5-0)^2}{8.60^3}\right] = AE\left[0.1262+0.1605+0.0393\right] = 0.3260AE$$

$$k_{12} = k_{21} = AE\left[\frac{(3-0)(-5-0)}{5.83^3}+\frac{(3-5)(-5-0)}{5.38^3}+\frac{(3-10)(-5-0)}{8.60^3}\right] =$$

$$= AE\left[-0.0757+0.0642+0.0550\right] = 0.0435AE$$

Paso *d*) Cálculo de desplazamientos reales.

$$-10+0.1481AE\,\Delta 1+0.0435AE\,\Delta 2=0$$

$$+20+0.0435AE\,\Delta 1+0.3260AE\,\Delta 2=0$$

Resolviendo el sistema:

$$\Delta_1 = \frac{89.0310}{AE}, \quad \Delta_2 = \frac{-73.2296}{AE}$$

**EJEMPLO 5.5 *(continuación)***

Paso *e*) Cálculo de las fuerzas de las barras.

$$F_{DA}=\frac{AE}{5.83^2}\left[\frac{(3-0)(89.0310)}{AE}+(-5-0)\left(-\frac{73.2296}{AE}\right)\right]=18.6308 \text{ ton}$$

$$F_{DB}=\frac{AE}{5.38^2}\left[(3-5)\left(\frac{89.0310}{AE}\right)+(-5-0)\left(-\frac{73.2296}{AE}\right)\right]=6.4981$$

$$F_{DC}=\frac{AE}{8.60^2}\left[(3-10)\left(\frac{89.0310}{AE}\right)+(-5-0)\left(-\frac{73.2296}{AE}\right)\right]=-3.4757$$

Comprobación del equilibrio:

$$\sum F_x=+10-18.6308\times\frac{3}{5.83}+6.4981\times\frac{2}{5.38}-3.4757\times\frac{7}{8.60}=-0.0004$$

$$\sum F_y=-20+18.6308\times\frac{5}{5.83}+6.4981\times\frac{5}{5.38}-3.4757\times\frac{5}{8.60}=-0.003$$

Paso *f*) Cálculo de las reacciones en los nudos:

$$F_{AX}=-18.6308\times\frac{3}{5.83}=-9.5870$$

$$F_{AY}=18.6308\times\frac{5}{5.83}=15.9784$$

$$F_{BX}=6.4981\times\frac{2}{5.38}=2.4156$$

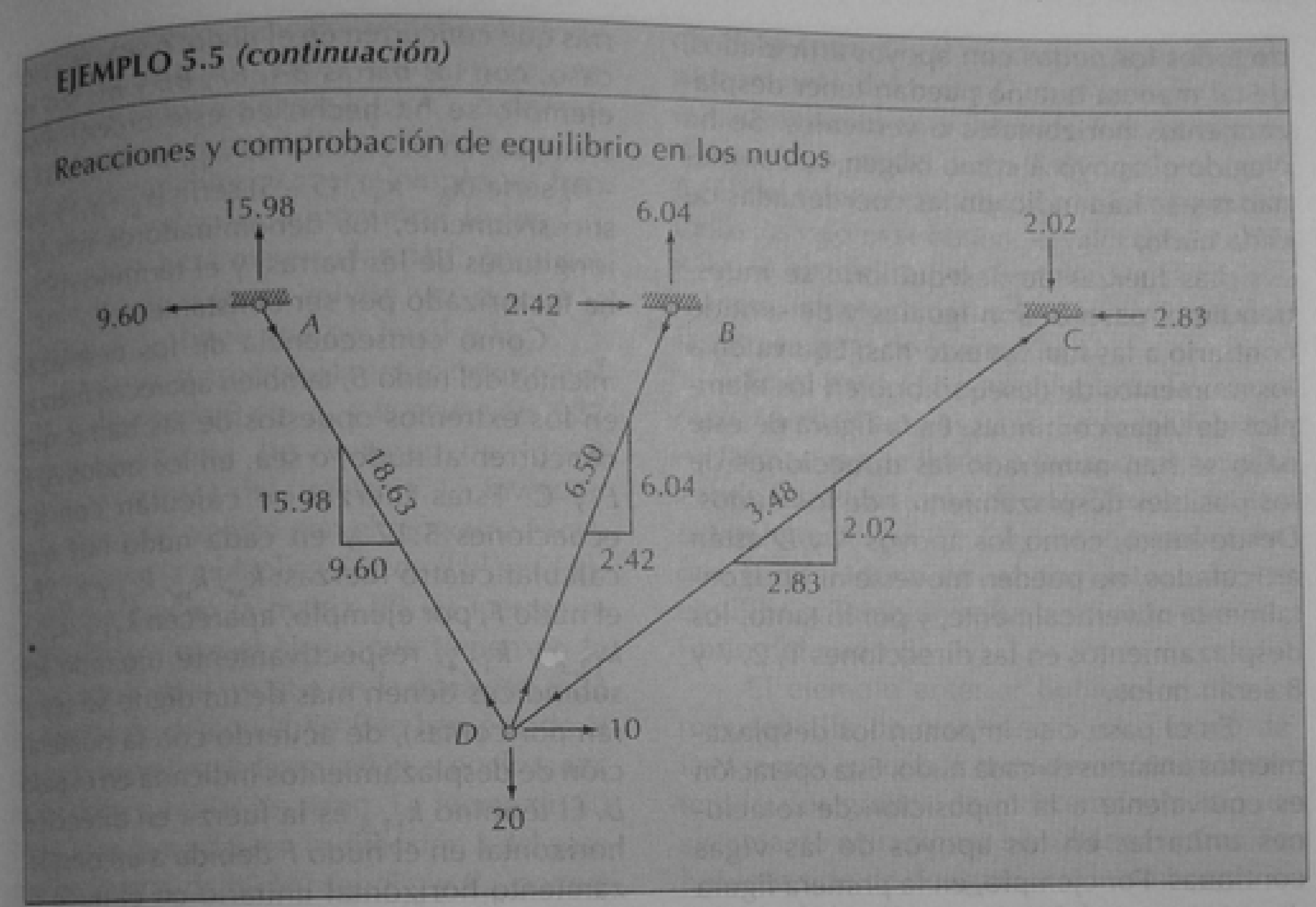
$$F_{BY}=6.4981\times\frac{5}{5.38}=6.0391$$

$$F_{DX}=-3.4757\times\frac{7}{8.60}=-2.8290$$

$$F_{DY}=-3.4757\times\frac{5}{8.60}=-2.0207$$

EJEMPLO 5.5 *(continuación)*

Reacciones y comprobación de equilibrio en los nudos




### 5.6.2 *Planteamiento matricial para armaduras*

Los principios básicos son los mismos: se plantea la ecuación matricial 5.23, en la cual, para el caso de armaduras, los términos tienen los siguientes significados. La matriz de rigideces [*k*] está constituida por términos $k_{ij}$ que representan las fuerzas en un extremo de una barra, en dirección *i*, cuando el mismo extremo o el extremo de otra barra cualquiera de la armadura tiene un desplazamiento unitario en dirección *j*. Las fuerzas correspondientes se calculan con las ecuaciones 5.16, si el extremo en el que se calculan las fuerzas es el mismo que se desplaza, o con las ecuaciones 5.17 si es un extremo opuesto al que se desplaza. La matriz {θ} representa los desplazamientos reales que tienen los nudos de la armadura; son las incógnitas del problema; como son desplazamientos lineales, suele representarse como la matriz {Δ}. La matriz {*P*} representa las fuerzas que se introducen en los nudos para evitar sus desplazamientos en el paso *b* del método; son iguales y de sentido opuesto a las fuerzas externas que actúan en los nudos de la armadura. La resolución de la ecuación 5.23 se plantea para este caso como

$$\{\Delta\}=-[k]^{-1}\{P\} \qquad (5.27)$$

Como los términos de la matriz {*P*} son las fuerzas de desequilibrio, son también las fuerzas que actúan en la armadura con signo cambiado. En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del planteamiento matricial.

**Ejemplo 5.6** Se trata de resolver una armadura hiperestática, articulada en sus dos apoyos, sujeta a dos cargas verticales y una fuerza horizontal.

En el paso *a* se muestra la estructura con continuidad geométrica, que se logra fijan-

do todos los nudos con apoyos articulados, de tal manera que no puedan tener desplazamientos horizontales o verticales. Se ha elegido el apoyo *A* como origen de coordenadas y se han indicado las coordenadas de cada nudo.

Las fuerzas de desequilibrio se muestran en el paso *b*. Son iguales y de sentido contrario a las fuerzas externas. Equivalen a los momentos de desequilibrio en los ejemplos de vigas continuas. En la figura de este paso se han numerado las direcciones de los posibles desplazamientos de los nudos. Desde luego, como los apoyos *A* y *D* están articulados, no pueden moverse ni horizontalmente ni verticalmente, y por lo tanto, los desplazamientos en las direcciones 1, 2, 7 y 8 serán nulos.

En el paso *c* se imponen los desplazamientos unitarios en cada nudo. Esta operación es equivalente a la imposición de rotaciones unitarias en los apoyos de las vigas continuas. Por ejemplo, en la primera figura de este paso, se ha impuesto un desplazamiento horizontal unitario y otro vertical también unitario en el nudo *B*, manteniendo fijos todos los otros nudos. Como consecuencia de estos desplazamientos, aparecen fuerzas en los extremos de todas las barras que concurren en dicho nudo. En el propio nudo *B* aparecen las fuerzas $k_{33}$, $k_{34}$, $k_{43}$ y $k_{44}$. De acuerdo con la explicación de la sección 5.4 y de la figura 5.5, la primera es la fuerza que se origina en el nudo *B* en la dirección 3 debida a un desplazamiento unitario del nudo en la misma dirección; la segunda es la fuerza en la dirección 3 debida a un desplazamiento en la dirección 4; la tercera, que es igual a la segunda, es la fuerza en la dirección 4 por un desplazamiento en la dirección 3; y la última es la fuerza en la dirección 4 por un desplazamiento en la misma dirección. De acuerdo también con las explicaciones mencionadas, esta fuerzas se calculan con las ecuaciones 5.16; la sumatoria se hace con todas las barras que concurren en el nudo, o sea, en este caso, con las barras *BA*, *BF*, *BE* y *BC* (en el ejemplo se ha hecho en este orden). Por ejemplo, en el cálculo de $k_{33}$, el término (5 – 0) sería $(x_B - x_A)$, (5 – 5) sería $(x_B - x_F)$ y así sucesivamente; los denominadores son las longitudes de las barras; y el término *AE* se ha factorizado por ser constante.

Como consecuencia de los desplazamientos del nudo *B*, también aparecen fuerzas en los extremos opuestos de las barras que concurren al nudo, o sea, en los nudos *A*, *F*, *E* y *C*. Estas fuerzas se calculan con las ecuaciones 5.17 y en cada nudo hay que calcular cuatro fuerzas: $k_{xx}$, $k_{xy}$, $k_{yx}$ y $k_{yy}$. En el nudo *F*, por ejemplo, aparecen $k_{11,3}$, $k_{11,4}$, $k_{12,3}$ y $k_{12,4}$, respectivamente (cuando los subíndices tienen más de un dígito se separan por comas), de acuerdo con la numeración de desplazamientos indicada en el paso *b*. El término $k_{11,3}$ es la fuerza en dirección horizontal en el nudo *F* debida a un desplazamiento horizontal unitario en el nudo *B*, la fuerza $k_{11,4}$ es la fuerza en dirección horizontal en el nudo *F* debida a un desplazamiento vertical unitario en el nudo *B*, y así sucesivamente. Obsérvese que las fuerzas en el nudo *A* no se han calculado en el ejemplo, porque los desplazamientos, tanto vertical como horizontal, son nulos en dicho apoyo, y las fuerzas *k* se multiplican posteriormente por los desplazamientos de los nudos. Por lo tanto, no es necesario calcular todos los coeficientes de rigidez *k* que tengan como subíndices 1, 2, 7 y 8.

En las siguientes figuras del paso *c* se van imponiendo desplazamientos unitarios en cada uno de los otros nudos y se calculan las fuerzas que aparecen en el nudo en cuestión y en los extremos opuestos de las barras que concurren en el nudo. De esta manera se calculan, para el ejemplo, los 64 coeficientes de rigidez necesarios, ya que la armadura tiene 8 grados de libertad, 2 por nudo sin contar los apoyos que no se mueven, y la matriz resultante es de grado 8X8. Aunque el número

de coeficientes es elevado, se debe observar que muchos son iguales entre sí, ya sea porque en todos los casos $k_{xy} = k_{yx}$, o porque al ser simétrica la armadura, resultan iguales varios coeficientes. En el ejemplo se han calculado independientemente todos los coeficientes para mayor claridad, pero por simple inspección se puede ver que, por ejemplo, $k_{4,12}$ tiene que ser igual a $k_{6,10}$.

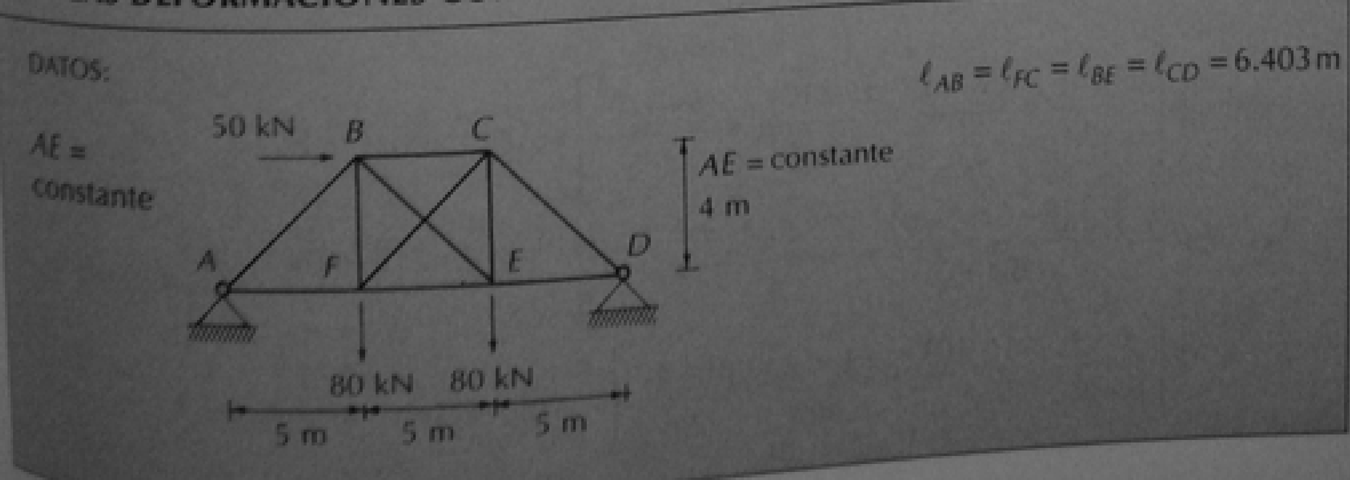
En el paso *d* se plantea la ecuación matricial 5.23, sustituyendo θ por Δ, y la ecuación 5.27 que proporciona los valores de los 8 desplazamientos Δ del problema. La inversión de la matriz [*k*] se hizo con el programa Excel, lo mismo que la multiplicación de $[k]^{-1}$ por {Δ}. Obsérvese que en la matriz {*P*} las fuerzas se deben incluir con el signo que tienen en la estructura original, ya que en la ecuación 5.23 las fuerzas de desequilibrio *P* se han pasado al segundo miembro de la ecuación, y por lo tanto, se les debe cambiar de signo. La fuerza de 50 kN es $P_3$ ya que actúa en la dirección 3 del paso *b*, y las fuerzas de 80 kN son $P_{12}$ y $P_{10}$ porque actúan en las direcciones 12 y 10. Las otras fuerzas *P* son nulas.

A partir de las deformaciones Δ se han calculado en el paso e las fuerzas en las barras de la armadura utilizando las ecuaciones 5.25 y 5.26. La fuerza $F_{CB}$, por ejemplo, sería $(x_C - x_B)$ multiplicado por $(\Delta_5 - \Delta_3)$, más $(y_C - y_B)$ multiplicado por $(\Delta_6 - \Delta_4)$, y todo dividido entre $\ell_{CB}$ al cuadrado. $\Delta_5$ es el desplazamiento del nudo *C* en dirección *x*, $\Delta_3$ es el desplazamiento del nudo *B* en la misma dirección, $\Delta_6$ el del nudo *C* en dirección *y*, y $\Delta_4$ el del nudo *B* en dirección *y*. Sustituyendo todos los valores se obtiene el valor de −121.72 kN que aparece en el ejemplo. De la misma manera se determinaron las fuerzas en todas las otras barras de la armadura.

En el paso *f* se han calculado las reacciones en los apoyos, a partir de las fuerzas en las barras que llegan a los apoyos, y utilizando las ecuaciones de equilibrio. Con las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se comprueba que la armadura, en su conjunto, está en equilibrio. También se ha verificado el equilibrio del nudo *B*.

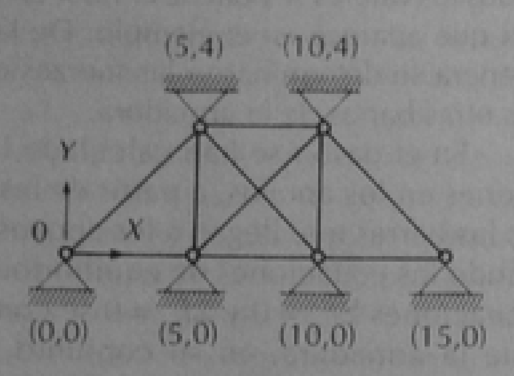
El ejemplo anterior hubiese resultado más sencillo de resolver por el método de las fuerzas, ya que la armadura sólo hubiese tenido dos grados de indeterminación y el sistema de ecuaciones simultáneas también hubiese sido de dos grados. Sin embargo, el método de las deformaciones tiene ventajas en otros casos y, en general, es más sencillo de sistematizar. Por otra parte, la resolución de sistemas de ecuaciones de grado elevado, o de matrices grandes, no presenta ningún problema cuando se tiene algún programa de computadora como el usado en la resolución de este ejemplo.

## EJEMPLO 5.6. RESOLUCIÓN DE LA ARMADURA POR EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES CON PLANTEAMIENTO MATRICIAL

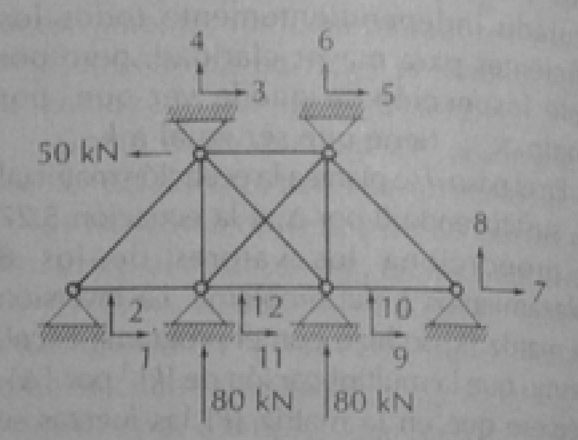


**EJEMPLO 5.6** ***(continuación)***

Paso *a*) Planteamiento de una estructura con continuidad geométrica.



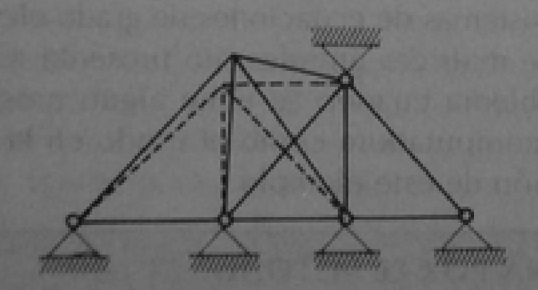

Paso *b*) Cálculo de fuerzas de desequilibrio.




Paso *c*) Imposición de desplazamientos unitarios

$k_1, k_2, k_7, k_8 = 0$

Grados de libertad = 4 x 2 = 8



(Desplazamiento del nudo B)

$$k_{33} = AE\left[\frac{(5-0)^2}{6.403^3}+\frac{(5-5)^2}{4^3}+\frac{(5-10)^2}{6.403^3}+\frac{(5-10)^2}{5^3}\right] = AE\left[0.3904\right]$$

$$k_{43} = k_{34} = AE\left[\frac{(5-0)(4-0)}{6.403^3}+\frac{(5-5)(4-0)}{4^3}+\frac{(5-10)(4-0)}{6.403^3}+\frac{(5-10)(4-4)}{5^3}\right] = AE\left[0\right]$$

$$k_{44} = AE\left[\frac{(4-0)^2}{6.403^3}+\frac{(4-0)^2}{4^3}+\frac{(4-0)^2}{6.403^3}+\frac{(4-4)^2}{5^3}\right] = AE\left[0.37189\right]$$

**EJEMPLO 5.6 *(continuación)***

$$k_{11,3} = -AE\left[\frac{(5-5)^2}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{11,4} = -AE\left[\frac{(5-5)(4-0)}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{12,13} = -AE\left[\frac{(5-5)(4-0)}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{12,4} = -AE\left[\frac{(4-0)^2}{4^3}\right] = -0.25000AE$$

$$k_{9,3} = -AE\left[\frac{(5-10)^2}{6.403^3}\right] = -0.09522\,AE$$

$$k_{9,4} = -AE\left[\frac{(5-10)(4-0)}{6.403^3}\right] = +0.07618\,AE$$

$$k_{5,3} = -AE\left[\frac{(5-10)^2}{5^3}\right] = -AE\left[0.20000\right]$$

$$k_{5,4} = -AE\left[\frac{(5-10)(4-4)}{5^3}\right] = 0$$

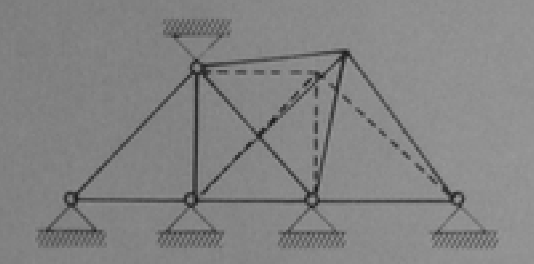
$$k_{6,3} = -AE\left[\frac{(5-10)(4-4)}{5^3}\right] = 0$$

$$k_{6,4} = -AE\left[\frac{(4-4)^2}{5^3}\right] = 0$$

$$k_{10,3} = -AE\left[\frac{(5-10)(4-0)}{6.403^3}\right] = AE\left[+0.07618\right]$$

$$k_{10,4} = -AE\left[\frac{(4-0)^2}{6.403^3}\right] = AE\left[-0.06094\right]$$

**EJEMPLO 5.6 *(continuación)***



(Desplazamiento del nudo C)

$$k_{55} = AE\left[\frac{(10-5)^2}{5^3}+\frac{(10-5)^2}{6.403^3}+\frac{(10-10)^2}{4^3}+\frac{(10-15)^2}{6.403^3}\right]=0.3904$$

$$k_{56} = AE\left[\frac{(10-5)(4-4)}{5^3}+\frac{(10-5)(4-0)}{6.403^3}+\frac{(10-10)(4-0)}{4^3}+\frac{(10-15)(4-0)}{6.403^3}\right]=0$$

$$k_{66} = AE\left[\frac{(4-4)^2}{5^3}+\frac{(4-0)^2}{6.403^3}+\frac{(4-0)^2}{4^3}+\frac{(4-0)^2}{6.403^3}\right]=0.37189$$

$$k_{36} = k_{63} = 0$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = -AE[0.2000]$$

$$k_{45} = k_{54} = 0$$

$$k_{46} = k_{64} = 0$$

$$k_{11,5} = -AE\left[\frac{(10-5)^2}{6.403^3}\right]=-0.09522$$

$$k_{11,6} = -AE\left[\frac{(10-5)(4-0)}{6.403^3}\right]=-0.07618$$

$$k_{12,5} = -AE\left[\frac{(10-5)(4-0)}{6.403^3}\right]=-0.07618$$

## EJEMPLO 5.6 *(continuación)*

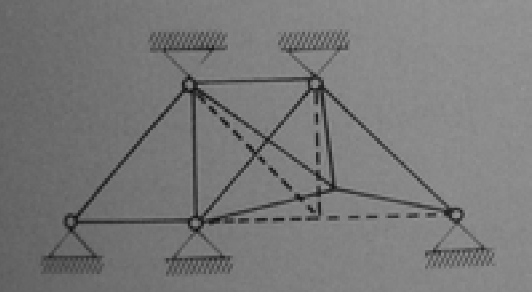
$$k_{12,6} = -AE\left[\frac{(4-0)^2}{6.403^3}\right] = -0.06094$$

$$k_{9,5} = -AE\left[\frac{(10-10)^2}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{9,6} = -AE\left[\frac{(10-10)(4-0)}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{10,5} = -AE\left[\frac{(10-10)(4-0)}{4^3}\right] = 0$$

$$k_{10,6} = -AE\left[\frac{(4-0)^2}{4^3}\right] = -0.25000$$



(Desplazamiento del nudo *E*)

$$k_{9,9} = AE\left[\frac{(10-5)^2}{5^3} + \frac{(10-5)^2}{6.403^3} + \frac{(10-10)^2}{4^3} + \frac{(10-15)^2}{5^3}\right] = 0.49522$$

$$k_{9,10} = AE\left[\frac{(10-5)(0-0)}{5^3} + \frac{(10-5)(0-4)}{6.403^3} + \frac{(10-10)(0-4)}{4^3} + \frac{(10-15)(0-0)}{5^3}\right] = -0.07618$$

$$k_{10,10} = AE\left[\frac{(0-0)^2}{5^3} + \frac{(0-4)^2}{6.403^3} + \frac{(0-4)^2}{4^3} + \frac{(0-0)^2}{5^3}\right] = 0.31094$$

$$k_{11,9} = -\left[\frac{(10-5)^2}{5^3}\right] - 0.20000$$

**EJEMPLO 5.6 *(continuación)***

$$k_{11,10} = -\left[\frac{(10-5)(0-0)}{5^3}\right] = 0$$

$$k_{12,9} = -\left[\frac{(10-5)(0-0)}{5^3}\right] = 0$$

$$k_{12,10} = -\left[\frac{(0-0)^2}{5^3}\right] = 0$$

$k_{3,9} = k_{9,3} = -0.09522$

$k_{3,10} = k_{10,3} = +0.07618$

$k_{4,9} = k_{9,4} = +0.07618$

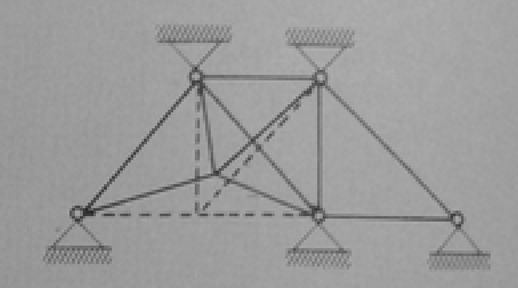
$k_{4,10} = k_{10,4} = -0.06094$

$k_{5,9} = k_{9,5} = 0$

$k_{5,10} = k_{10,5} = 0$

$k_{6,9} = k_{9,6} = 0$

$k_{6,10} = k_{10,6} = -0.25000$



(Desplazamiento del nudo *F*)

$$k_{11,11} = \frac{(5-0)^2}{5^3} + \frac{(5-5)^2}{4^3} + \frac{(5-10)^2}{6.403^3} + \frac{(5-10)^2}{5^3} = 0.49522$$

$$k_{11,12} = \frac{(5-0)(0-0)}{5^3} + \frac{(5-5)(0-4)}{4^3} + \frac{(5-10)(0-4)}{6.403^3} + \frac{(5-10)(0-0)}{5^3} = 0.07618$$

$$k_{12,12} = \frac{(0-0)^2}{5^3} + \frac{(0-4)^2}{4^3} + \frac{(0-4)^2}{6.403^3} + \frac{(0-0)^2}{5^3} = 0.31094$$

$k_{3,11} = k_{11,3} = 0$

$k_{3,12} = k_{12,3} = 0$

$k_{4,11} = k_{11,4} = 0$

$k_{4,12} = k_{12,4} = -0.25000$

$k_{5,11} = k_{11,5} = -0.09522$

$k_{5,12} = k_{12,5} = -0.07618$

$k_{6,11} = k_{11,6} = -0.07618$

$k_{6,12} = k_{12,6} = -0.06094$

**EJEMPLO 5.6 *(continuación)***

Paso *d)* Cálculo de desplazamientos reales:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,9} & k_{3,10} & k_{3,11} & k_{3,12} \\ k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,9} & k_{4,10} & k_{4,11} & k_{4,12} \\ k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,9} & k_{5,10} & k_{5,11} & k_{5,12} \\ k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,9} & k_{6,10} & k_{6,11} & k_{6,12} \\ k_{9,3} & k_{9,4} & k_{9,5} & k_{9,6} & k_{9,9} & k_{9,10} & k_{9,11} & k_{9,12} \\ k_{10,3} & k_{10,4} & k_{10,5} & k_{10,6} & k_{10,9} & k_{10,10} & k_{10,11} & k_{10,12} \\ k_{11,3} & k_{11,4} & k_{11,5} & k_{11,6} & k_{11,9} & k_{11,10} & k_{11,11} & k_{11,12} \\ k_{12,3} & k_{12,4} & k_{12,5} & k_{12,6} & k_{12,9} & k_{12,10} & k_{12,11} & k_{12,12} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix}$$

$\{\Delta\} = -[k]^{-1}\{P\}$

$-\{P\} = \{50, 0, 0, 0, 0, -80, 0, -80\}$

$\{\Delta\} = \{0.004712, -0.016826, -0.001374, -0.017031, 0.000471, -0.020602, 0.000362, -0.019865\}\ (10^5/AE)$

Paso *e)* Cálculo de las fuerzas en las barras:

$$F_{BA} = \frac{1}{6.403^2}\left[(5-0)(471.2-0)+(4-0)(-1682.7)\right] = -106.71 \text{ kN}$$

$$F_{CB} = \frac{1}{5^2}\left[(10-5)(-137.4-471.2)+(4-4)(-1703.1+1682.7)\right] = -121.72 \text{ kN}$$

$$F_{CD} = \frac{1}{6.403^2}\left[(10-15)(-137.4-0)+(4-0)(-1703.1-0)\right] = -149.40 \text{ kN}$$

$$F_{FA} = \frac{1}{5^2}\left[(5-0)(36.2-0)+(0-0)(-1986.5-0)\right] = 7.24 \text{ kN}$$

$$F_{EF} = \frac{1}{5^2}\left[(10-5)(47.1-36.2)+(0-0)(-2060.2+1986.5)\right] = 2.18 \text{ kN}$$

$$F_{DE} = \frac{1}{5^2}\left[(15-10)(0-47.1)+(0-0)(0+2060.2)\right] = -9.42 \text{ kN}$$

$$F_{BF} = \frac{1}{4^2}\left[(5-5)(471.2-36.2)+(4-0)(-1682.7+1986.5)\right] = 75.95 \text{ kN}$$

$$F_{CE} = \frac{1}{4^2}\left[(10-10)(-137.4-47.1)+(4-0)(-1703.1+2060.2)\right] = 89.27 \text{ kN}$$

**EJEMPLO 5.6 *(continuación)***

$$F_{BE} = \frac{1}{6.403^2}\left[(5-10)(471.2-47.1)+(4-0)(-1628.7+2060.2)\right] = -14.89 \text{ kN}$$

$$F_{FC} = \frac{1}{6.403^2}\left[(5-10)(36.2+137.4)+(0-4)(-1986.5+1703.1)\right] = 6.48 \text{ kN}$$

Paso *f*) Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$V_A = F_{BA} \times \frac{4}{6.403} = 106.71 \times \frac{4}{6.403} = 66.66 \text{ kN} \uparrow$$

$$H_A = 7.24 - 106.71 \times \frac{5}{6.403} = -76.09 \text{ kN} \rightarrow$$

$$V_D = 149.40 \times \frac{4}{6.403} = 93.33 \text{ kN} \uparrow$$

$$H_D = -9.42 - 149.40 \times \frac{5}{6.403} = -126.08 \text{ kN} \leftarrow$$

Revisión del equilibrio general:

$$\sum F_x = +50 + 76.09 - 126.08 = 0.01 \text{ kN} \approx 0$$

$$\sum F_Y = -80 - 80 + 66.66 + 93.33 = -0.01 \text{ kN} \approx 0$$

Revisión del equilibrio en el nudo *B*:



$$\sum F_x = +50 + 106.71 \times \frac{5}{6.403} - 121.72 - 14.89 \times \frac{5}{6.403} = -0.02 \approx 0$$

$$\sum F_y = -75.95 + 106.71 \times \frac{4}{6.403} + 14.89 \times \frac{4}{6.403} = 0.01 \approx 0$$

## 5.7 Método de las deformaciones para marcos

### *5.7.1 Consideraciones generales*

En el caso de marcos, es necesario tomar en cuenta que sus nudos pueden sufrir rotaciones y desplazamientos lineales. Al determinar entonces el número de grados de libertad se deben considerar ambos tipos de deformación. Por ejemplo, el marco de la figura 5.9*a* tiene 5 grados de libertad: las rotaciones en los nudos *B, C, D* y *E*, y el desplazamiento lineal de los nudos *B, C* y *D*, que es el mismo para los tres, si se desprecia la deformación axial de los miembros *BC* y *CD*. El marco de la figura 5.9*b* tiene 7 grados de libertad: las rotaciones de los nudos *B, C, D, E*, y *F*, y los desplazamientos lineales en cada uno de los dos pisos. Al restringir las deformaciones de la estructura en el paso *a* del método, deben impedirse ambos tipos de deformación. De la misma manera, al aplicar deformaciones unitarias en el paso *c* se deben imponer rotaciones y desplazamientos lineales. Como consecuencia, en el sistema de ecuaciones aparecen términos que representan rotaciones y términos que representan desplazamientos lineales. En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del método al caso de marcos.

**Ejemplo 5.7** Se trata de un marco asimétrico tanto en cargas como en geometría. Dos de los apoyos están empotrados y uno articulado, y la columna *ED* tiene una carga concentrada a la mitad de la altura. Los valores de *EI* son diferentes en las vigas y en las columnas.

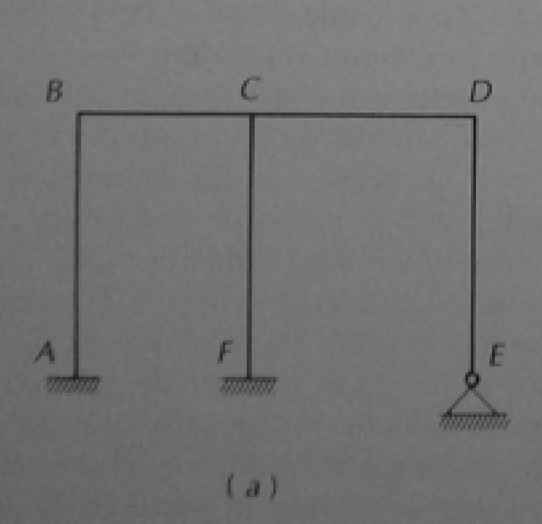
En el paso *a* se han introducido empotramientos en los nudos *B, C* y *D* para impedir sus rotaciones, y se ha introducido también una reacción o fuerza horizontal en el nudo *D* para impedir el desplazamiento horizontal del marco. Los empotramientos restringen las rotaciones de todos los miembros que concurren al nudo. Por ejemplo, el empotramiento colocado en el nudo *C* restringe las rotaciones de los miembros *CB*, *CF* y *CD*. La reacción introducida en el nudo *D* impide el desplazamiento horizontal de los nudos *B, C* y *D*, ya que si se desprecia la deformación axial de las vigas, los tres nudos tienen que desplazarse la misma distancia. No es necesario impedir el desplazamiento vertical de los nudos, ya que éste sólo puede ocurrir por deformación axial de las columnas y estas deformaciones se están despreciando. En general, el número de restricciones que es necesario introducir en este paso es igual al número de grados de libertad de la estructura. El marco del ejemplo tiene 4 grados de libertad: las rotaciones de los nudos *B, C* y *D* y el desplazamiento horizontal de estos mismos nudos. El nudo *E* también tendrá una rotación, pero como el momento será nulo por tratarse de una articulación, no es necesario calcularla. En este paso se han calculado los momentos de empotramiento perfecto de los miembros que tienen cargas transversales. Obsérvese que en la columna *DE* se ha usado la ecuación que corresponde a un miembro empotrado en un extremo y articulado en el otro, y que el signo se ha determinado con la convención de que la columna se observa desde el exterior del marco (figura 2.15) por lo que el nudo *E* es el extremo izquierdo y el nudo *D* es el derecho.

Los momentos y la fuerza de desequilibrio se han calculado en el paso *b*. Los primeros son las sumas de los momentos de empotramiento perfecto en cada nudo. En la figura se han introducido con signo positivo, o sea, con sentido horario. El cálculo de la reacción en el nudo *D*, fuerza $P_D$, se muestra en la parte inferior de este paso. Primero se calculan las reacciones producidas por la fuerza de 4 ton en el miembro *DE*, considerando que el extremo *D* está empotrado y el extremo *E* articulado; esto da una reacción de 1.25 ton, hacia la dere-

cha, en el extremo $E$; en las otras columnas, como no hay cargas laterales, tampoco hay reacciones en los apoyos. En la figura de la parte inferior derecha de este paso se muestran las reacciones y la fuerzas horizontales que actúan en el marco con los nudos restringidos contra giro. Haciendo $\Sigma F_x = 0$ en este marco se despeja el valor de la fuerza $P_D$ que resulta de 7.25 ton hacia la izquierda, o sea, negativo. Esta fuerza $P_D$ es la que mantiene en equilibrio de fuerzas horizontales al marco planteado en el paso *a*.

En el paso *c* se imponen las deformaciones unitarias que ahora son rotaciones para los nudos restringidos en el paso *a* y un desplazamiento horizontal unitario correspondiente a la restricción que produce la fuerza $P_D$. Estas deformaciones se imponen una a la vez manteniendo restringidas las demás. Por ejemplo, en la primera figura de este paso se ha impuesto una rotación en el nudo $B$ manteniendo empotrados los otros nudos y evitando el desplazamiento horizontal del marco. Esta rotación produce momentos en los miembros que concurren al nudo, o sea, el $AB$ y el $BC$, que se calculan con las ecuaciones 5.1 y 5.3. Obsérvese que en las vigas se ha usado el valor de $2EI$ y en las columnas, $EI$. Es importante notar que en los extremos de la columna $AB$ se desarrollan reacciones que equilibran a los momentos que actúan en los mismos extremos; su valor es igual a la suma de los momentos en los extremos dividida entre el claro y su signo es tal que producen un momento de sentido contrario. Por equilibrio del marco en su conjunto, si en el apoyo $A$ se produce una fuerza de $6EI/\ell_{AB}^2$ hacia la derecha, en el apoyo que se ha introducido en el nudo $D$ tiene que desarrollarse una fuerza igual y de sentido contrario, como se muestra en esta figura. De la misma manera descrita se han calculado los momentos y las fuerzas horizontales en el apoyo $D$ para las rotaciones impuestas en los nudos $C$ y $D$.

En la última figura de este paso se ha impuesto el desplazamiento horizontal unitario y se han calculado los momentos correspondientes, los cuales se desarrollan únicamente en las columnas ya que las vigas se desplazan sin deformarse. Estos momentos se han calculado con la ecuación 5.8, para



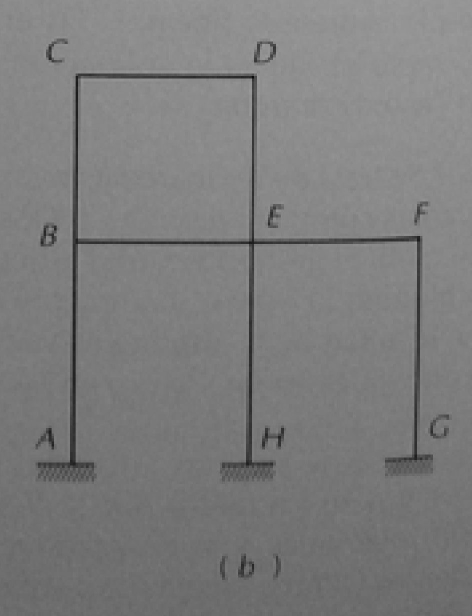




**Figura 5.9.** Marcos con distintos grados de libertad

las columnas *AB* y *FC*, y con la ecuación 5.10 para la columna *ED*, ya que esta última tiene un extremo articulado. Nótese que como las cuerdas giran en sentido horario, los momentos resultan negativos, según la convención de signos planteada después de la ecuación 5.9.

En el paso *d* se plantean las ecuaciones de equilibrio. Las tres primeras expresan que la suma del momento de desequilibrio en cada nudo y de los momentos producidos en el mismo nudo por las deformaciones impuestas en el paso anterior, multiplicados estos últimos por el valor real de las deformaciones, es igual a 0; esto equivale a decir que cada nudo está en equilibrio. La cuarta ecuación expresa el equilibrio de fuerzas horizontales. La suma de la fuerza de desequilibrio $P_D$ determinada en el paso *b* y de las fuerzas horizontales en el nudo *D* producidas por las deformaciones impuestas es también igual a 0. Nótese que en el sistema de ecuaciones que se ha formado, tres de las incógnitas son rotaciones y la otra es un desplazamiento., pero como en el denominador de los coeficientes de $\Delta_D$ aparece una longitud elevada al cuadrado, las unidades son compatibles. Resolviendo el sistema de ecuaciones se han calculado en el ejemplo los valores de las cuatro incógnitas.

A continuación, en el paso *e*, se han calculado los momentos correctivos sumando los momentos que aparecen en las figuras del paso *c* multiplicados por los valores ya determinados de las rotaciones y el desplazamiento horizontal. Así, el momento $m_{AB}$ es el momento en el extremo *A* del miembro *AB* de la primera figura del paso *c* multiplicada por $\theta_B$, más el momento en la cuarta figura multiplicada por $\Delta_D$. En la segunda y en la tercera figuras no aparecen momentos en dicho extremo.

Finalmente en el paso *f* se han calculado los momentos finales sumando los momentos correctivos a los de desequilibrio. Teniendo estos momentos finales es posible calcular las reacciones en los apoyos y, a partir de éstas, las fuerzas normales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Por ejemplo, la reacción horizontal en el apoyo *A* se ha obtenido dividiendo la suma de los momentos en los extremos de la columna *AB* entre la altura de la columna:

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{h_{AB}} = \frac{-8.924 - 6.697}{6} = -2.60 \text{ ton}$$

Como ambos momentos tienen sentido antihorario, las reacciones tienen que producir un momento horario; por eso en el extremo inferior de la columna la reacción es hacia la izquierda, como se ve en el croquis de reacciones.

Las reacciones verticales en los apoyos se han calculado a partir de las reacciones de las vigas del marco. Por ejemplo, la reaccionen el extremo izquierdo de la viga B puede obtenerse colocando en esta viga la carga vertical de 20 ton y los momentos en los extremos de la viga. El resultado es:

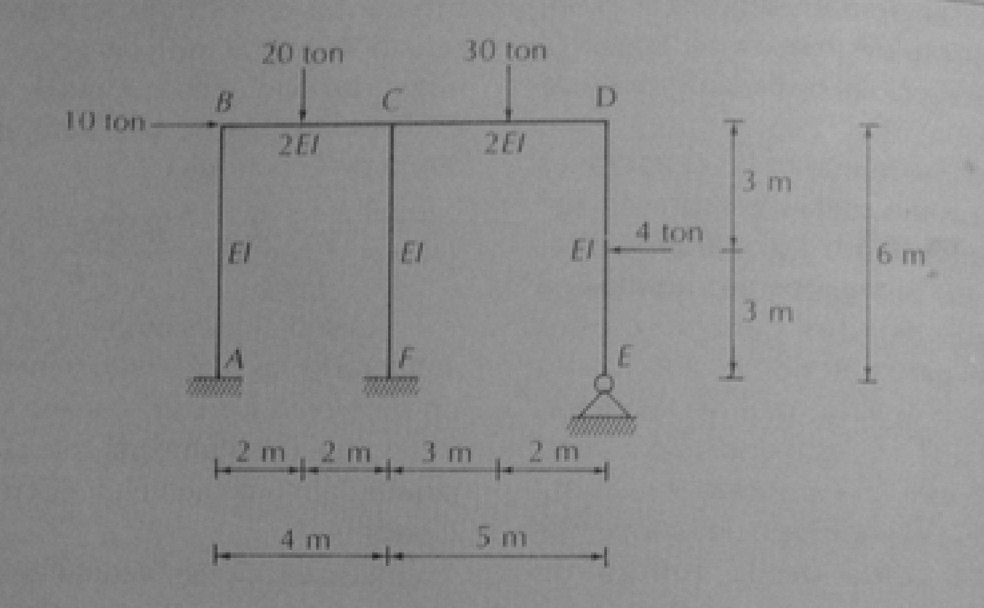
$$R_{BC} = \frac{20}{2} - \frac{6.716 + 23.398}{4} = 2.47 \text{ ton}$$

Esta reacción se transmite como fuerza normal en la columna *AB* hasta llegar al apoyo *A* como reacción vertical.

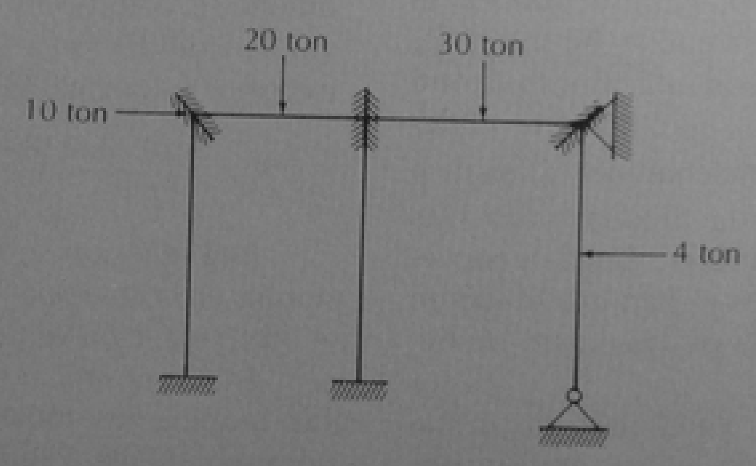
En forma similar se han calculado todas las reacciones mostradas en el croquis correspondiente. Puede comprobarse que en el marco como conjunto se cumplen las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ . Teniendo las reacciones, es posible obtener las fuerzas normales haciendo cortes en las columnas y en las vigas, las fuerzas cortantes como la suma de las fuerzas a la izquierda de cualquier sección, y los momentos flexionantes como la suma de las áreas bajo los diagramas de fuerzas cortantes. En el ejemplo se incluyen croquis con los diagramas correspondientes, los cuales se han dibujado con la convención de signos de la figura 2.15.

## EJEMPLO 5.7. RESOLUCIÓN DE UN MARCO POR EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES

DATOS:




Paso *a*) Planteamiento de un marco con continuidad geométrica:




$$\overline{M}_{BC} = -\frac{20\times 2^3}{4^2} = -10 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{CB} = \frac{20\times 2^3}{4^2} = 10 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

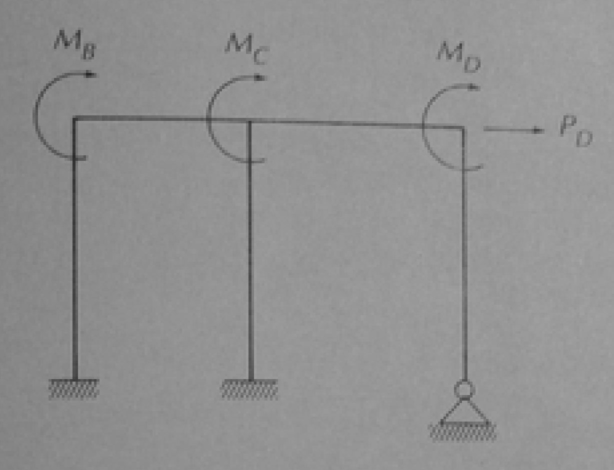
$$\overline{M}_{CD} = -\frac{30\times 3\times 2^2}{5^2} = -14.4 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{DC} = \frac{30\times 3^2\times 2}{5^2} = 21.6 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$\overline{M}_{DE} = -\frac{3\times 4\times 6}{16} = -4.5 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

**EJEMPLO 5.7 *(continuación)***

*Paso b)* Cálculo de momentos y fuerzas de desequilibrio:




$$M_B = \overline{M}_{BC} + \overline{M}_{BA} = -10 + 0 = -10 \text{ ton·m}$$

$$M_C = \overline{M}_{CB} + \overline{M}_{CD} + \overline{M}_{CF} = +10 - 14.4 + 0 = -4.4 \text{ ton·m}$$

$$M_D = \overline{M}_{DC} + \overline{M}_{DE} = 21.6 - 4.5 = 17.1 \text{ ton·m}$$

Cálculo de $P_D$:

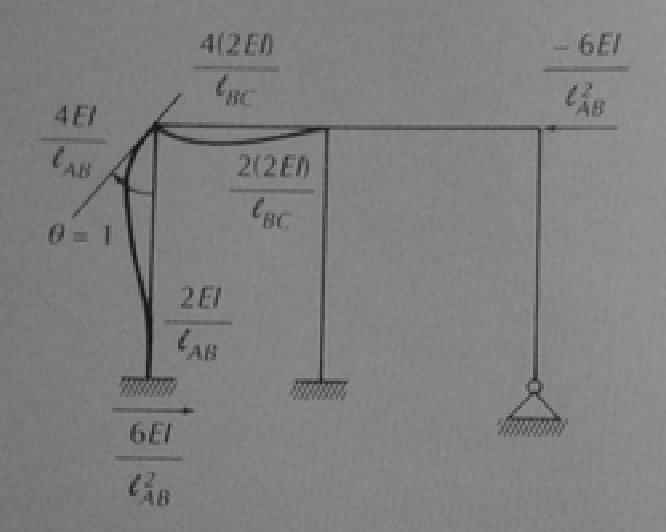
D
– 4.5 ton – m (paso a)
2 ton
$\frac{4.5}{6} = 0.75$ ton
4 ton
2 ton
$\frac{4.5}{6} = 0.75$ ton
E

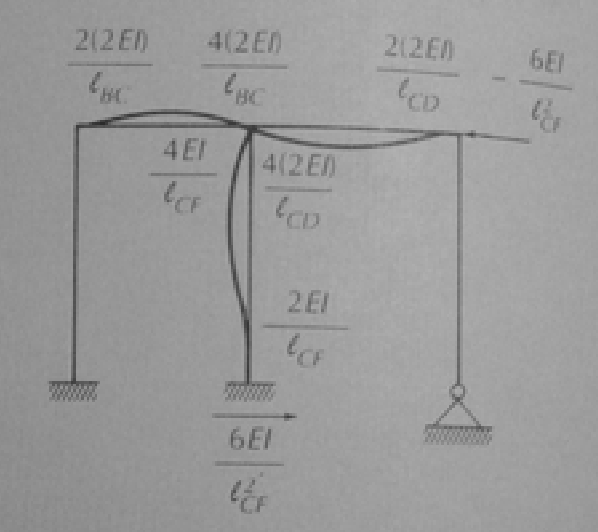
$P_D$
10 ton
4 ton
0
0
1.25 ton

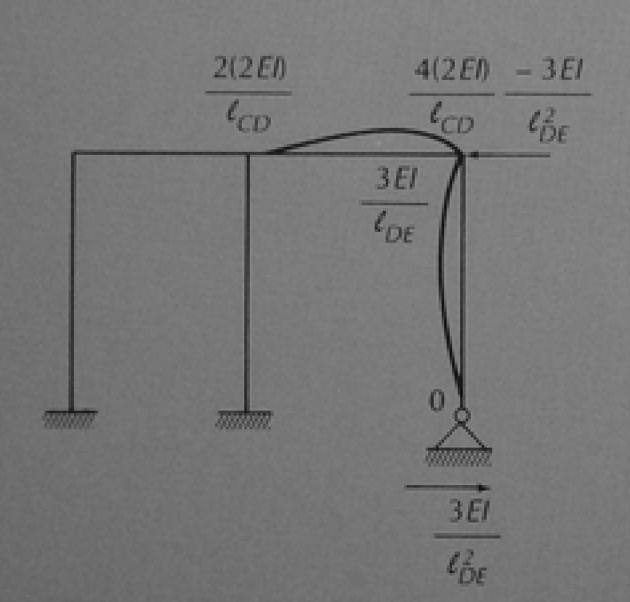
$$P_D = 10 + 1.25 - 4 = 7.25 \text{ ton} \leftarrow = -7.25 \text{ ton}$$

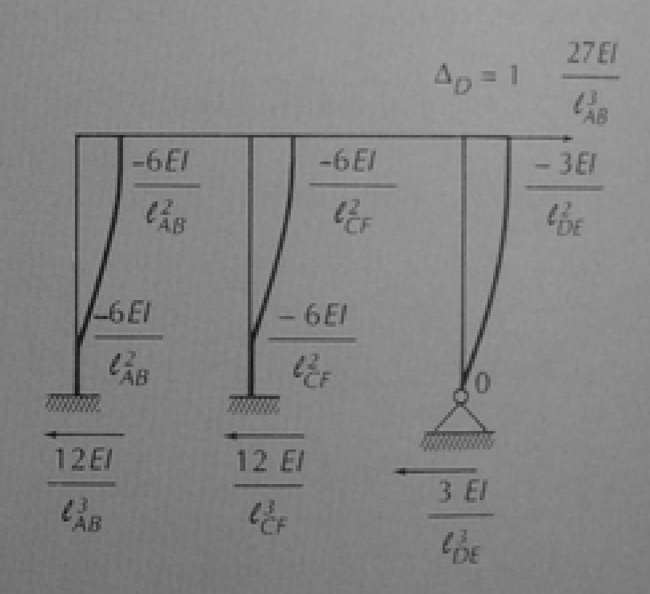
**EJEMPLO 5.7 *(continuación)***

Paso *c*) Imposición de rotaciones y desplazamientos unitarios:




Paso *d*) Cálculo de rotaciones y desplazamientos reales:

$$-10.0 + EI\left(\frac{4}{6}+\frac{8}{4}\right)\theta_B + EI\left(\frac{4}{4}\right)\theta_C + 0 - EI\left(\frac{6}{6^2}\right)\Delta_D = 0$$

$$-4.4 + EI\left(\frac{4}{4}\right)\theta_B + EI\left(\frac{8}{4}+\frac{8}{5}+\frac{4}{6}\right)\theta_C + EI\left(\frac{4}{5}\right)\theta_D - EI\left(\frac{6}{6^2}\right)\Delta_D = 0$$

$$17.1 + 0 + EI\left(\frac{4}{5}\right)\theta_C + EI\left(\frac{8}{5}+\frac{3}{6}\right)\theta_D - EI\left(\frac{3}{6^2}\right)\Delta_D = 0$$

$$-7.25 - EI\left(\frac{6}{6^2}\right)\theta_B - EI\left(\frac{6}{6^2}\right)\theta_C - EI\left(\frac{3}{6^2}\right)\theta_D + EI\left(\frac{27}{6^3}\right)\Delta_D = 0$$

**EJEMPLO 5.7 (continuación)**

Haciendo $EI = 1$ y simplificando:

$$-10.0 + 2.667\,\theta_B + \theta_C + 0 - 0.167\,\Delta_D = 0$$

$$-4.4 + \theta_B + 4.267\,\theta_C + 0.8\,\theta_D - 0.167\,\Delta_D = 0$$

$$17.10 + 0 + 0.80\,\theta_C + 2.10\,\theta_D - 0.083\,\Delta_D = 0$$

$$-7.25 - 0.167\,\theta_B - 0.167\,\theta_C - 0.083\,\theta_D + 0.125\,\Delta_D = 0$$

$$\theta_B = 6.681, \quad \theta_C = 3.354, \quad \theta_D = -6.776, \quad \Delta_D = 66.908 \;/EI$$

Paso e) Cálculo de los momentos correctivos:

$$m_{BA} = \frac{4\theta_B}{\ell_{AB}} - \frac{6\Delta_D}{\ell^2{}_{AB}} = \frac{4\times 6.681}{6} - \frac{6\times 66.908}{6^2} = -6.697$$

$$m_{BC} = \frac{8}{\ell_{BC}}\theta_B + \frac{4}{\ell_{BC}}\theta_C = \frac{8\times 6.681}{4} - \frac{4\times 3.354}{4} = 16.716$$

$$m_{CB} = \frac{4\,\theta_B}{\ell_{BC}} + \frac{8\,\theta_C}{\ell_{BC}} = \frac{4\times 6.681}{4} + \frac{8\times 3.354}{4} = 13.389$$

$$m_{CD} = \frac{8\,\theta_C}{\ell_{CD}} + \frac{4\,\theta_D}{\ell_{CD}} = \frac{8\times 3.354}{5} + \frac{4\times(-6.776)}{5} = -0.054$$

$$m_{CF} = \frac{4\,\theta_C}{\ell_{CF}} - \frac{6\,\Delta_D}{\ell^2{}_{CF}} = \frac{4\times 3.354}{6} + \frac{6\times 66.908}{6^2} = -8.915$$

$$m_{DC} = \frac{4\,\theta_C}{\ell_{CD}} + \frac{8\,\theta_D}{\ell_{CD}} = \frac{4\times 3.354}{5} + \frac{8\,(-6.776)}{5} = -8.158$$

$$m_{DE} = \frac{3\,\theta_D}{\ell_{DE}} - \frac{3\,\Delta_D}{\ell^2{}_{DE}} = \frac{3(-6.776)}{6} - \frac{3\times 66.908}{6^2} = -8.964$$

$$m_{AB} = \frac{2\,\theta_B}{\ell_{AB}} - \frac{6\,\Delta_D}{\ell^2{}_{AB}} = \frac{2\times 6.681}{6} - \frac{6\times 66.908}{6^2} = -8.924$$

$$m_{FC} = \frac{2\theta_C}{\ell_{FC}} - \frac{6\,\Delta_D}{\ell^2{}_{FC}} = \frac{2\times 3.354}{6} - \frac{6\times 66.908}{6^2} = -10.033$$

Paso f) Cálculo de los momentos finales:

$$M_{AB} = m_{AB} = -8.924$$

$$M_{BA} = m_{BA} = -6.697$$

$$M_{BC} = \overline{M}_{BC} + m_{BC} = -10 + 16.716 = +6.716$$

**EJEMPLO 5.7** ***(continuación)***

$$M_{CB} = \overline{M}_{CB} + m_{CB} = +10 + 13.389 = 23.389$$

$$M_{CD} = \overline{M}_{CD} + m_{CD} = -14.4 - 0.054 = -14.454$$

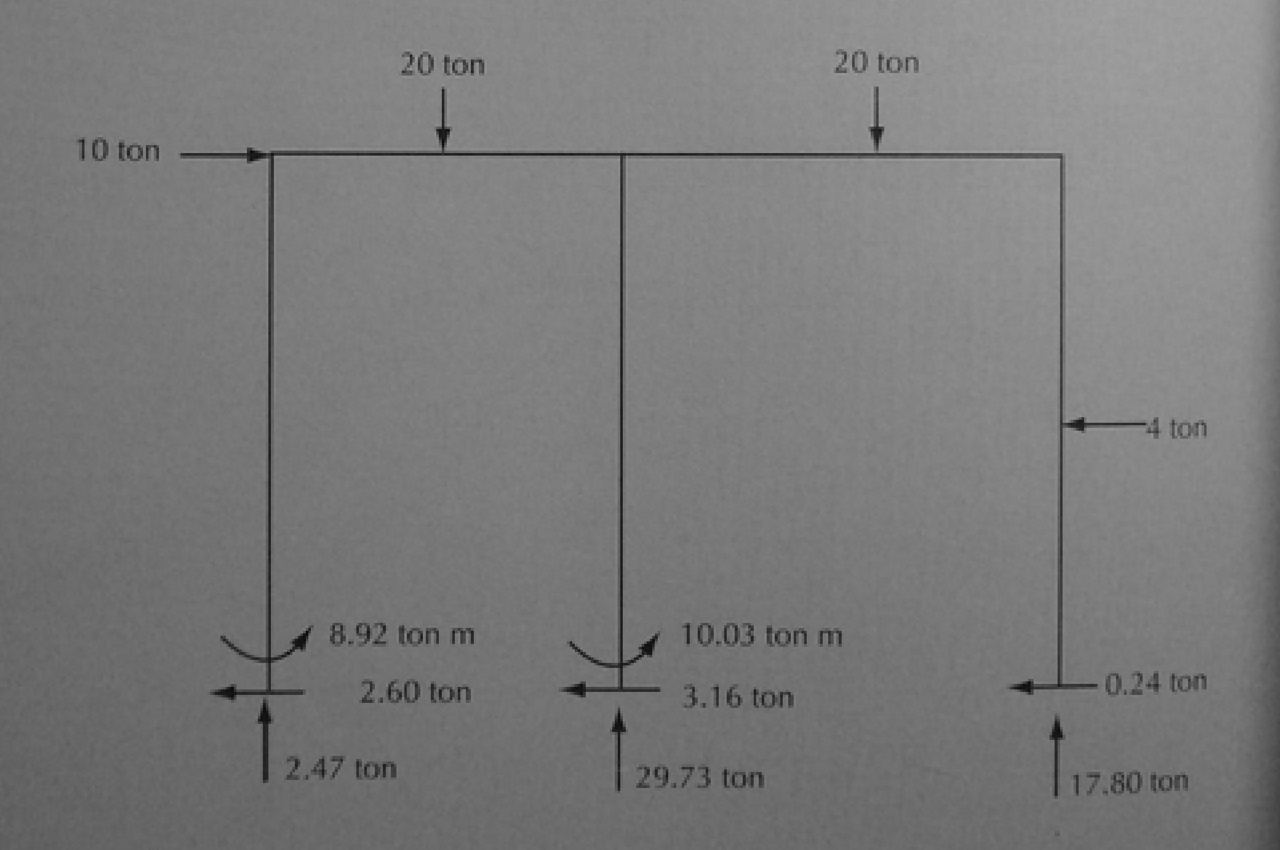
$$M_{CF} = m_{CF} = -8.915$$

$$M_{FC} = m_{FC} = -10.033$$

$$M_{DC} = \overline{M}_{DC} + m_{DC} = 21.6 - 8.158 = 13.442$$

$$M_{DE} = \overline{M}_{DE} + m_{DE} = -4.5 - 8.964 = -13.464$$

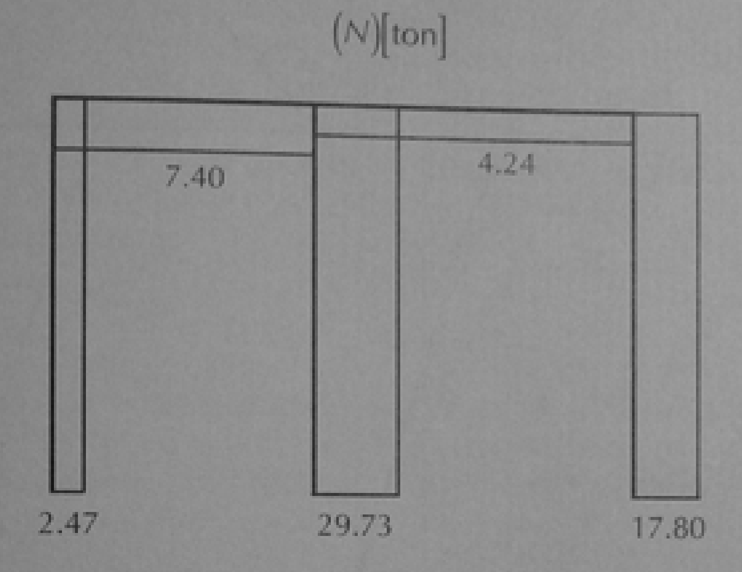
Cálculo de las reacciones y diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

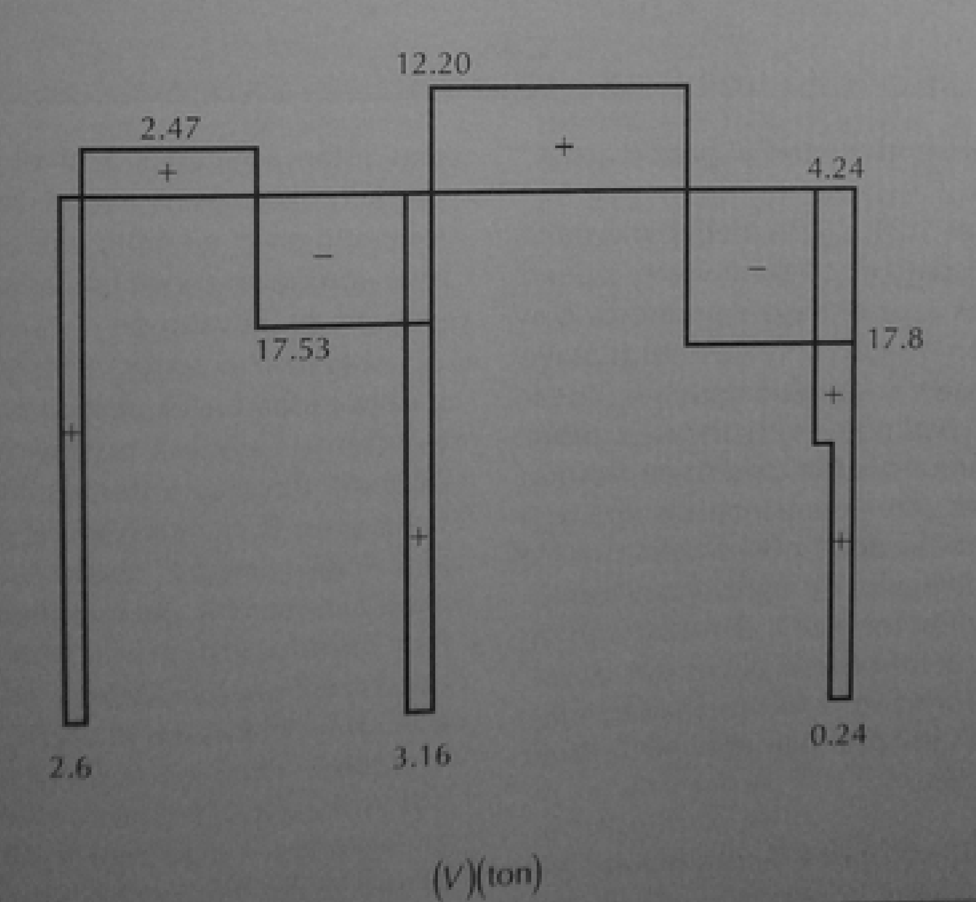



Reacciones

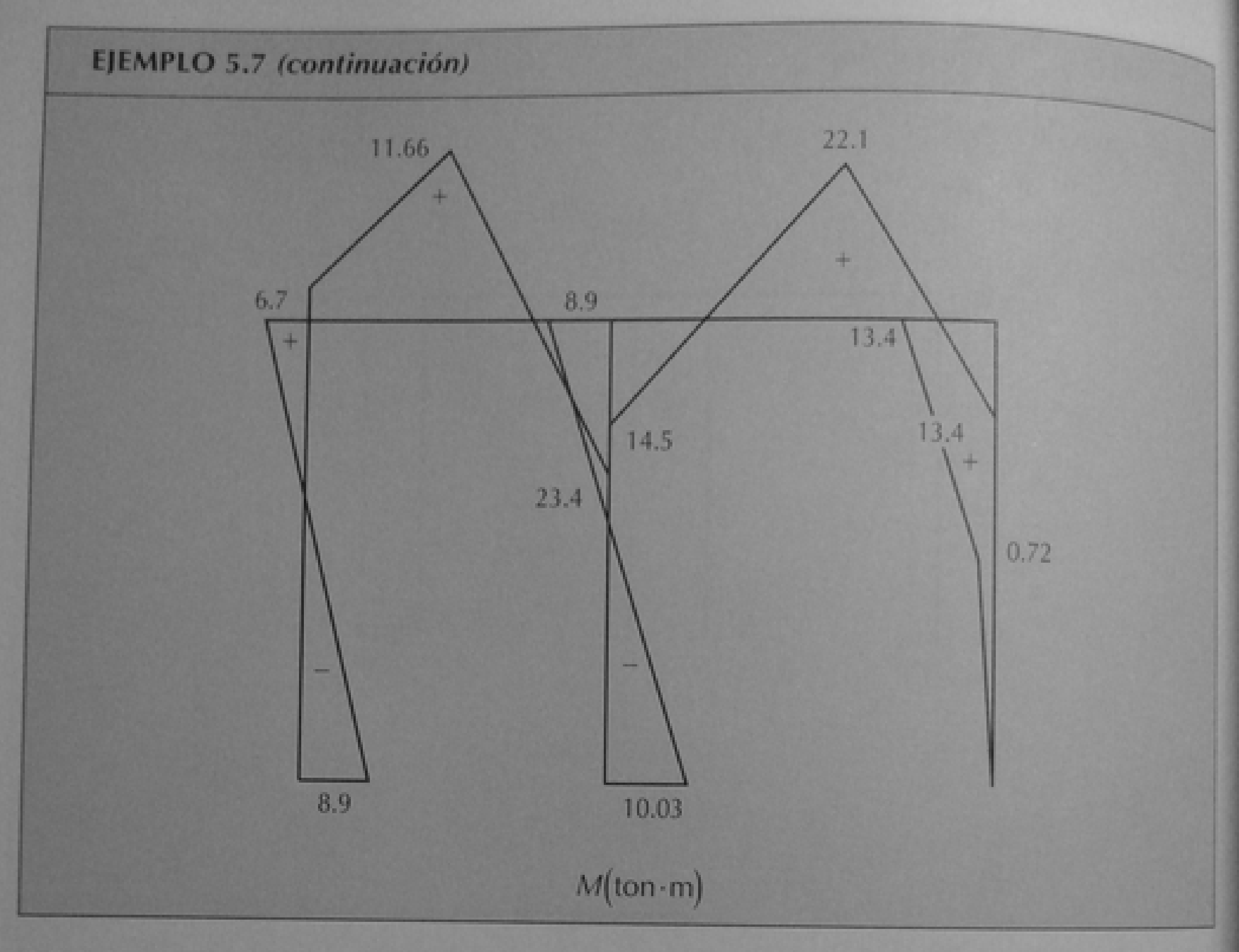
**EJEMPLO 5.7 *(continuación)***

Diagramas de *N*, *V* y *M*



**EJEMPLO 5.7 *(continuación)***




*5.7.2 Planteamiento matricial para marcos*

Las ecuaciones 5.21 a 5.24, deducidas en la sección 5.5.3 para el caso de vigas, siguen siendo válidas para el caso de marcos, con la observación de que la matriz {θ} incluye ahora rotaciones y desplazamientos lineales. Como se explicó en el ejemplo anterior esto no presenta ningún problema porque las ecuaciones son dimensionalmente compatibles. También debe observarse que los coeficientes de rigidez $k_{ij}$ representan los momentos en *i* debidos a una deformación en *j*, y que esta deformación puede ser, igualmente, una rotación o un desplazamiento lineal. En el ejemplo siguiente se ilustran estos conceptos.

**Ejemplo 5.8** Es un marco de dos niveles con cargas verticales y horizontales. Estas últimas están aplicadas a nivel de piso por lo que las columnas no tienen cargas transversales como en el ejemplo anterior. No es simétrico porque un apoyo está articulado y el otro, empotrado. El valor de *EI* es constante.

Las restricciones contra deformaciones introducidas en el paso *a* incluyen empotramientos en los nudos y apoyos para impedir desplazamientos horizontales en cada piso. El marco tiene 6 grados de libertad, 4 giros en los nudos *B, C, D* y *E*, y 2 desplazamientos en los pisos *BE* y *CD*. Se han introducido, por lo tanto, 6 restricciones. En el apoyo *F* existe un grado de libertad adicional, el giro en el apoyo, pero como el momento final es nulo, no es necesario considerarlo al plantear el sistema de ecuaciones. En la figura de este paso se muestran los momentos de empotramiento perfecto que sólo se presentan en las vigas.

En el paso *b* se han calculado los momentos de desequilibrio y las fuerzas de desequilibrio. Como no hay cargas transversales en las columnas, las fuerzas horizontales de desequilibrio resultan iguales y de sentido contrario a las fuerzas horizontales aplicadas al marco. En la figura de la derecha, en este mismo paso, se ha indicado el sistema de referencia para las deformaciones: la deformación 1 es el giro en el nudo *B*, la deformación 2 es el giro en el nudo *C*, y así sucesivamente; las deformaciones 5 y 6 son desplazamientos lineales.

En el paso *c* se van imponiendo las deformaciones unitarias. Según el sistema de referencia establecido en el paso anterior, la deformación 1 corresponde a una rotación el nudo *B*, como se ve en la primera figura de este paso. Esta rotación produce momentos en los miembros *BA*, *BE* y *BC*. Los coeficientes de rigidez correspondientes son: $k_{11}$ que es el momento en la dirección 1 correspondiente a la rotación 1; $k_{21}$ que es el momento en la dirección 2 correspondiente a la rotación 1; $k_{31}$, es el momento en la dirección 3 correspondiente a la rotación 1; $k_{41}$ que es el momento en la dirección 4 correspondiente a la rotación 1; $k_{51}$ que es la fuerza en la dirección 5 correspondiente a la rotación 1; y $k_{61}$ que es la fuerza en la dirección 6 correspondiente a la rotación 1. Los coeficientes $k_{11}$, $k_{21}$, y $k_{41}$ se calculan sumando los momentos de los miembros que concurren a los nudos *B*, *C* y *E*, respectivamente, los cuales, a su vez, se calculan a partir de las rigideces angulares de dichos miembros. Como la rotación 1 no produce momentos en el nudo *D*, el coeficiente $k_{31}$ vale 0. El cálculo de $k_{51}$ se muestra por separado: como en los extremos del miembro *BC* se desarrollan momentos que valen $4EI/\ell$ y $2EI/\ell$, respectivamente, en dichos extremos también se deben desarrollar reacciones que produzcan un momento igual y de sentido contrario; por lo tanto, en el extremo *B* se produce una reacción que vale la suma de los momentos dividida entre el claro, o sea, $6EI/\ell^2$; para que el diagrama de cuerpo libre mostrado en el ejemplo esté en equilibrio, en el nudo *D* debe aparecer una fuerza igual y de sentido contrario, que es precisamente la fuerza $k_{51}$. De manera similar se obtiene la fuerza $k_{61}$, pero ahora el diagrama de cuerpo libre incluye los dos pisos del marco y en el nudo *D* se ha colocado la fuerza $k_{51}$ ya calculada. A continuación se impone la rotación correspondiente a la dirección 2, se calculan los coeficientes de rigidez $k_{12}$, $k_{22}$, $k_{32}$, $k_{52}$ y $k_{62}$, y así sucesivamente se van imponiendo una a una las deformaciones correspondientes a cada dirección. Obsérvese que las deformaciones correspondientes a las direcciones 5 y 6 son desplazamientos lineales; los momentos que producen en los miembros del marco se han calculado con las ecuaciones 5.8 o 5.10, según el caso. En el ejemplo, se ha aprovechado el Teorema de Maxwel para no calcular $k_{ij}$ cuando ya se había calculado $k_{ji}$, pero se muestra una manera alternativa de calcular los coeficientes que corresponden a los momentos en las columnas; por ejemplo, el cálculo de $k_{15}$ por un procedimiento diferente al que se acaba de explicar. Obsérvese en el cálculo de $k_{65}$ que no hay reacciones en los apoyos del marco, pero como actúa una fuerza $k_{55}$ en el nudo *D*, aparece en el nudo *E* una fuerza $k_{65}$ igual y de sentido contrario para que el marco esté en equilibrio.

Una vez calculados todos los coeficientes $k_{ij}$ se plantea, en el paso *d*, la matriz de rigideces [*k*] que resulta de 6 × 6, ya que el marco tiene 6 grados de libertad. También se plantea la matriz {*P*} con los momentos y fuerzas de desequilibrio calculados en el paso *b*. Y utilizando la ecuación 5.24 se despejan las incógnitas {θ}. Como ya se ha explicado anteriormente, la inversión de la matriz [*k*] resulta muy sencilla cuando se dispone de un programa de computadora.

Los pasos siguientes se llevan a cabo de la misma manera que en los ejemplos

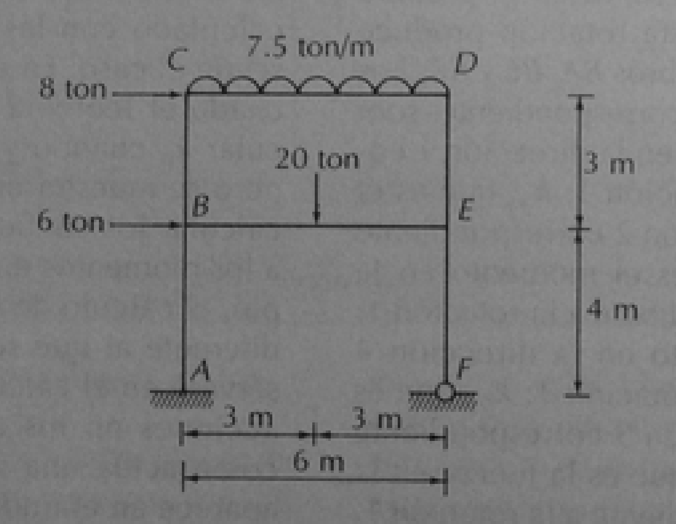
anteriores, por lo que ya no se presentan comentarios adicionales. Tampoco se incluyen los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante, los cuales pueden obtenerse como se ha descrito en el ejemplo anterior. Obsérvese únicamente que para calcular las fuerzas normales debe empezarse por el piso superior y transmitir las fuerzas calculadas al piso inferior.

Puede verse en este ejemplo que el planteamiento matricial permite ordenar los cálculos de manera adecuada, y que el cálculo de los coeficientes de rigidez resulta expedito ya que las deformaciones impuestas producen momentos en pocos miembros del marco. La mayoría de los grandes programas de análisis estructural por computadora que se usan actualmente están basados en los mismos principios expuestos en este ejemplo.

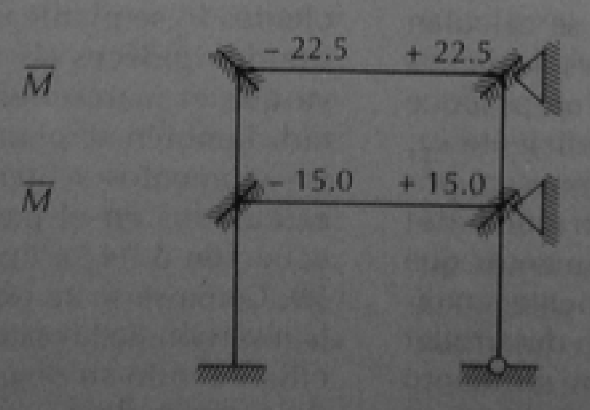
## EJEMPLO 5.8. RESOLUCIÓN DE UN MARCO POR EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES, USANDO EL PLANTEAMIENTO MATRICIAL

DATOS:

$EI$ = constante



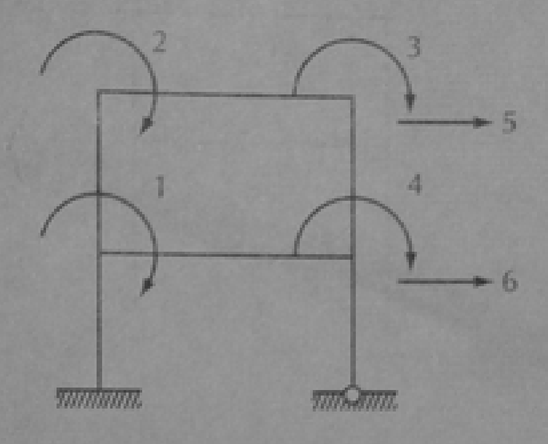

Paso *a*) Planteamiento de un marco con continuidad geométrica.



**EJEMPLO 5.8 *(continuación)***

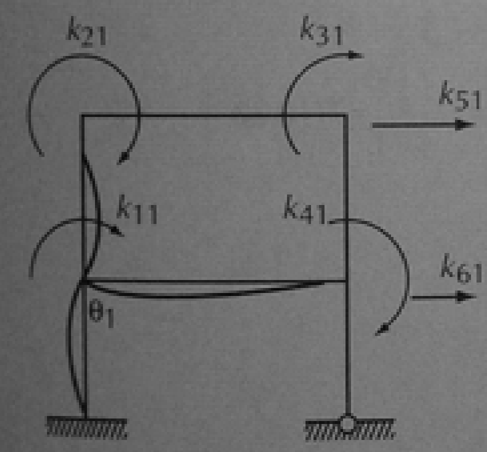
Paso *b*) Cálculo de momentos y fuerzas de desequilibrio.

– 22.5 ton m
+ 22.5 ton m
8 ton
– 15.0
+ 15.0 ton – m
6 ton




Sistema de referencia

Paso *c*) Imposición de deformaciones unitarias y cálculo de coeficientes de rigidez.




$$k_{11} = EI\left[\frac{4}{4}+\frac{4}{3}+\frac{4}{6}\right] = EI\left[3\right]$$

$$k_{21} = EI\left[\frac{2}{3}\right] = EI\left[0.667\right]$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{41} = EI\left[\frac{2}{6}\right] = EI\left[0.333\right]$$

Cálculo de $k_{51}$:

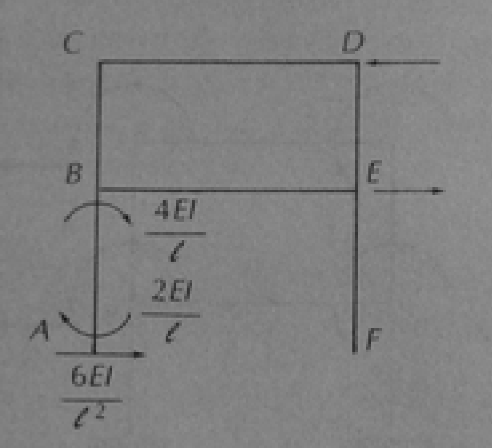
C
D
$\frac{2EI}{\ell}$
$\frac{4EI}{\ell}$
B
E
$\frac{6EI}{\ell}$

$$\frac{6EI}{\ell^2} = EI\left[\frac{6}{3^2}\right] = 0.667\ EI$$

$$k_{51} = -EI\left[0.667\right]$$

**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

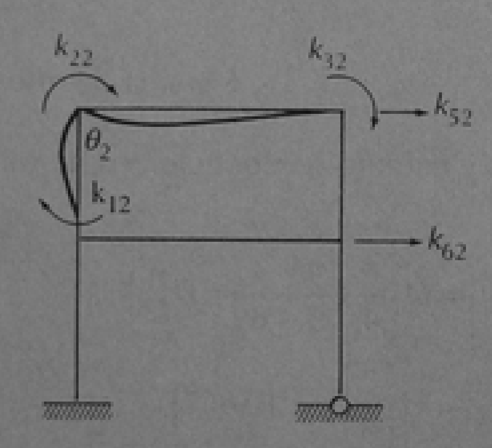
Cálculo de $k_{61}$:




$-0.667\ EI$

$$EI\left[0.667-\frac{6}{4^2}\right]=0.292\ EI$$

$$k_{61}=EI\left[0.292\right]$$




$$k_{12}=k_{21}=EI\left[0.667\right]$$

$$k_{22}=EI\left[\frac{4}{3}+\frac{4}{6}\right]=EI=EI\left[2\right]$$

$$k_{32}=EI\left[\frac{2}{6}\right]=EI\left[0.333\right]$$

$$k_{42}=0$$

Cálculo de $k_{52}$:

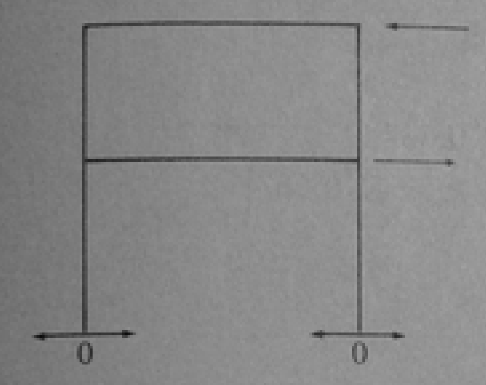
$\frac{4EI}{\ell}$ $\frac{2EI}{\ell}$ $\frac{6EI}{\ell^2}$

$$\frac{6EI}{\ell^2}=EI\left[\frac{6}{3^2}\right]=0.667\ EI$$

$$k_{52}=-EI\left[0.667\right]$$

## EJEMPLO 5.8 *(continuación)*

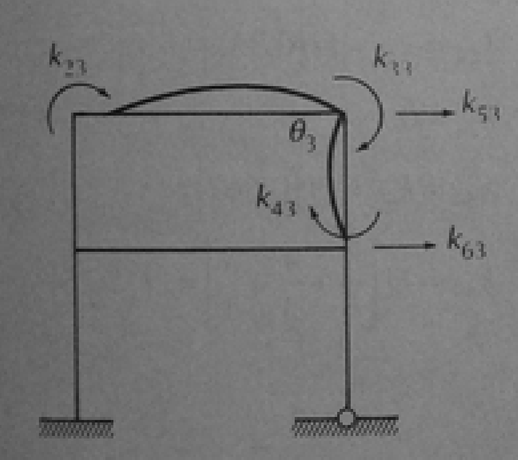
Cálculo de $k_{62}$ :




$-0.667\ EI$

$0.667\ EI$

$k_{62} = 0.667\ EI$




$k_{13} = 0$

$k_{23} = k_{32} = EI\left[0.333\right]$

$$k_{33} = EI\left[\frac{4}{6}+\frac{4}{3}\right] = EI\left[2\right]$$

$$k_{43} = EI\left[\frac{2}{3}\right] = EI\left[0.667\right]$$

Cálculo de $k_{53}$ :

$\frac{2EI}{\ell}$

$\frac{4EI}{\ell}$

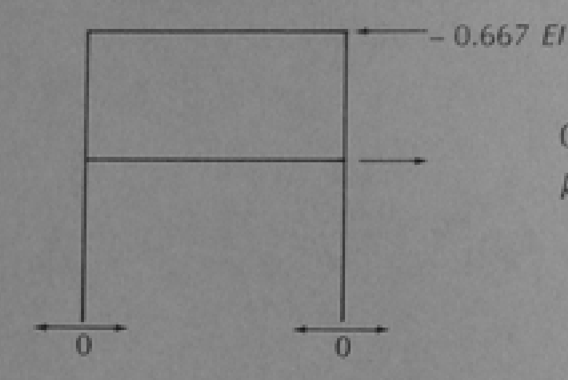
$\frac{6EI}{\ell^2}$

$$\frac{6EI}{\ell^2} = EI\left[\frac{6}{3^2}\right] = 0.667\ EI$$

$$k_{53} = -EI\left[0.667\right]$$

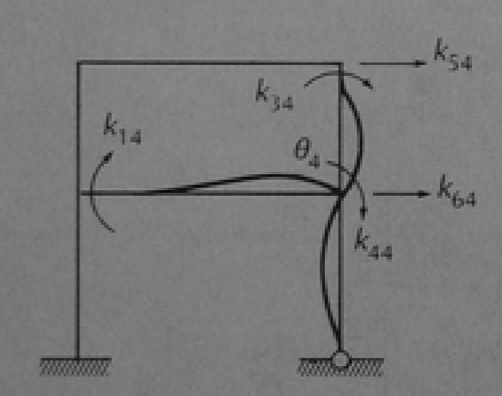
**EJEMPLO 5.8 *(continuación)***

Cálculo de $k_{63}$




0.667 $EI$

$k_{63} = EI[0.667]$



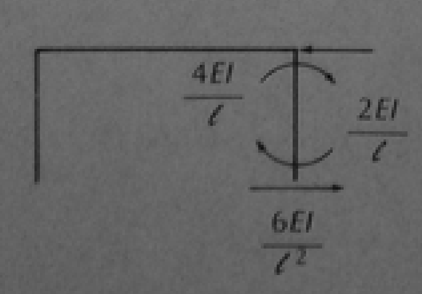

$k_{14} = k_{41} = EI[0.333]$

$k_{24} = 0$

$k_{34} = k_{43} = EI[0.667]$

$k_{44} = EI\left[\frac{4}{6} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right] = EI[2.75]$

Cálculo de $k_{54}$ :

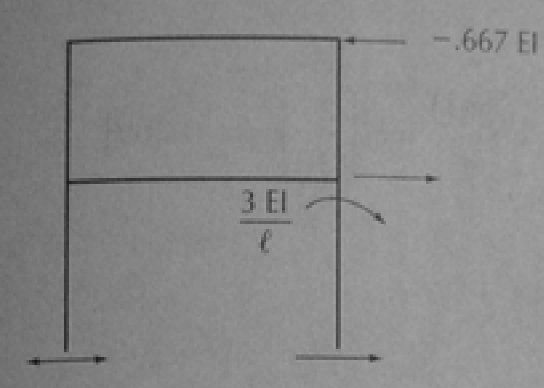



$\frac{6EI}{\ell^2} = EI\left[\frac{6}{3^2}\right] = 0.667\ EI$

$k_{54} = -EI[0.667]$

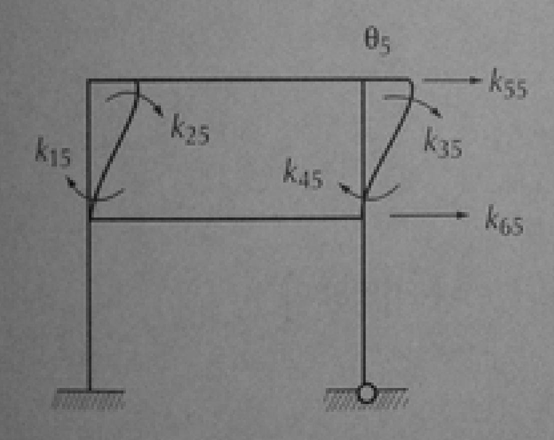
**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

Cálculo de $k_{64}$ :




$k_{64} = EI\left[0.48\right]$

$$\frac{3EI}{\ell^2} = EI\left[\frac{3}{4^2}\right]EI = 0.187\ EI$$




$$k_{15} = k_{51} = -EI\left[0.667\right]$$

También se puede calcular directamente como:

$$k_{15} = -\frac{6EI}{\ell^2} = -EI\left[\frac{6}{3^2}\right] = -EI\left[0.667\right]$$

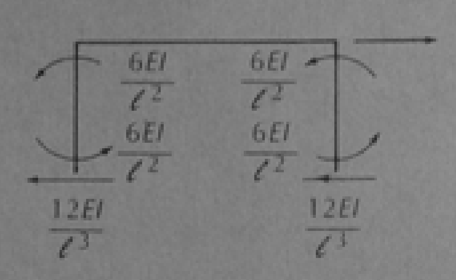
$$k_{25} = k_{52} = -EI\left[0.667\right]$$

$$k_{35} = k_{53} = -EI\left[0.667\right]$$

$$k_{45} = k_{54} = -EI\left[0.667\right]$$

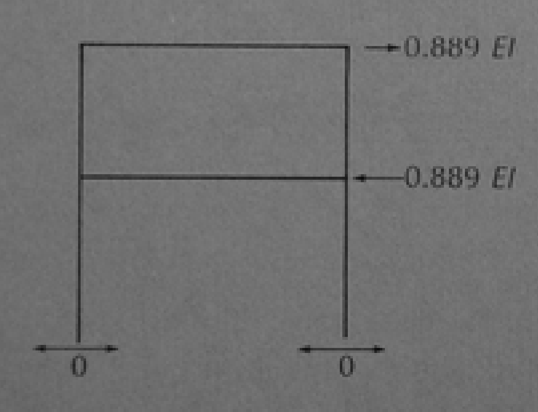
**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

Cálculo de $k_{55}$:

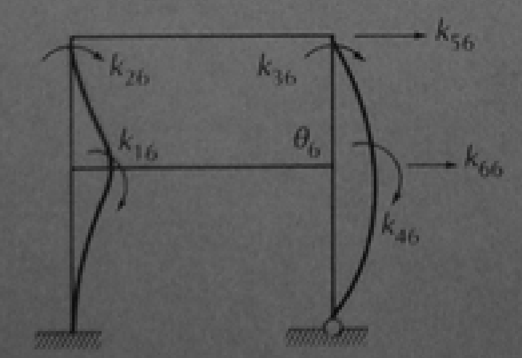



$$\frac{24EI}{\ell^3} = EI\left[\frac{24}{3^3}\right] = EI[0.889]$$

Cálculo de $k_{65}$:




$$k_{65} = -EI[0.889]$$




$$k_{16} = k_{61} = EI[0.292]$$

**EJEMPLO 5.8 *(continuación)***

También se puede calcular de la siguiente manera:

$$k_{16} = -\frac{6EI}{\ell_{AB}^2} + \frac{6EI}{\ell_{BC}^2} = EI\left[-\frac{6}{4^2} + \frac{6}{3^2}\right] = EI[0.292]$$

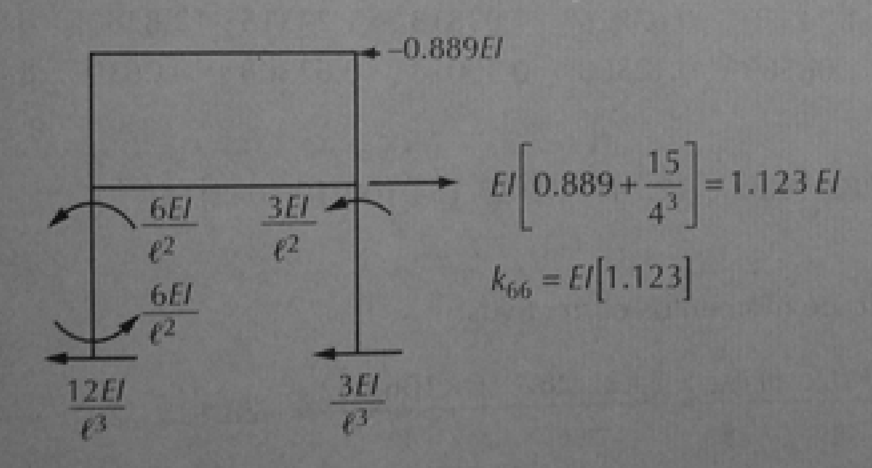
$$k_{26} = k_{62} = EI[0.667]$$

$$k_{36} = k_{63} = EI[0.667]$$

$$k_{46} = k_{64} = EI[0.48]$$

$$k_{56} = k_{65} = EI[0.889]$$

Cálculo de $k_{66}$:




Paso *d*) Cálculo de rotaciones y desplazamientos reales:

$\{\theta\} = -[k]^{-1}\{P\}$ (ecuación 5.24)

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{26} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{61} & k_{62} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

$$k = \begin{bmatrix} 3.000 & 0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 & 0.292 \\ 0.667 & 2.000 & 0.333 & 0 & -0.667 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 2.000 & 0.667 & -0.667 & 0.667 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & 2.750 & -0.667 & 0.480 \\ -0.667 & -0.667 & -0.667 & -0.667 & 0.889 & -0.889 \\ 0.292 & 0.667 & 0.667 & 0.480 & -0.889 & 1.123 \end{bmatrix}$$

$$-P = \{+15.0, \quad +22.5, \quad -22.5, \quad -15.0, \quad +8.0, \quad +6.0\}$$

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6060 & -0.00683 & 0.18835 & 0.11823 & 1.74530 & 1.06569 \\ -0.00683 & 0.73036 & 0.06064 & 0.16771 & 0.83726 & 0.12308 \\ 0.18835 & 0.06064 & 0.73672 & -0.00208 & 1.03818 & 0.30018 \\ 0.11823 & 0.16771 & -0.00208 & 0.54259 & 1.24315 & 0.62308 \\ 1.74530 & 0.83726 & 1.03818 & 1.24315 & 12.83807 & 8.06392 \\ 1.06569 & 0.12308 & 0.30018 & 0.62308 & 8.06392 & 8.47928 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \{23.282, 19.887, -2.249, 11.139, 154.100, 106.042\}/EI$$

Paso e) Cálculo de momentos correctivos.

$$m_{AB} = \frac{2EI\theta_1}{\ell_{AB}} - \frac{6EI\theta_6}{\ell_{AB}^2} = \frac{2 \times 23.282}{4} - \frac{6 \times 106.042}{4^2} = -28.125$$

$$m_{BA} = \frac{4EI}{\ell_{AB}}\theta_1 - \frac{6EI}{\ell_{AB}^2}\theta_6 = \frac{4 \times 23.282}{4} - \frac{6 \times 106.042}{4^2} = -16.484$$

$$m_{BE} = \frac{4EI}{\ell_{BE}}\theta_1 + \frac{2EI}{\ell_{BE}}\theta_4 = \frac{4 \times 23.282}{6} + \frac{2 \times 11.139}{6} = 19.234$$

$$m_{BC} = \frac{4EI\theta_1}{\ell_{BC}} + \frac{2EI\theta_2}{\ell_{BC}} - \frac{6EI\theta_5}{\ell_{BC}^2} + \frac{6EI\theta_6}{\ell_{BC}^2} =$$

$$= \frac{4 \times 23.282}{3} + \frac{2 \times 19.887}{3} - \frac{6 \times 154.100}{3^2} + \frac{6 \times 106.042}{3^2} = 12.267$$

**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

$$m_{CB}=\frac{2EI\theta_1}{\ell_{CB}}+\frac{4EI\theta_2}{\ell_{CB}}-\frac{6EI\theta_5}{\ell_{CB}^2}+\frac{6EI\theta_6}{\ell_{CB}^2}=$$

$$=\frac{2\times 23.282}{3}+\frac{4\times 19.887}{3}-\frac{6\times 154.100}{3^2}+\frac{6\times 106.042}{3^2}=10.001$$

$$m_{CD}=\frac{4EI\theta_2}{\ell_{CD}}+\frac{2EI\theta_3}{\ell_{CD}}=\frac{4\times 19.887}{6}+\frac{2(-2.249)}{6}=12.508$$

$$m_{DC}=\frac{2EI\theta_2}{\ell_{DC}}+\frac{4EI\theta_3}{\ell_{DC}}=\frac{2\times 19.887}{6}+\frac{4(-2.249)}{6}=5.130$$

$$m_{DE}=\frac{4EI\theta_3}{\ell_{DE}}+\frac{2EI\theta_4}{\ell_{DE}}-\frac{6EI\theta_5}{\ell_{DE}^2}+\frac{6EI\theta_6}{\ell_{DE}^2}=$$

$$=\frac{4(-2.249)}{3}+\frac{2\times 11.139}{3}-\frac{6\times 154.100}{3^2}+\frac{6\times 106.042}{3^2}=-27.611$$

$$m_{ED}=\frac{2EI\theta_3}{\ell_{ED}}+\frac{4EI\theta_4}{\ell_{ED}}-\frac{6EI\theta_5}{\ell_{ED}^2}+\frac{6EI\theta_6}{\ell_{ED}^2}=$$

$$=\frac{2(-2.249)}{3}+\frac{4\times 11.139}{3}-\frac{6\times 154.100}{3^2}+\frac{6\times 106.042}{3^2}=-18.686$$

$$m_{EB}=\frac{2EI\theta_1}{\ell_{EB}}+\frac{4EI\theta_4}{\ell_{EB}}=\frac{2\times 23.282}{6}+\frac{4\times 11.139}{6}=15.187$$

$$m_{EF}=\frac{3EI\theta_4}{\ell_{EF}}-\frac{3EI\theta_6}{\ell_{EF}^2}=\frac{3\times 11.139}{4}-\frac{3\times 106.042}{4^2}=-11.529$$

Paso *f)* Cálculo de los momentos finales

$$M_{AB}=m_{AB}=-28.125\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA}=m_{BA}=-16.484\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE}=\overline{M}_{BE}+m_{BE}=-15.000+19.234=4.234\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}=m_{BC}=+12.267\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}=m_{CB}=+10.001\text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}=\overline{M}_{CD}+m_{CD}=-22.500+12.508=-9.992\text{ ton}\cdot\text{m}$$

**EJEMPLO 5.8** ***(continuación)***

$$M_{DC} = \overline{M}_{DC} + m_{DC} = +22.500 + 5.130 = +27.630 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{DE} = m_{DE} = -27.611 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

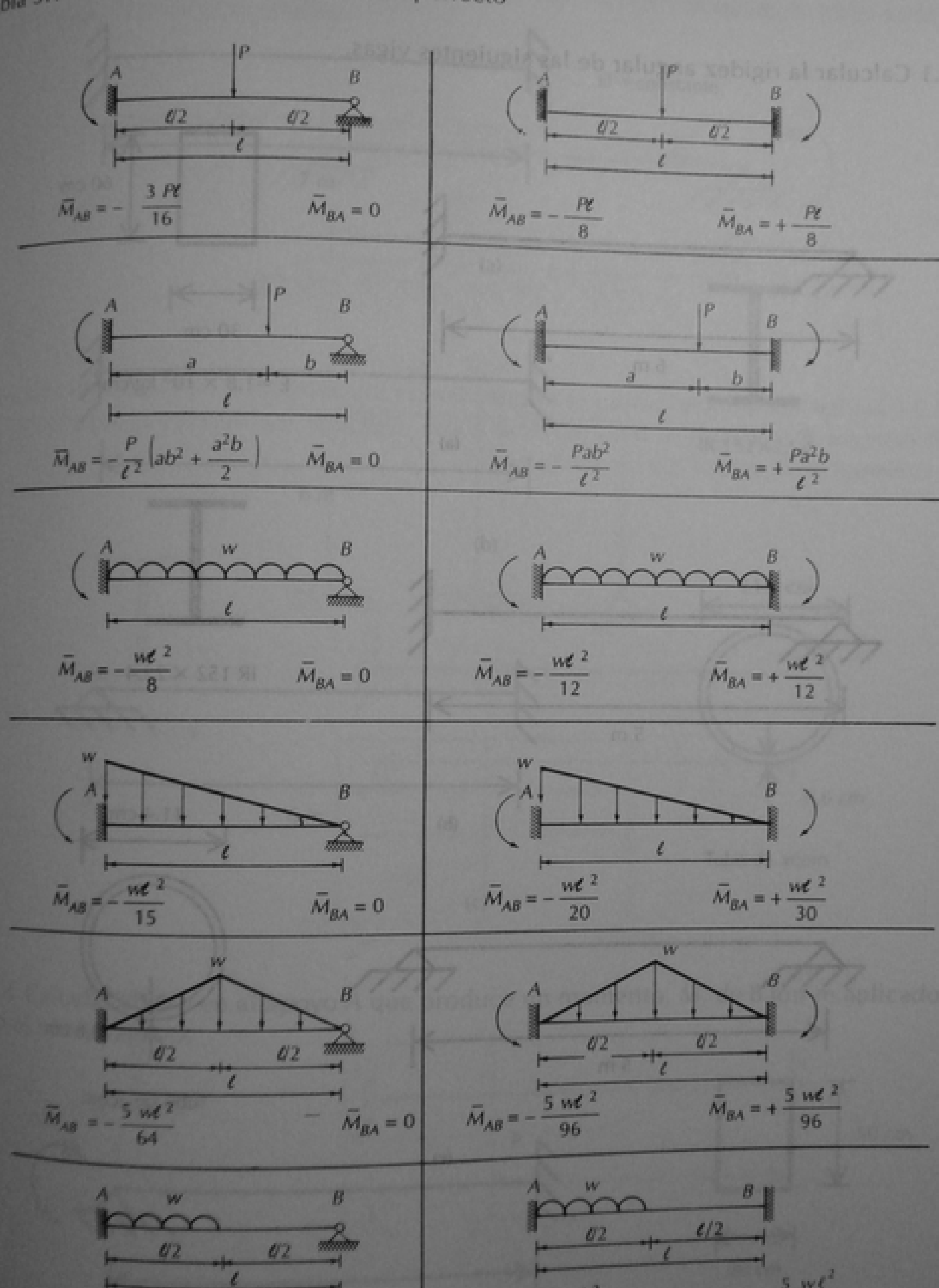
$$M_{ED} = m_{ED} = -18.686 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EB} = \overline{M}_{EB} + m_{EB} = +15.000 + 15.187 = +30.187 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

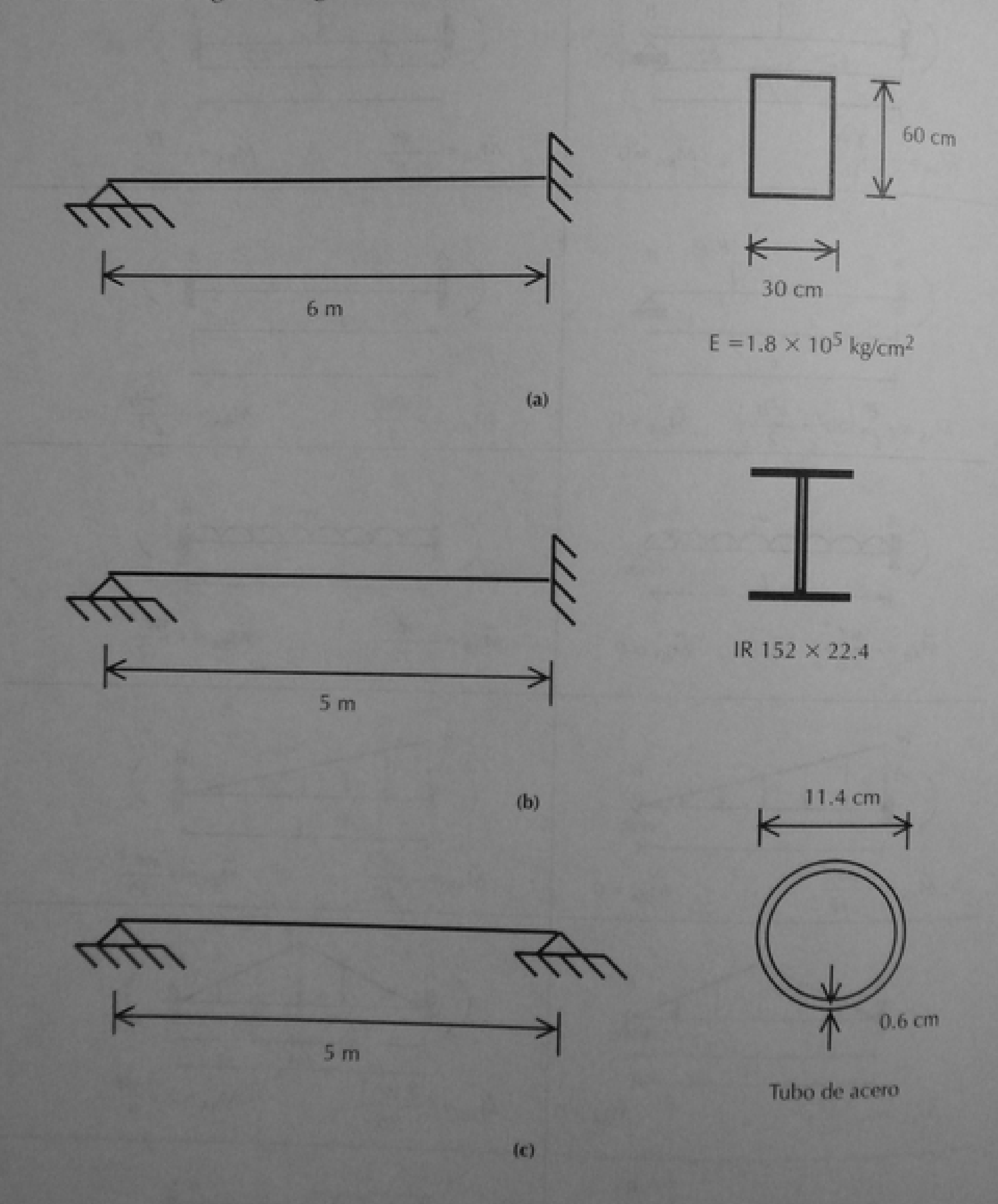
$$M_{EF} = m_{EF} = -11.529 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{FE} = 0$$

Tabla 5.1 Momentos de empotramiento perfecto



5.1 Calcular la rigidez angular de las siguientes vigas.



5.2 Calcular la rigidez lineal de las siguientes vigas.

EI =constante

7 m

(a)

IR 152×22.4

6 m

(b)

11.4 cm

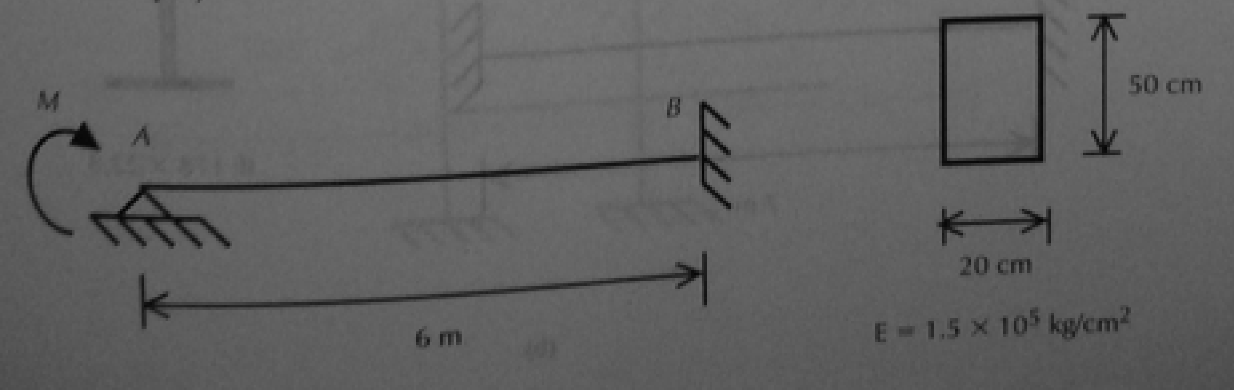
0.6 cm

Tubo de acero

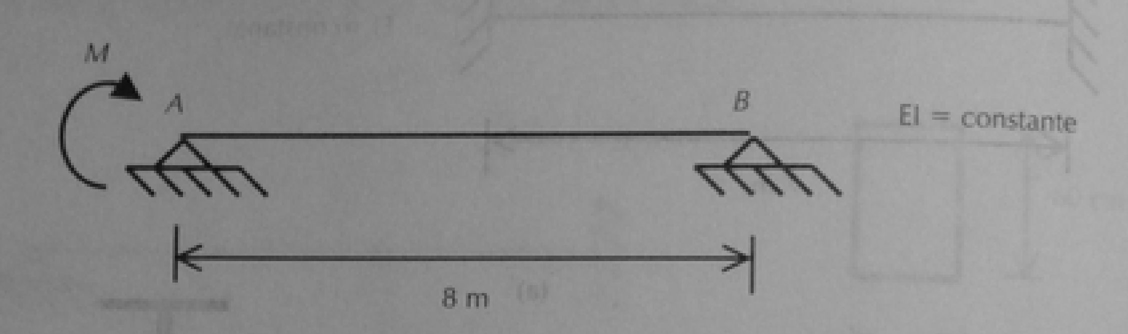
6 m

(c)

5.3 Calcular el giro en el apoyo *A* que produce un momento, *M*, de 8 ton-m aplicado en el mismo apoyo.



5.4 Calcular los giros en los apoyos *A* y *B* que produce un momento, *M*, de 10 ton-m aplicado en el apoyo *A*.




5.5 Calcular los momentos que se desarrollan en los apoyos de las siguientes vigas si el extremo *B* se desplaza 0.6 cm hacia abajo. Calcular los mismos momentos si el extremo *A* se desplaza 0.4 cm hacia abajo.

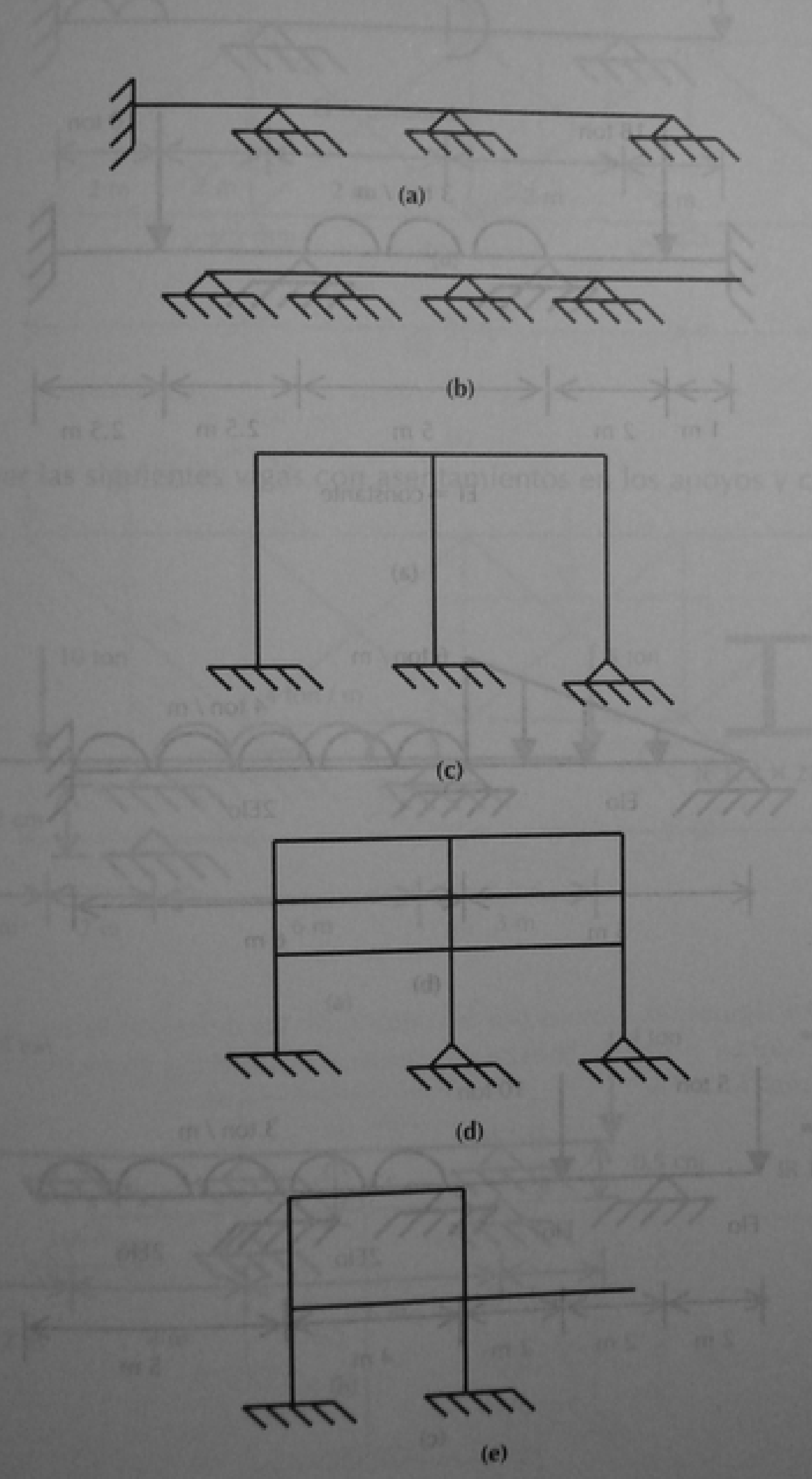
A
B
5 m
IR 152 × 22.4

**(a)**

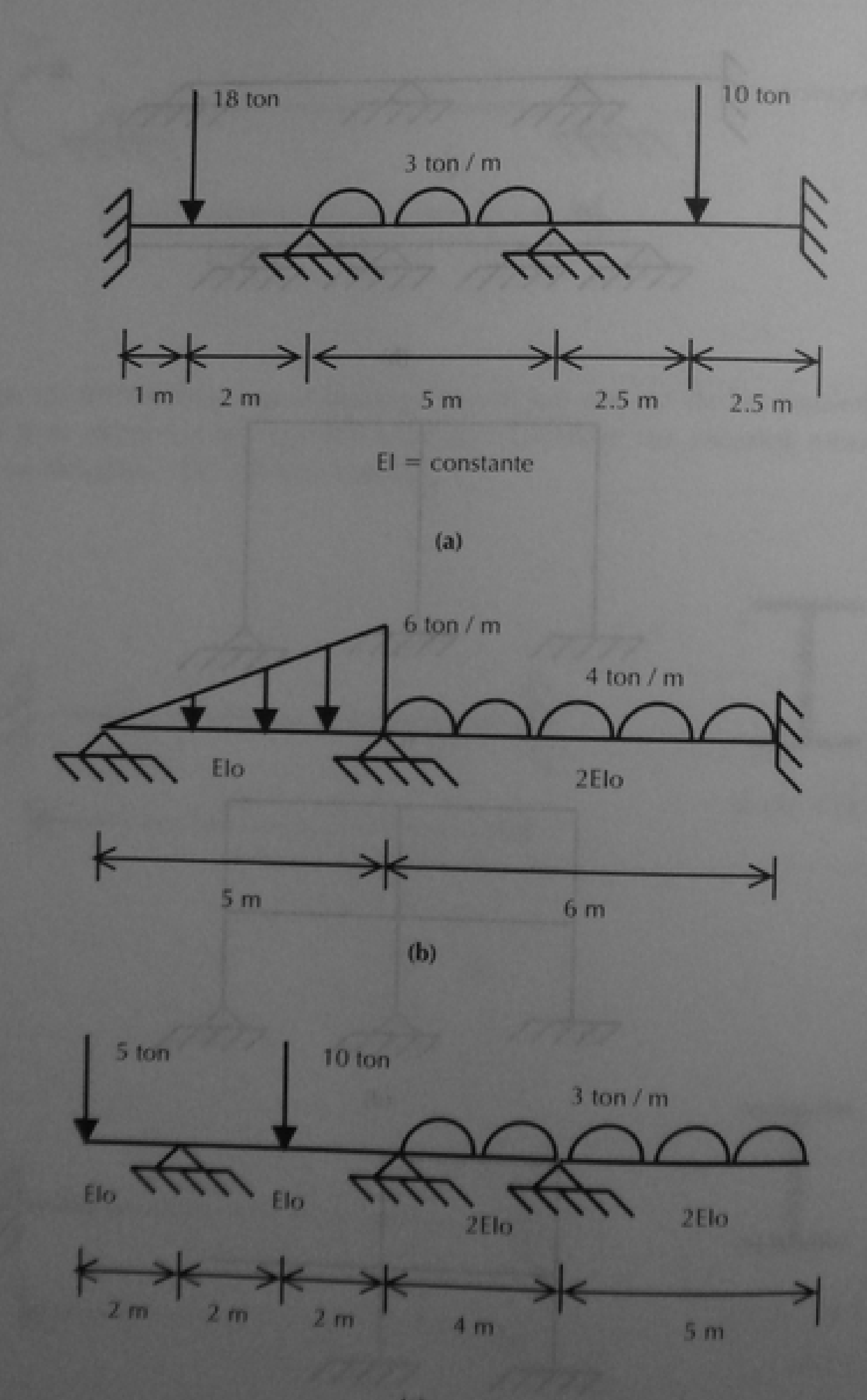
A
B
7 m
IE 178 × 22.8

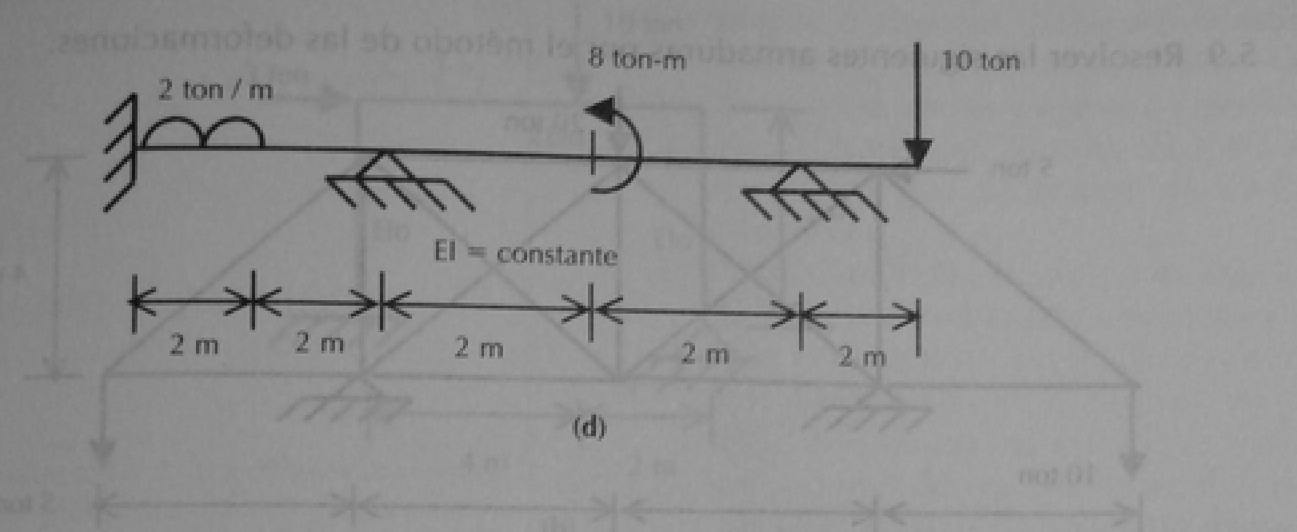
**(b)**

5.6 Calcular los grados de libertad o de indeterminación cinemática de las siguientes estructuras incluyendo aquellos que no sean necesarios para la determinación de los momentos flexionantes finales.



5.7 Resolver las siguientes vigas por el método de las deformaciones, trazando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Usar la tabla 5.1 para obtener los momentos de empotramiento perfecto.






(d)

5.8 Resolver las siguientes vigas con asentamientos en los apoyos y cargas.

10 ton
5 ton
4 ton / m
IE 178 × 22.8
2 cm
2 m
2 m
6 m
3 m

(a)

8 ton
4 ton
IR 152 × 22.4
0.5 cm
1.5 cm
2 m
4 m
6 m
2 m

(b)

5.9 Resolver las siguientes armaduras por el método de las deformaciones.

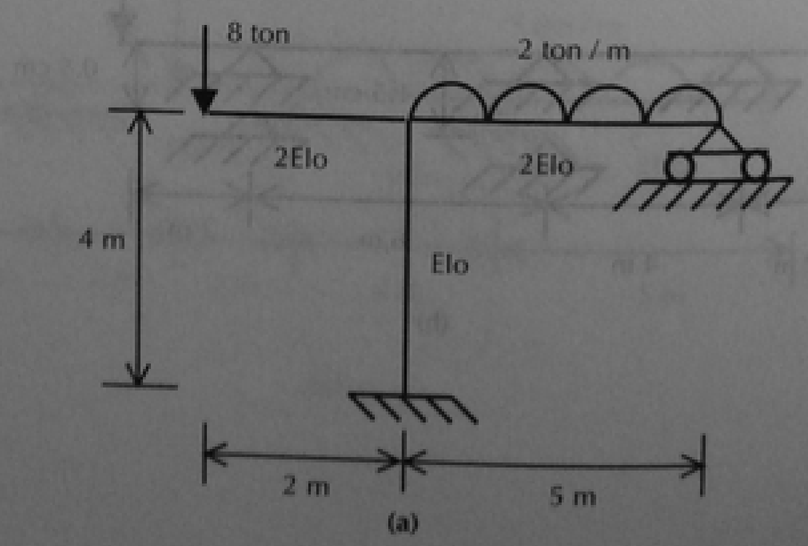
5 ton
20 ton
4 m
10 ton
5 ton
4 @ 6 m = 24 m
AE = constante

(a)

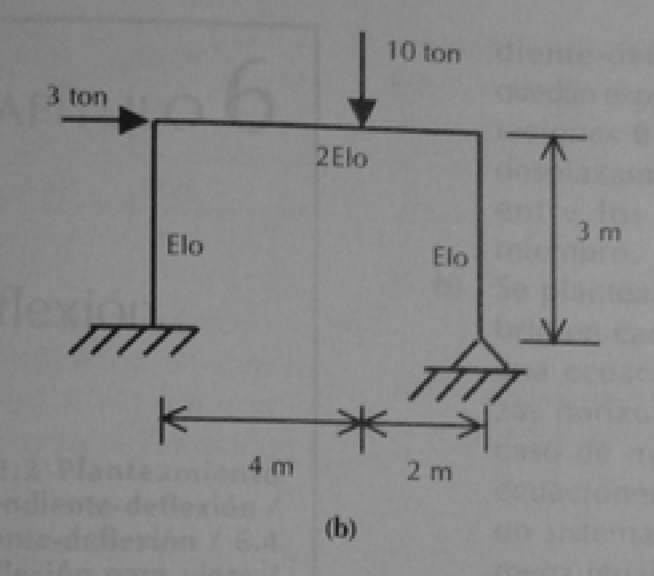
10 ton
4 m
30 ton
4 @ 8 m = 32 m
AE = constante

(b)

5.10 Resolver los siguientes marcos por el método de las deformaciones, trazando los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante. Usar el planteamiento matricial.

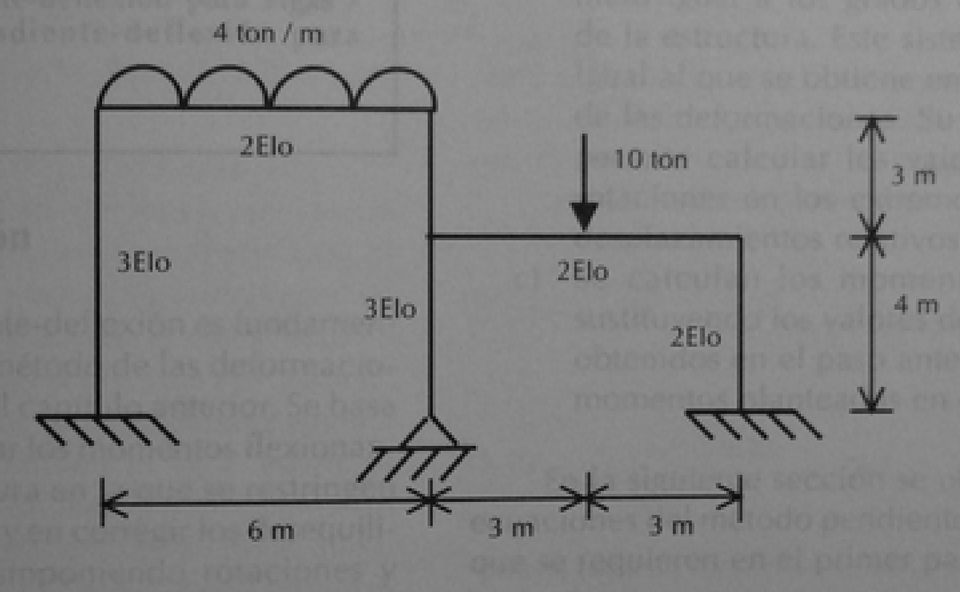



(a)



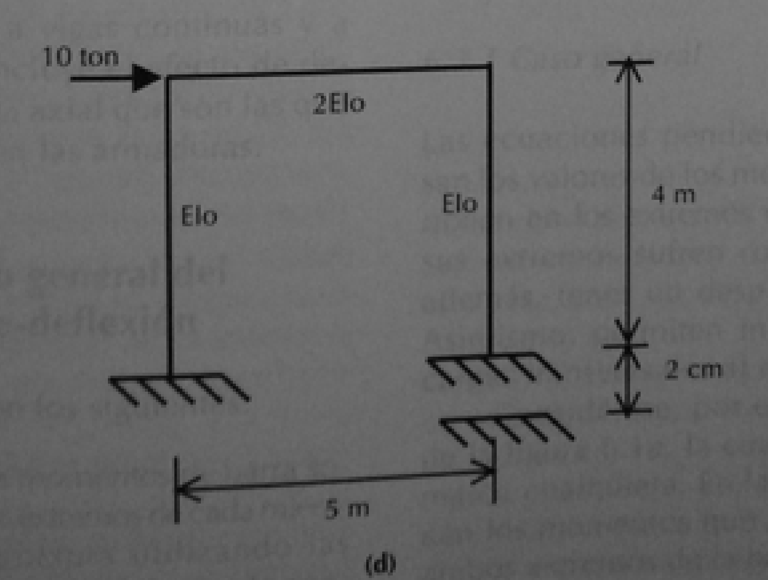
10 ton
3 ton
2EIo
EIo
EIo
3 m
4 m
2 m


(b)



4 ton / m
2EIo
3EIo
3EIo
10 ton
3 m
2EIo
4 m
2EIo
6 m
3 m
3 m


(c)



10 ton
2EIo
EIo
EIo
4 m
2 cm
5 m


(d)

# CAPÍTULO 6

## Método pendiente-deflexión

**6.1 Introducción / 2.2 Planteamiento general del método pendiente-deflexión / 6.3 Ecuaciones pendiente-deflexión / 6.4 Método pendiente-deflexión para vigas / 5.5 Método pendiente-deflexión para marcos**

### 6.1 Introducción

El método pendiente-deflexión es fundamentalmente igual al método de las deformaciones estudiado en el capítulo anterior. Se basa también en calcular los momentos flexionantes en una estructura en la que se restringen las deformaciones y en corregir los desequilibrios resultantes imponiendo rotaciones y desplazamientos lineales en los nudos de la estructura. Tiene la ventaja de que la sistematización de los cálculos es más clara. Es aplicable solamente a vigas continuas y a marcos, porque no incluye el efecto de deformaciones por carga axial que son las que producen esfuerzos en las armaduras.

### 6.2 Planteamiento general del método pendiente-deflexión

Los pasos a seguir son los siguientes.

a) Se plantean los momentos de barra sobre apoyo en los extremos de cada miembro de la estructura utilizando las llamadas ecuaciones del método pendiente-deflexión. Estos momentos quedan expresados en términos de las rotaciones $\theta$ en los extremos y de los desplazamientos lineales relativos $\Delta$ entre los dos extremos de cada miembro.

b) Se plantean una ecuación de equilibrio en cada nudo de la estructura y una ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales en cada piso, en el caso de marcos. Al establecer estas ecuaciones de equilibrio, se obtiene un sistema de ecuaciones de un número igual a los grados de libertad de la estructura. Este sistema resulta igual al que se obtiene en el método de las deformaciones. Su resolución permite calcular los valores de las rotaciones en los extremos y de los desplazamientos relativos.

c) Se calculan los momentos finales sustituyendo los valores de $\theta$ y de $\Delta$, obtenidos en el paso anterior, en los momentos planteados en el paso *a*.

En la siguiente sección se obtienen las ecuaciones del método pendiente-deflexión que se requieren en el primer paso.

### 6.3 Ecuaciones pendiente-deflexión

#### *6.3.1 Caso general*

Las ecuaciones pendiente-deflexión expresan los valores de los momentos que se desarrollan en los extremos de una barra cuando sus extremos sufren rotaciones y pueden, además, tener un desplazamiento relativo. Asimismo, permiten incluir los efectos de cargas transversales al eje de la barra.

Considérese, por ejemplo, la barra *AB* de la figura 6.1*a*, la cual forma parte de un marco cualquiera. En la figura 6.1*b* se indican los momentos que se desarrollarían en ambos extremos de la barra, si el extremo *A*

experimenta una rotación $\theta_A$. Estos momentos se han calculado ya en la figura 5.1 del capítulo anterior y tienen los siguientes valores:

$$M'_{AB} = \frac{4EI\theta_A}{\ell} \qquad (6.1)$$

que es la ecuación 4 de dicha figura; y por la ecuación 2 de la misma figura:

$$M'_{BA} = \frac{2EI\theta_A}{\ell} \qquad (6.2)$$

De manera similar, si el extremo $B$ experimenta una rotación $\theta_B$, como se muestra en la figura 6.1*c*, los momentos en los extremos tienen los siguientes valores:

$$M''_{AB} = \frac{2EI\theta_B}{\ell} \qquad (6.3)$$

$$M''_{BA} = \frac{4EI\theta_B}{\ell} \qquad (6.4)$$

Si los extremos sufren un desplazamiento relativo, como en la figura 6.1*d*, los momentos que se desarrollan en dichos extremos son los que se han calculado en la figura 5.3, o sea,

$$M'''_{AB} = M'''_{BA} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \qquad (6.5)$$

Finalmente, en la figura 6.1*e* se señalan los momentos de empotramiento perfecto que producen las cargas aplicadas a la barra.

Los momentos totales en los extremos de la barra serán las sumas, en cada uno de ellos, de los momentos de las figuras 6.1*b* a 6.1*e*. Haciendo esta sumas, y sustituyendo los valores proporcionados por las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$M_{AB} = \frac{4EI\theta_A}{\ell} + \frac{2EI\theta_B}{\ell} - \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \pm \overline{M}_{AB} \qquad (6.6)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI\theta_A}{\ell} + \frac{4EI\theta_B}{\ell} - \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \pm \overline{M}_{BA} \qquad (6.7)$$

Ordenando las ecuaciones 6.6 y 6.7, y usando la notación $I/\ell = K$ (factor de rigidez) y $\Delta / \ell = R$ (rotación de la barra), las ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) \pm \overline{M}_{AB} \qquad (6.8)$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) \pm \overline{M}_{BA} \qquad (6.9)$$

Las ecuaciones 6.8 y 6.9 son las ecuaciones pendiente-deflexión en su forma usual. Debe recordarse que las rotaciones $\theta$, y los momentos asociados a ellas, son positivos cuando tienen el sentido horario, como en las figuras 6.1*b* y 6.1*c*. Por lo que se refiere a los momentos producidos por los desplazamientos relativos $\Delta$, si la cuerda que une los dos extremos gira en el sentido horario, como en la figura 6.1*d*, los momentos producidos en los extremos tienen signo negativo. Por esta razón, en las ecuaciones 6.8 y 6.9 el término $3R$ tiene signo negativo; entonces, si la cuerda que une los extremos de un miembro gira en sentido horario, el término $R$ debe considerarse positivo y se debe conservar el signo negativo de $3R$ en estas acuaciones. El signo de los momentos de empotramiento perfecto depende del sentido en que actúan las fuerzas aplicadas a las barras. En general, para vigas con cargas aplicadas hacia abajo, son negativos en el extremo izquierdo y positivos en el extremo derecho.

### *6.3.2 Ecuaciones modificadas*

Es frecuente el caso de que las columnas de los marcos, o algunas de ellas por lo menos,

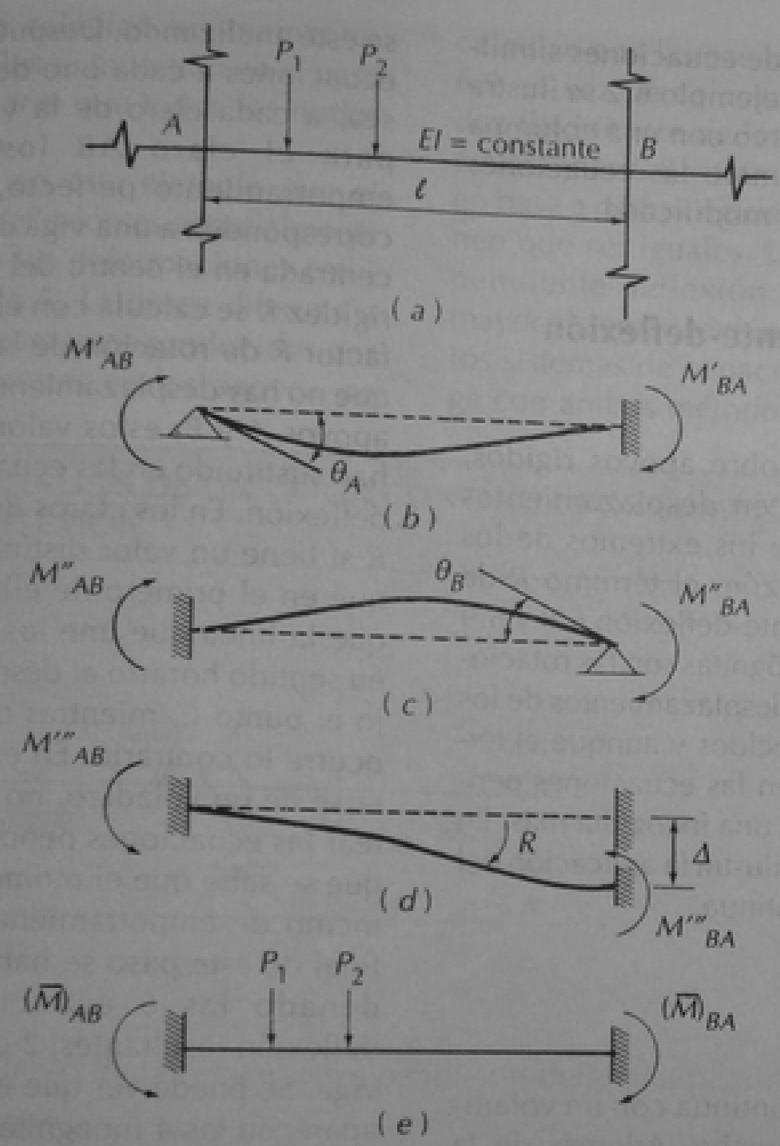



**Figura 6.1.** Elementos que intervienen en las ecuaciones pendiente-deflexión

estén articuladas en sus bases. Estos marcos pueden resolverse con las ecuaciones generales deducidas en la sección anterior, haciendo que el momento en el extremo articulado sea igual a 0. Pero a veces resulta conveniente emplear ecuaciones pendiente-deflexión deducidas especialmente para miembros que tengan un extremo articulado. Si se supone por ejemplo que el extremo articulado es el $A$, las ecuaciones modificadas pueden obtenerse haciendo $M_{AB}$ igual a 0 en la ecuación 6.8, despejando $\theta_A$ en esta ecuación y sustituyendo el valor obtenido en la ecuación 6.9, de tal manera que el momento $M_{BA}$ quede expresado en términos de $\theta_B$ y de $R$ como incógnitas únicamente. Los resultados son los siguientes:

$$\theta_A = -\frac{1}{2}\theta_B + \frac{3}{2}R - \frac{\overline{M}_{BA}}{4EK} \qquad (6.10)$$

$$M_{BA} = 3EK(\theta_B - R) + \overline{M}_{BA} - \frac{1}{2}\overline{M}_{AB} \qquad (6.11)$$

Si se usa la ecuación modificada 6.11, ya no es necesario plantear una ecuación para $M_{AB}$ con lo que ya no aparece $\theta_A$ como

incógnita y el número de ecuaciones simultáneas se reduce. En el ejemplo 6.2 se ilustra la resolución de un marco con una columna articulada, usando primero las ecuaciones generales y después la modificada.

## 6.4 Método pendiente-deflexión para vigas

En el caso de vigas sobre apoyos rígidos, normalmente no existen desplazamientos lineales relativos entre los extremos de los miembros. Por esta razón, el término $R$ de las ecuaciones pendiente-deflexión 6.8 y 6.9 es nulo y las únicas incógnitas son las rotaciones $\theta$. Cuando existen desplazamientos de los apoyos, éstos son conocidos y aunque el término $R$ sí tiene valor en las ecuaciones pendiente-deflexión, no es una incógnita más. En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del método a una viga continua.

### Ejemplo 6.1

Se trata de una viga continua con un voladizo en el extremo derecho. Además de la acción de las cargas indicadas, el apoyo $C$ tiene un desplazamiento hacia abajo de 1.5 cm. Como los momentos flexionantes producidos por el asentamiento de los apoyos dependen de la rigidez a flexión de la viga, es necesario conocer el valor numérico del parámetro $EI$. Esta viga tiene 4 grados de libertad que son las rotaciones $\theta_A$, $\theta_B$, $\theta_C$ y $\theta_D$. Por lo tanto, al plantear el conjunto de ecuaciones pendiente-deflexión debe llegarse a un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas.

En el paso *a* se han planteado en primer término las ecuaciones pendiente-deflexión en su forma general. Los subíndices $A$ y $B$ se refieren a los dos extremos de un miembro cualquiera y pueden por lo tanto modificarse según el miembro que se esté analizando. Después se aplican estas ecuaciones a cada uno de los miembros, o sea, a cada claro de la viga. Por ejemplo, para el claro $AB$ los momentos de empotramiento perfecto, $\overline{M}$, son los que corresponden a una viga con una carga concentrada en el centro del claro, el factor de rigidez $K$ se calcula con el claro de 4 m, y el factor $R$ de rotación de la barra vale 0 porque no hay desplazamiento relativo entre los apoyos $A$ y $B$; estos valores de $\overline{M}$, $K$ y $R$ se han sustituido en las ecuaciones pendiente-deflexión. En los claros $BC$ y $CD$, el término $R$ sí tiene un valor distinto de 0; obsérvese que en el primero de ellos es positivo porque la línea que une los apoyos $B$ y $C$ gira en sentido horario al desplazarse hacia abajo el punto $C$, mientras que en el claro $CD$ ocurre lo contrario. En el claro $DE$, por tratarse de un voladizo, no es necesario plantear las ecuaciones pendiente-deflexión, ya que se sabe que el momento $M_{DE}$ es el momento de empotramiento del voladizo. Al final de este paso se han simplificado y ordenado las 6 ecuaciones pendiente-deflexión resultantes, 2 por cada claro de la viga. Se puede ver que en estas ecuaciones aparecen las 4 incógnitas mencionadas.

En el paso *b* se plantean las ecuaciones de equilibrio. Como se tienen 4 incógnitas, es necesario tener también 4 ecuaciones de equilibrio. La primera indica que el momento en el apoyo $A$ es igual a 0, porque es un apoyo libre. La otras 3 señalan que cada nudo está en equilibrio, o sea, que los momentos flexionantes a ambos lados de un apoyo cualquiera deben ser iguales. Una vez planteadas esta 4 ecuaciones de equilibrio, se sustituyen en ellas los valores de los momentos obtenidos en el paso anterior, con lo cual ya se tiene el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Resolviendo este sistema se obtienen los valores de las rotaciones $\theta$ en cada apoyo.

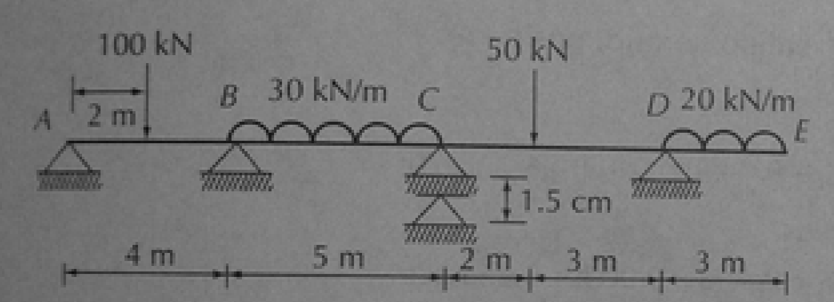
Sustituyendo los valores de las rotaciones $\theta$ en las ecuaciones obtenidas al final

del paso *a*, ya se calculan los momentos finales. Estos cálculos se muestran en el paso *c*. Puede comprobarse que todos los nudos están en equilibrio.

Se puede ver en este ejemplo que el método pendiente-deflexión es esencialmente igual al método de las deformaciones estudiado en el capítulo 5. La única diferencia estriba en que los momentos producidos por las rotaciones impuestas en los apoyos, se calculan con las ecuaciones generales 6.8 y 6.9 en vez de calcularlas en base a la rigidez flexionante de los miembros; como las ecuaciones 6.8 y 6.9 se obtuvieron también en base a dichas rigideces, los resultados tienen que ser iguales. La ventaja del método pendiente-deflexión es que permite una mayor sistematización de los cálculos, pero los sistemas de ecuaciones a los que se llega con ambos métodos son iguales.

## EJEMPLO 6.1. ANÁLISIS DE UNA VIGA CONTINUA POR EL MÉTODO PENDIENTE-DEFLEXIÓN

DATOS:




$EI = 50 \times 10^6$ kN-cm$^2$

Paso a) Planteamiento de las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro.

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) \pm \overline{M}_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) \pm \overline{M}_{BA}$$

Claro A-B

$$\overline{M}_{AB} = -\frac{100 \times 4}{8} = -50 \text{ kN-m} = -5 \times 10^3 \text{ kN-cm} \quad \text{(Ver tabla 5.1)}$$

$$\overline{M}_{BA} = +\frac{100 \times 4}{8} = +5 \times 10^3 \text{ kN-cm}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{50 \times 10^6}{E \times 400} = \frac{0.125 \times 10^6}{E} \text{ cm}^3$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = 0$$

$$M_{AB} = 2 \times 0.125 \times 10^6 (2\theta_A + \theta_B) - 5 \times 10^3$$

$$M_{BA} = 2 \times 0.125 \times 10^6 (2\theta_B + \theta_A) + 5 \times 10^3$$

**EJEMPLO 6.1 *(continuación)***

Claro B-C

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{30\times 5^2}{12} = -62.5 \text{ kN}-\text{m} = -6.25\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm (ver tabla 5.1)}$$

$$\overline{M}_{CB} = +\frac{30\times 5^2}{12} = +\ 6.25\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{50\times 10^6}{E\times 500} = \frac{0.1\times 10^6}{E}\text{cm}^3$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{1.5}{500} = 0.003 \text{ (sentido horario, positivo)}$$

$$M_{BC} = 2\times 0.1\times 10^6(2\theta_B + \theta_C - 3\times 0.003) - 6.25\times 10^3$$

$$M_{CB} = 2\times 0.1\times 10^6(2\theta_C + \theta_B - 3\times 0.003) + 6.25\times 10^3$$

Claro C-D

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{50\times 2\times 3^2}{5^2} = -36 \text{ kN}-\text{m} = -3.6\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm} \quad \text{(ver tabla 5.1)}$$

$$\overline{M}_{DC} = \frac{50\times 2^2\times 3}{5^2} = 24 \text{ kN}-\text{m} = 2.4\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{50\times 10^6}{E\times 500} = \frac{0.1\times 10^6}{E} \text{ cm}^3$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{1.5}{500} = -0.003 \text{ (sentido antihorario, negativo)}$$

$$M_{CD} = 2\times 0.1\times 10^6(2\theta_C + \theta_D + 3\times 0.003) - 3.6\times 10^3$$

$$M_{DC} = 2\times 0.1\times 10^6(2\theta_D + \theta_C + 3\times 0.003) + 3.6\times 10^3$$

**EJEMPLO 6.1** ***(continuación)***

Claro D-E

$$\overline{M}_{DE} = -\frac{20 \times 3^2}{2} = -90 \text{ kN} - \text{m} = -9 \times 10^3 \text{ kN} - \text{cm}$$

Ordenando las ecuaciones pendiente-deflexión

$$M_{AB} = 10^3 [500\,\theta_A + 250\,\theta_B - 5]$$

$$M_{BA} = 10^3 [250\,\theta_A + 500\,\theta_B + 5]$$

$$M_{BC} = 10^3 [400\,\theta_B + 200\,\theta_C - 8.05]$$

$$M_{CB} = 10^3 [200\,\theta_B + 400\,\theta_C + 4.45]$$

$$M_{CD} = 10^3 [400\,\theta_C + 200\,\theta_D - 1.8]$$

$$M_{DC} = 10^3 [200\,\theta_C + 400\,\theta_D + 5.4]$$

Paso *b*) Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en cada nudo.

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$M_{DC} + M_{DE} = 0$$

Obsérvese que $M_{DE} = \overline{M}_{DE}$

Sustituyendo con las ecuaciones pendiente-deflexión:

$$\begin{aligned}
500\,\theta_A + 250\,\theta_B \qquad\qquad\qquad\qquad & - 5 = 0 \\
250\,\theta_A + 900\,\theta_B + 200\,\theta_C \qquad\qquad & - 3.05 = 0 \\
200\,\theta_B + 800\,\theta_C + 200\,\theta_D & + 2.65 = 0 \\
200\,\theta_C + 400\,\theta_D & - 3.60 = 0
\end{aligned}$$

**EJEMPLO 6.1 *(continuación)***

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\theta_A = 0.008731, \qquad \theta_B = 0.002537, \qquad \theta_C = -0.007082, \qquad \theta_D = 0.01254$$

Paso *c*) Cálculo de los momentos finales

$$M_{AB} = 10^3\left[500\times 0.008731 + 250\times 0.002537 - 5\right] = -0.200 \approx 0$$

$$M_{BA} = 10^3\left[250\times 0.008731 + 500\times 0.002537 + 5\right] = 8.451\times 10^3 \text{ kN-cm}$$

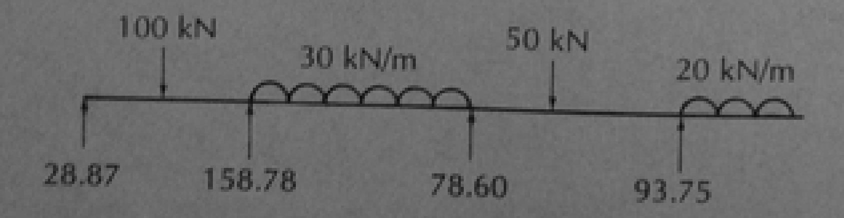
$$M_{BC} = 10^3\left[400\times 0.002537 + 200\ (-0.007082) - 8.05\right] = -8.451\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

$$M_{CB} = 10^3\left[200\times 0.002537 + 400(-0.007082) + 4.45\right] = 2.125\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

$$M_{CD} = 10^3\left[400(-0.007082) + 200\times 0.01254 - 1.80\right] = -2.125\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

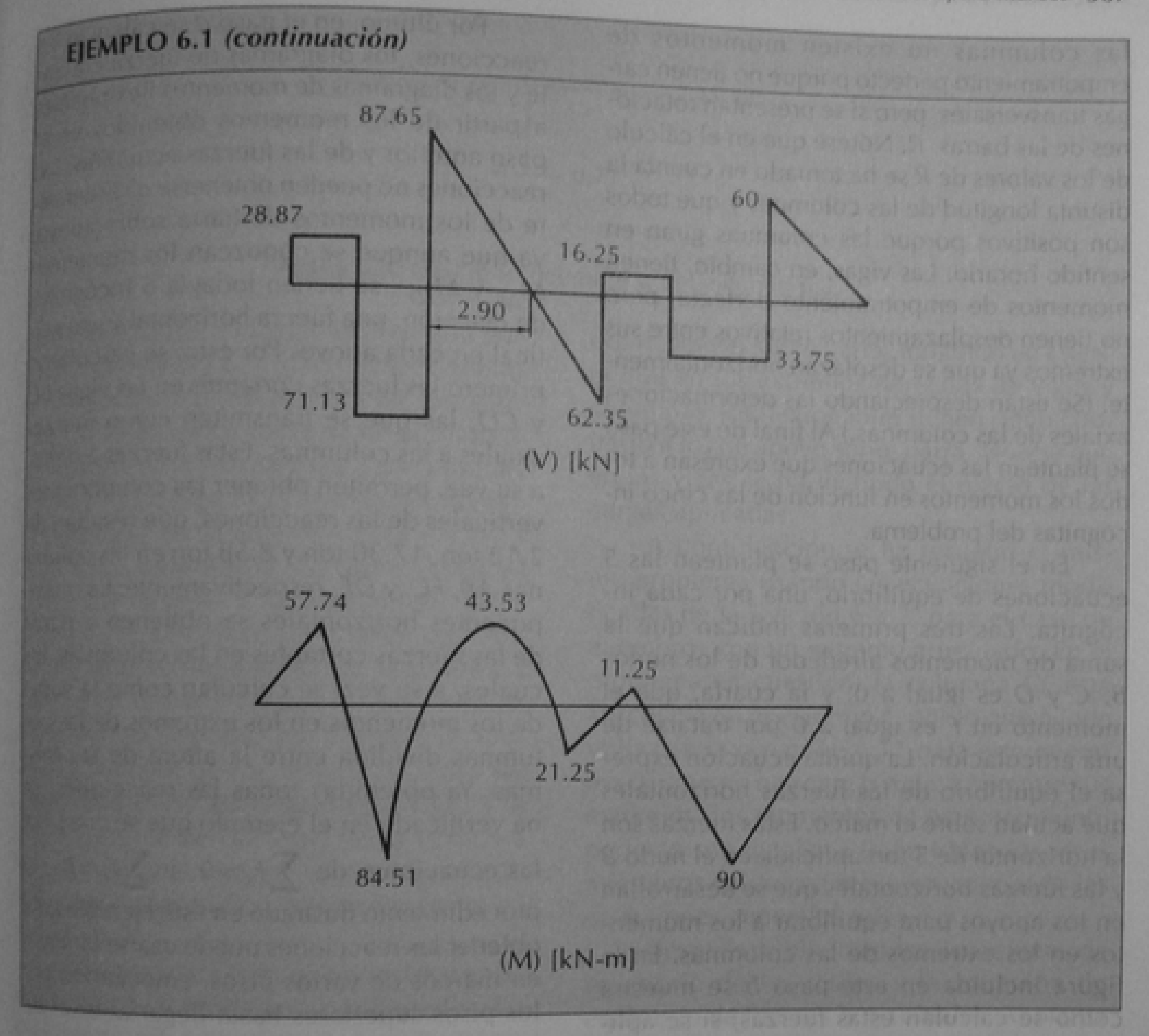
$$M_{DC} = 10^3\left[200(-0.007082) + 400\times 0.01254 + 5.40\right] = 9.000\times 10^3 \text{ kN}-\text{cm}$$

Paso *d*) Reacciones finales y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante




Reacciones (kN)

**EJEMPLO 6.1 *(continuación)***




## 6.5 Método pendiente-deflexión para marcos

En el caso de marcos, los nudos de la estructura pueden sufrir rotaciones y desplazamientos simultáneamente. Generalmente, en las ecuaciones pendiente-deflexión aparece, por lo tanto, el término *R*. Sin embargo, es frecuente que varios nudos tengan el mismo desplazamiento Δ, con lo cual se reduce el número de grados de libertad de la estructura. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.2**

Se trata de un marco de dos crujías y un solo piso con cargas verticales y horizontales. Una de las columnas es de mayor altura que las otras dos. La estructura tiene 5 grados de libertad: las rotaciones de los nudos *B, C, D,* y *F*, y el desplazamiento Δ que es igual para los nudos *B, C* y *D*. Obsérvese que en el apoyo *F* hay una rotación porque está articulado, mientras que en los otros apoyos, por estar empotrados, no hay rotación.

En el paso *a* se plantean las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro. En

las columnas no existen momentos de empotramiento perfecto porque no tienen cargas transversales, pero sí se presentan rotaciones de las barras, *R*. Nótese que en el cálculo de los valores de *R* se ha tomado en cuenta la distinta longitud de las columnas y que todos son positivos porque las columnas giran en sentido horario. Las vigas, en cambio, tienen momentos de empotramiento perfecto, pero no tienen desplazamientos relativos entre sus extremos ya que se desplazan horizontalmente. (Se están despreciando las deformaciones axiales de las columnas.) Al final de este paso se plantean las ecuaciones que expresan a todos los momentos en función de las cinco incógnitas del problema.

En el siguiente paso se plantean las 5 ecuaciones de equilibrio, una por cada incógnita. Las tres primeras indican que la suma de momentos alrededor de los nudos *B*, *C* y *D* es igual a 0, y la cuarta, que el momento en *F* es igual a 0 por tratarse de una articulación. La quinta ecuación expresa el equilibrio de las fuerzas horizontales que actúan sobre el marco. Estas fuerzas son la horizontal de 5 ton aplicada en el nudo *B* y las fuerzas horizontales que se desarrollan en los apoyos para equilibrar a los momentos en los extremos de las columnas. En la figura incluida en este paso *b* se muestra cómo se calculan estas fuerzas; si se aplican momentos positivos en los extremos de las columnas, las fuerzas en los apoyos tienen que equilibrar a los momentos y por lo tanto su sentido es hacia la derecha. Sustituyendo en estas ecuaciones los valores de los momentos calculados al final del paso *a*, se obtiene el sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas. Resolviéndolo, se tienen ya los valores de $\theta_B$, $\theta_C$, $\theta_D$, $\theta_F$ y $\Delta$.

A continuación, en el paso *c*, se sustituyen los valores de las incógnitas en las ecuaciones que están al final del paso *a* , con lo cual se obtienen los momentos buscados. Obsérvese que estos momentos son de barra sobre apoyo.

Por último, en el paso *d* se calculan las reacciones, los diagramas de fuerza cortante y los diagramas de momentos flexionantes a partir de los momentos obtenidos en el paso anterior y de las fuerzas actuantes. Las reacciones no pueden obtenerse directamente de los momentos de barra sobre apoyo, ya que aunque se conozcan los momentos $M_{AB}$ y $M_{ED}$ , se tienen todavía 6 incógnitas de reacción, una fuerza horizontal y una vertical en cada apoyo. Por esto, se calcularon primero las fuerzas cortantes en las vigas *BC* y *CD*, las que se transmiten como fuerzas axiales a las columnas. Estas fuerzas axiales, a su vez, permiten obtener las componentes verticales de las reacciones, que resultan de 2.12 ton, 17.30 ton y 8.58 ton en las columnas *AB*, *FC*, y *DE*, respectivamente. Las componentes horizontales se obtienen a partir de las fuerzas cortantes en las columnas, las cuales, a su vez, se calculan como la suma de los momentos en los extremos de las columnas dividida entre la altura de las mismas. Ya obtenidas todas las reacciones, se ha verificado en el ejemplo que se cumplan las ecuaciones de $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ . El procedimiento ilustrado en este ejemplo para obtener las reacciones puede usarse también en marcos de varios pisos, empezando por los pisos superiores hasta llegar al nivel de los apoyos.

El diagrama de fuerzas normales en las columnas se ha trazado a partir de las fuerzas axiales que se calcularon anteriormente. Como todas son de compresión, se han trazado los diagramas con signo negativo y por debajo de las columnas si se miran desde la parte derecha de las mismas, o sea, suponiendo, según la convención de signos, que la parte inferior equivale al extremo izquierdo de una viga, y la parte superior, al extremo derecho.La fuerza normal en la viga *BC* se calculó de la siguiente manera. Si se analiza el nudo *B*, se observa que la fuerza externa de 5 ton se transmite como una fuer-

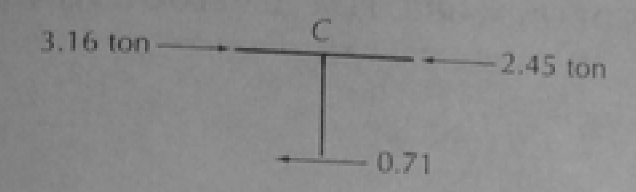



**Figura 6.2.** Equilibrio del nudo *C* del ejemplo 6.2

za de compresión a la viga *BC*. Por otra parte, la reacción $H_B$ calculada anteriormente en la columna *AB* resultó de 1.84 ton y actuaba de izquierda a derecha en el nudo *B*; este sentido de la fuerza indica que produce tensiones en la viga *BC*. Por lo tanto, la fuerza axial total en la viga es −5.00 + 1.84 = −3.16 ton (compresión). La fuerza axial en la viga *CD* es igual a la reacción $H_D$ de la columna *DE* calculada anteriormente. Obsérvese que su sentido es de izquierda a derecha en el nudo *D*, por lo que también produce compresiones en la viga *CD*. Obsérvese también que la diferencia entre las cargas axiales de las vigas *BC* y *CD* es la fuerza cortante de 0.71 ton de la columna *FC*, por lo que el nudo *C* está en equilibrio de fuerzas horizontales, como se muestra en la figura 6.2.

El diagrama de fuerzas cortantes se trazó a partir de los valores ya calculados. En la columna *AB*, por ejemplo, la fuerza cortante es la reacción horizontal de 1.84 ton en el apoyo *A*. Como la reacción va de derecha a izquierda, produce una fuerza cortante positiva si la columna se mira desde la parte derecha. Para la viga *BC*, la fuerza cortante en el extremo izquierdo es la reacción $V_B$ que se calculó al inicio del paso *d*; se mantiene constante hasta la carga vertical de 10 ton, donde se vuelve negativa de 7.88 ton y conserva este valor hasta el apoyo *C*. De manera semejante se calcularon los diagramas de fuerza cortante en los otros miembros.

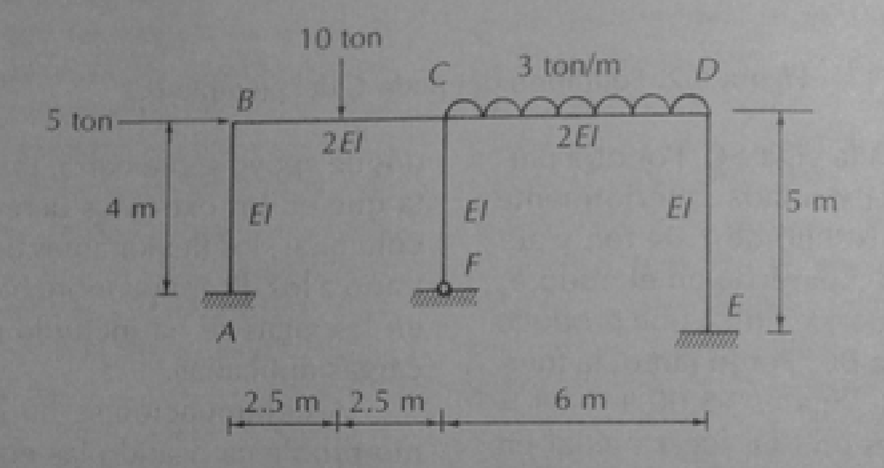
El diagrama de momentos flexionantes se trazó a partir de los momentos calculados de apoyo sobre barra, tomando en cuenta que en los extremos derechos de vigas y columnas, los flexionantes tienen signo contrario a los de apoyo sobre barra. Nótese que en las vigas se ha incluido el efecto de las cargas aplicadas.

A continuación,se ha resuelto el mismo problema usando las ecuaciones modificadas de la sección 6.3.2, para el caso de miembros con un extremo articulado. En el problema en cuestión, la columna *CF* está articulada en el extremo *F*, por lo que puede utilizarse la ecuación 6.11 para este miembro. Como no hay cargas aplicadas entre sus extremos, los momentos de empotramiento perfecto son iguales a 0. En todos los otros miembros del marco se siguen aplicando las ecuaciones generales 6.8 y 6.9.

Después se plantean las ecuaciones de equilibrio de los nudos y la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales. Ahora ya no es necesario plantear la ecuación $M_{FC} = 0$, ya que en las ecuaciones pendiente deflexión no aparece el término $\theta_F$ (ecuación 4 del paso *b*, en la solución anterior). Quedan entonces 4 ecuaciones simultáneas en vez de las 5 que se tenían anteriormente. Esta es la ventaja de usar las ecuaciones modificadas: se reduce el número de ecuaciones simultáneas. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de $\theta_B$, $\theta_C$ , $\theta_D$ y $\Delta$. Los valores de estos téminos resultan iguales a los de la solución anterior, por lo que los momentos serán también iguales. Ya no es necesario entonces calcularlos de nuevo.

## EJEMPLO 6.2. ANÁLISIS DE UN MARCO POR EL MÉTODO PENDIENTE-DEFLEXIÓN

DATOS:




Grados de libertad: $\theta_B$, $\theta_C$, $\theta_D$, $\theta_F$, $\Delta_B = \Delta_C = \Delta_D = \Delta$; 5 grados

Paso a) Planteamiento de las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro:

$$M_{AB} = 2EK\,(2\theta_A + \theta_B - 3R) \pm \overline{M}_{AB}$$
$$M_{BA} = 2EK\,(2\theta_B + \theta_A - 3R) \pm \overline{M}_{BA}$$

Miembro *AB*

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}_{BA} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\,I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{\Delta}{4} = 0.25\,\Delta$$

$$M_{AB} = 2 \times 0.25\,EI(2\theta_A + \theta_B - 0.75\,\Delta)$$

$$M_{BA} = 2 \times 0.25\,EI(2\theta_B + \theta_A - 0.75\,\Delta)$$

**EJEMPLO 6.2 *(continuación)***

Miembro *BC*

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{P\ell}{8} = -\frac{10\times 5}{8} = -6.25 \text{ ton}-\text{m}$$

$$\overline{M}_{CB} = \frac{P\ell}{8} = \frac{10\times 5}{8} = 6.25 \text{ ton}-\text{m}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{2I}{5} = 0.4\,I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = 0$$

$$M_{BC} = 2\times 0.4\,EI\,(2\theta_B + \theta_C) - 6.25$$

$$M_{CB} = 2\times 0.4\,EI\,(2\theta_C + \theta_B) + 6.25$$

Miembro *CD*

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{3\times 6^2}{12} = -9.0 \text{ ton}-\text{m}$$

$$\overline{M}_{DC} = \frac{w\ell^2}{12} = \frac{3\times 6^2}{12} = 9.0 \text{ ton}-\text{m}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{2I}{6} = 0.333\,I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = 0$$

$$M_{CD} = 2\times 0.333\,EI\,(2\theta_C + \theta_D) - 9.0$$

$$M_{DC} = 2\times 0.333\,EI\,(2\theta_D + \theta_C) + 9.0$$

**EJEMPLO 6.2 *(continuación)***

Miembro *CF*

$$\overline{M}_{CF} = \overline{M}_{FC} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\, I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{\Delta}{4} = 0.25\,\Delta$$

$$M_{CF} = 2 \times 0.25\, EI\,(2\theta_C + \theta_F - 0.75\,\Delta)$$

$$M_{FC} = 2 \times 0.25\, EI\,(2\theta_F + \theta_C - 0.75\,\Delta)$$

Miembro *DE*

$$\overline{M}_{DE} = \overline{M}_{ED} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{5} = 0.20\, I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{\Delta}{5} = 0.20\,\Delta$$

$$M_{DE} = 2 \times 0.20\, EI\,(2\theta_D + \theta_E - 0.60\,\Delta)$$

$$M_{ED} = 2 \times 0.20\, EI\,(2\theta_E + \theta_D - 0.60\,\Delta)$$

Ordenando las ecuaciones pendiente-deflexión y haciendo

$\theta_A = \theta_E = 0$ y $EI = 1$:

$$M_{AB} = 0.50\,\theta_B - 0.375\,\Delta$$

$$M_{BA} = \theta_B - 0.375\,\Delta$$

**EJEMPLO 6.2 (continuación)**

$$M_{BC} = 1.60\,\theta_B + 0.8\,\theta_C - 6.25$$

$$M_{CB} = 0.80\,\theta_B + 1.60\,\theta_C + 6.25$$

$$M_{CD} = 1.333\,\theta_C + 0.667\,\theta_D - 9.0$$

$$M_{DC} = 0.667\,\theta_C + 1.333\,\theta_D + 9.0$$

$$M_{CF} = \theta_C + 0.50\,\theta_F - 0.375\,\Delta$$

$$M_{FC} = 0.50\,\theta_C + \theta_F - 0.375\,\Delta$$

$$M_{DE} = 0.80\,\theta_D - 0.24\,\Delta$$

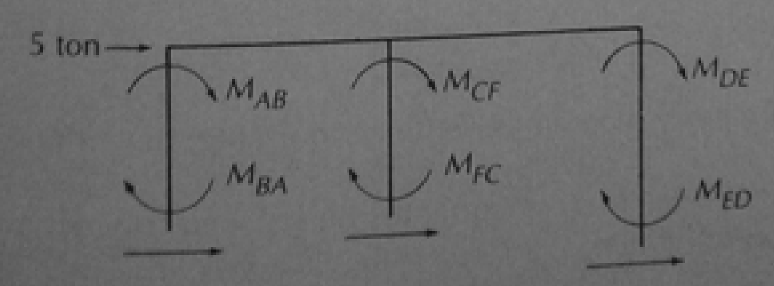
$$M_{ED} = 0.40\,\theta_D - 0.24\,\Delta$$

Paso *b*) Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

Ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (1)$$
$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0 \qquad (2)$$
$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \qquad (3)$$
$$M_{FC} = 0 \qquad (4)$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales:




$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} \qquad \frac{M_{CF} + M_{FC}}{\ell_{CF}} \qquad \frac{M_{DE} + M_{ED}}{\ell_{DE}}$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{CF} + M_{FC}}{4} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{5} + 5 = 0 \qquad (5)$$

**EJEMPLO 6.2** ***(continuación)***

Sustituyendo los valores de $M_{AB}$, $M_{BA}$, ..., $M_{ED}$ en las ecuaciones (1) a (5):

$$
\begin{array}{llllllll}
2.60\,\theta_B & +0.80\,\theta_C & & & -0.375\,\Delta & -6.25 & =0\\
0.80\,\theta_B & +3.933\,\theta_C & +0.667\,\theta_D & +0.50\,\theta_F & -0.375\,\Delta & -2.75 & =0\\
 & 0.667\,\theta_C & +2.133\,\theta_D & & -0.24\,\Delta & +9.00 & =0\\
 & 0.500\,\theta_C & & +\theta_F & -0.375\,\Delta & & =0\\
0.375\theta_B & +0.375\theta_C & +0.240\,\theta_D & +0.375\,\theta_F & -0.471\,\Delta & +5.0 & =0
\end{array}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\theta_B = 4.889,\quad \theta_C = 1.110,\quad \theta_D = -2.361,\quad \theta_F = 6.794,\quad \Delta = 19.598$$

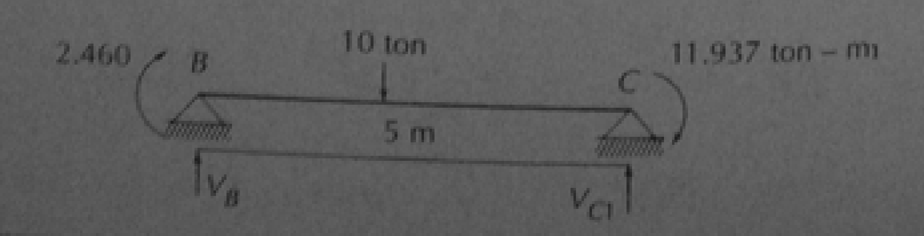
Paso *c)* Cálculo de los momentos finales

$$
\begin{array}{ll}
M_{AB} = 0.50 \times 4.889 - 0.375 \times 19.598 & = -4.905\\
M_{BA} = 4.889 - 0.375 \times 19.598 & = -2.460\\
M_{BC} = 1.60 \times 4.889 + 0.80 \times 1.110 - 6.25 & = \ 2.460\\
M_{CB} = 0.80 \times 4.889 + 1.60 \times 1.110 + 6.25 & = 11.937\\
M_{CD} = 1.333 \times 1.110 + 0.667 \times (-2.361) - 9.0 & = -9.095\\
M_{DC} = 0.667 \times (1.110) + 1.333\,(-2.361) + 9.0 & = \ 6.593\\
M_{CF} = 1.110 + 0.500 \times 6.794 - 0.375 \times 19.598 & = -2.842\\
M_{FC} = 0 & \\
M_{DE} = 0.80 \times (-2.361) - 0.24 \times 19.598 & = -6.592\\
M_{ED} = 0.40(-2.361) - 0.24 \times 19.598 & = -5.648
\end{array}
$$

Paso *d)* Reacciones finales y diagramas de fuerza cortante, fuerza normal y momento flexionante.

Se calculan primero las fuerzas cortantes en las vigas que se transmiten como fuerzas normales a las columnas.

Viga *BC*



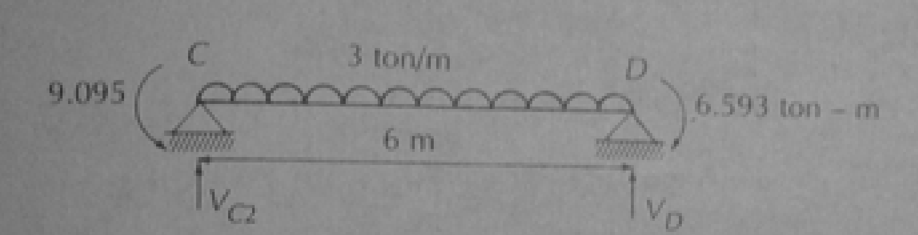
## EJEMPLO 6.2 (continuación)

$$V_B = \frac{10}{2} - \frac{2.460 + 11.937}{5} = 2.12 \text{ ton}$$

$$V_{C1} = \frac{10}{2} + \frac{2.460 + 11.937}{5} = 7.88 \text{ ton}$$

$$M_{℄} = 2.460 + 2.12 \times 2.5 = 7.76 \text{ ton} - \text{m}$$

Viga *CD*

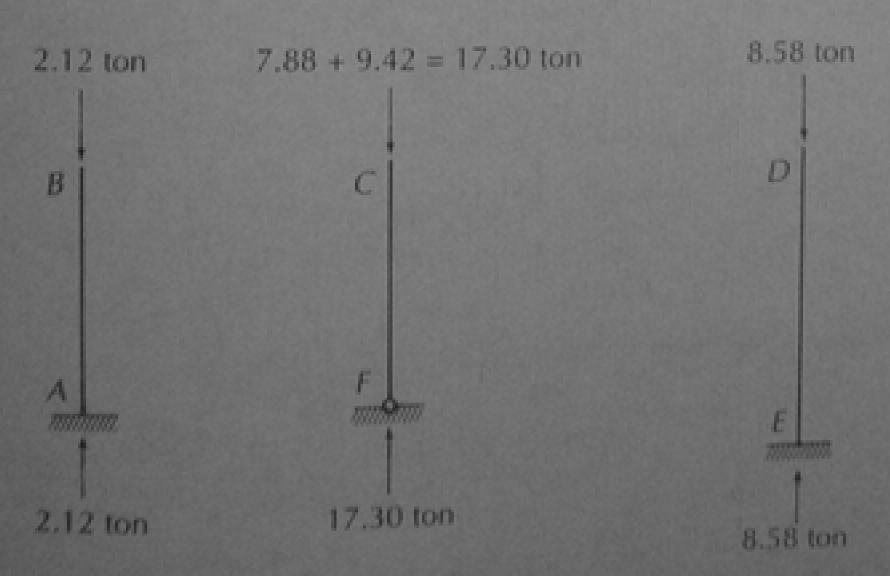



$$V_{C2} = \frac{3 \times 6}{2} + \frac{9.095 - 6.593}{6} = 9.42 \text{ ton}$$

$$V_D = \frac{3 \times 6}{2} - \frac{9.095 - 6.593}{6} = 8.58 \text{ ton}$$

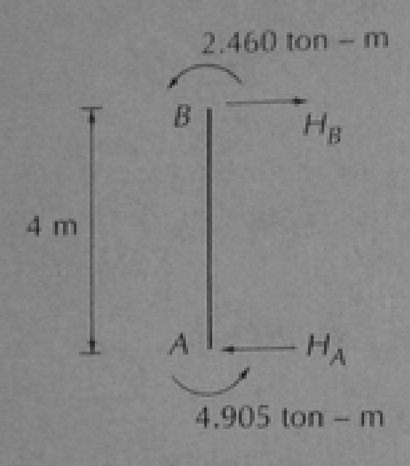
$$M_{℄} = 9.42 \times 3 - 9.095 - 3 \times 3 \times 1.5 = 5.67 \text{ ton} - \text{m}$$

Fuerzas normales en columnas

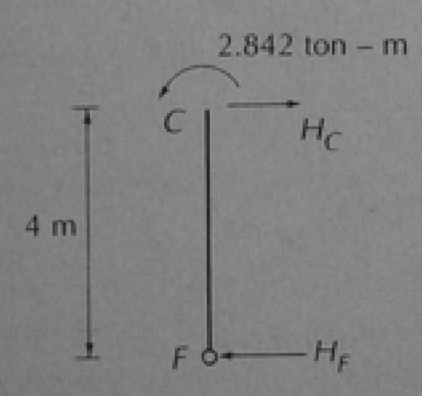



Se calculan ahora las fuerzas cortantes en las columnas que se transmiten como reacciones a los apoyos

**EJEMPLO 6.2** ***(continuación)***




$$H_B = H_A = \frac{2.460 + 4.905}{4} = 1.84 \text{ ton}$$



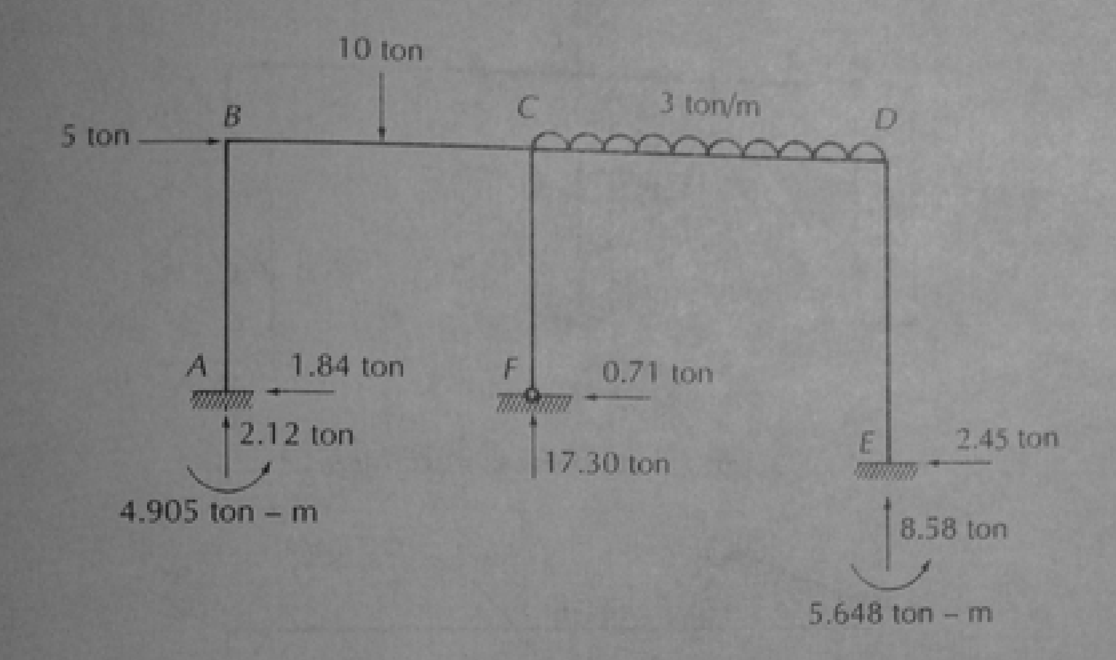

$$H_C = H_F = \frac{2.842}{4} = 0.71 \text{ ton}$$

6.592 ton – m
D
$H_D$
5 m
E
$H_E$
5.648 ton – m

$$H_D = H_E = \frac{6.592 + 5.648}{5} = 2.45 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 6.2 *(continuación)***

Reacciones finales




$$\sum F_x = +5 - 1.84 - 0.71 - 2.45 = 0$$
$$\sum F_y = 2.12 + 17.30 + 8.58 - 10 - 3 \times 6 = 0$$

Trazo de diagramas

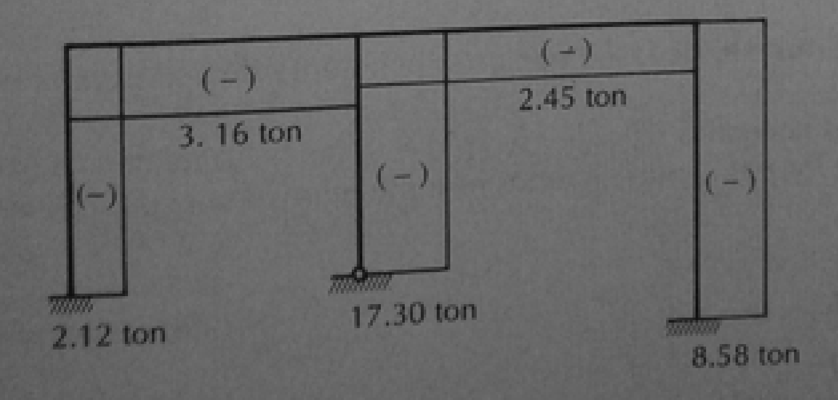



Diagrama de fuerzas normales

**EJEMPLO 6.2 *(continuación)***

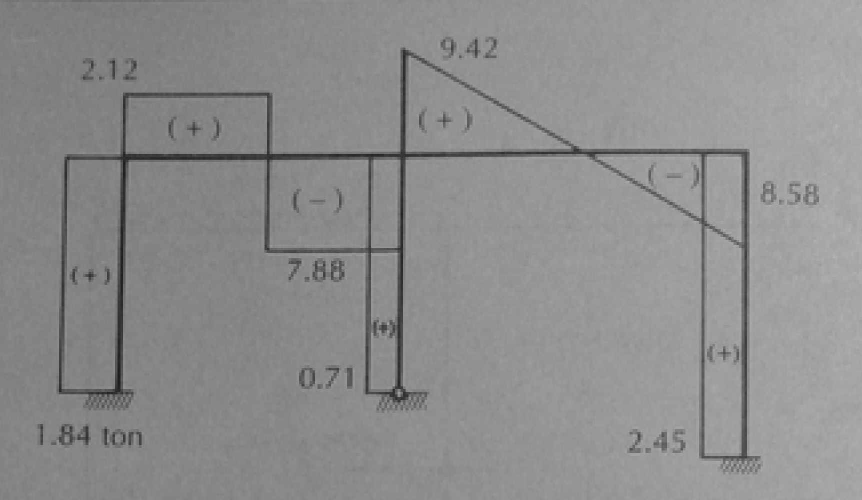



Diagrama de fuerzas cortantes

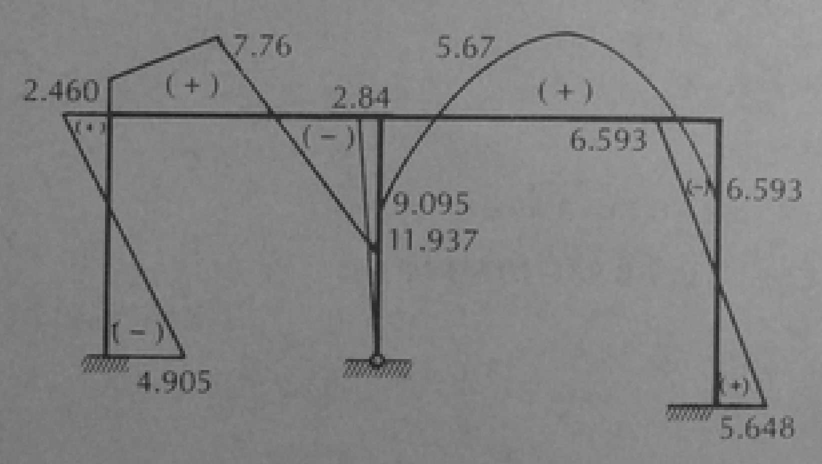



Diagrama de momentos flexionantes

SOLUCIÓN ALTERNATIVA USANDO LA ECUACIÓN MODIFICADA 6.11

Paso *a*) Planteamiento de las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro:

Las ecuaciones generales 6.8 y 6.9 se aplican a todos los miembros excepto la columna *CF*, por lo que los momentos en todos esos miembros son iguales a los ya obtenidos.

Para la columna *CF*:

$$\overline{M}_{CF} = \overline{M}_{FC} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\,I$$

$$R = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{\Delta}{4} = 0.25\,\Delta$$

$$M_{CF} = 3 \times 0.25\,EI\,(\theta_C - 0.25\,\Delta) \quad \text{(ecuación 6.11)}$$

**EJEMPLO 6.2 *(continuación)***

Paso *b)* Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio:

Ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$M_{BC} + M_{BA} = 0 \qquad (1)$$

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0 \qquad (2)$$

$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \qquad (3)$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales

50 ton

$M_{BA}$ $M_{AB}$ $M_{CF}$ $M_{FC} = 0$ $M_{DE}$ $M_{ED}$

$\dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}}$ $\dfrac{M_{CF}}{\ell_{CF}}$ $\dfrac{M_{DE} + M_{ED}}{\ell_{ED}}$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{CF}}{4} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{5} + 5 = 0 \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores de $M_{AB}$, $M_{BA}$, $M_{DE}$ y $M_{ED}$ de la solución anterior y el valor de $M_{CF}$ de esta solución alternativa en las ecuaciones (1) a (4):

$$2.60\,\theta_B + 0.80\,\theta_C - 0.375\,\Delta - 6.25 = 0 \qquad (5)$$

$$0.80\,\theta_B + 3.683\,\theta_C + 0.667\,\theta_D - 0.187\,\Delta - 2.75 = 0 \qquad (6)$$

$$0.667\,\theta_C + 2.133\,\theta_D - 0.24\,\Delta + 9.00 = 0 \qquad (7)$$

$$0.375\,\theta_B + 0.187\,\theta_C + 0.24\,\theta_D - 0.330\,\Delta + 5.00 = 0 \qquad (8)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\theta_B = 4.894, \quad \theta_C = 1.107, \quad \theta_D = -2.357, \quad \Delta = 19.625$$

Como estos valores son prácticamente iguales a los de la solución anterior, los momentos también resultan iguales.

**Ejemplo 6.3**

Se ilustra la resolución de un marco de dos niveles en el que una de las columnas, la columna *GH*, es de doble altura. La característica que debe observarse es que los nudos *B* y *E* tienen el mismo desplazamiento lateral que se ha denominado $\Delta_1$, mientras que los nudos *C*, *F* y *H* tienen un desplazamiento lateral diferente que se ha denominado $\Delta_2$. Resultan entonces los 7 grados de libertad que se indican debajo del croquis del marco.

El paso *a*), que consiste en la aplicación de las ecuaciones pendiente-deflexión a cada miembro del marco, es esencialmente igual al de los ejemplos anteriores. En los miembros que corresponden a vigas no existe desplazamiento lateral, y por lo tanto, los valores de *R* son iguales a 0. En la columna *GH* se ha considerado su altura total de 7m en el cálculo de *R*. De esta manera se han obtenido las ecuaciones para todos los momentos en los extremos de los miembros, 16 en total. Recuérdese que son momentos de apoyo sobre barra. En el planteamiento de las ecuaciones al final de este paso, se ha considerado ya que los giros en los empotramientos *A*, *D* y *G* son nulos, y como *EI* es constante, se ha tomado igual a 1.

En el siguiente paso se plantean las ecuaciones de equilibrio. Resultan 5 ecuaciones de suma de momentos en los nudos igual a 0 y 2 ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, una por piso. Obsérvese que al hacer un corte en las columnas del nivel superior, la fuerza que resulta en la columna GH debe obtenerse a partir de la altura total de esta columna y no de la altura del entrepiso. Esto es así porque la fuerza cortante en la columna GH es constante en toda su altura y es igual a la suma de los momentos en sus extremos dividida entre la altura de la columna. En las ecuaciones 6 y 7, la suma de las fuerzas cortantes en las columnas se ha igualado a 0 porque no existen fuerzas horizontales aplicadas al marco. Si existiesen, se tomarían en cuenta como en la ecuación 5 del ejemplo 6.2. Nótese también que el signo de las fuerzas horizontales en las columnas es el que corresponde a un sentido positivo (horario) de los momentos en los extremos de las columnas. Sustituyendo los valores de los momentos obtenidos en el paso anterior, en estas ecuaciones de equilibrio, se obtiene el sistema de 7 ecuaciones que se presenta en el ejemplo y cuya solución se indica al final de este paso. Como ya se ha indicado varias veces, el sistema se puede resolver con cualquier programa de computadora. Aquí se usó el programa Excel. Los valores mostrados deben dividirse entre *EI* si se desean los valores reales.

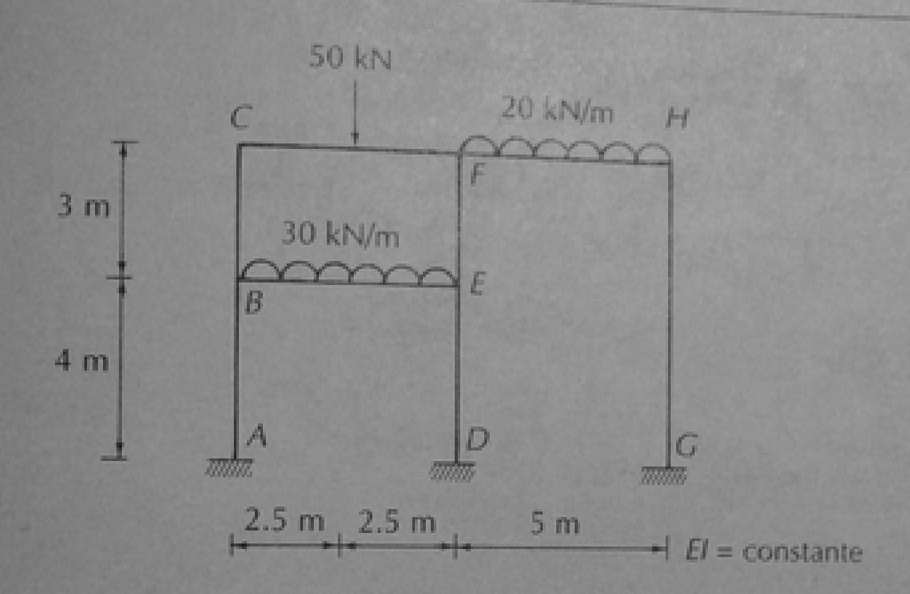
En el paso *c*) se han sustituido los valores de los términos θ y Δ para obtener los momentos finales, en la misma forma en que se ha hecho en los ejemplos anteriores.

En el paso *d*) se han obtenido las reacciones y se han trazado los diagramas de fuerzas normales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Obsérvese que para calcular las reacciones en los apoyos, fue necesario empezar con la obtención de las reacciones de las vigas del piso superior, o sea, las vigas *CF* y *FH*. Estas reacciones se sumaron a las de la viga *BE* para llegar a las reacciones verticales en los apoyos. Las reacciones horizontales en los apoyos se obtuvieron con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales del paso *b*. Una vez calculadas las reacciones horizontales y verticales, se verificó el equilibrio de fuerzas en ambas direcciones, incluyendo, desde luego, las cargas aplicadas a la estructura. Las reacciones verticales de las vigas proporcionan directamente las fuerzas normales en las columnas. Las fuerzas normales en las vigas se calcularon a partir de las reacciones horizontales de las columnas. Los croquis incluidos en estos cálculos permiten visualizar el signo correcto de las fuerzas normales en las vigas.

Los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes se trazaron de la misma manera que en el ejemplo anterior, siguiendo la convención de signos de que los extremos inferiores de las columnas equivalen a los extremos izquierdos de las vigas, los extremos superiores, a los extremos derechos, las acciones positivas se trazan en la parte superior de los miembros, y las acciones negativas, en la parte inferior.

## EJEMPLO 6.3. ANÁLISIS DE UN MARCO CON UNA COLUMNA DE DOBLE ALTURA

DATOS:




Grados de libertad:

$\theta_B, \theta_C, \theta_E, \theta_F, \theta_H, \Delta_B = \Delta_E = \Delta_1, \Delta_C = \Delta_F = \Delta_H = \Delta_2$; 7 grados de libertad

Paso a) Planteamiento de las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro:

$$M_{AB} = 2\,EK\,(2\theta_A + \theta_B - 3R) \pm \overline{M}_{AB}$$
$$M_{BA} = 2\,EK\,(2\theta_B + \theta_A - 3R) \pm \overline{M}_{BA}$$

Miembro *AB*

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}_{BA} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\,I$$

$$R = \frac{\Delta_1}{\ell} = \frac{\Delta_1}{4} = 0.25\,\Delta_1$$

$$M_{AB} = 2 \times 0.25\,EI\,(2\theta_A + \theta_B - 0.75\,\Delta_1)$$

$$M_{BA} = 2 \times 0.25\,EI\,(2\theta_B + \theta_A - 0.75\,\Delta_1)$$

**EJEMPLO 6.3** ***(continuación)***

Miembro *BC*

$$\overline{M}_{BC} = \overline{M}_{CB} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{3} = 0.333\,I$$

$$R = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\ell} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{3} = 0.333\,\Delta_2 - 0.333\,\Delta_1$$

$$M_{BC} = 2 \times 0.333\,EI\,(2\theta_B + \theta_C - \Delta_2 + \Delta_1)$$

$$M_{CB} = 2 \times 0.333\,EI\,(2\theta_C + \theta_B - \Delta_2 + \Delta_1)$$

Miembro *BE*

$$-\overline{M}_{BE} = \overline{M}_{EB} = \frac{30 \times 5^2}{12} = 62.50 \text{ kN} - \text{m}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{5} = 0.20\,I$$

$$R = 0$$

$$M_{BE} = 0.40\,EI\,(2\theta_B + \theta_E) - 62.50$$

$$M_{EB} = 0.40\,EI\,(2\theta_E + \theta_B) + 62.50$$

Miembro *CF*

$$-\overline{M}_{CF} = \overline{M}_{FC} = \frac{50 \times 5}{8} = 31.25 \text{ kN} - \text{m}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{5} = 0.20\,I$$

$$R = 0$$

$$M_{CF} = 2 \times 0.20\,EI\,(2\theta_C + \theta_F) - 31.25$$

$$M_{FC} = 2 \times 0.20\,EI\,(2\theta_F + \theta_C) + 31.25$$

**EJEMPLO 6.3 *(continuación)***

Miembro *DE*

$$\overline{M}_{DE} = \overline{M}_{ED} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\,I$$

$$R = \frac{\Delta_1}{\ell} = \frac{\Delta_1}{4} = 0.25\,\Delta_1$$

$$M_{DE} = 2 \times 0.25\,EI\,(2\theta_D + \theta_E - 0.75\,\Delta_1)$$

$$M_{ED} = 2 \times 0.25\,EI\,(2\theta_E + \theta_D - 0.75\,\Delta_1)$$

Miembro *EF*

$$\overline{M}_{EF} = \overline{M}_{FE} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{3} = 0.333\,I$$

$$R = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\ell} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{3} = 0.333\,\Delta_2 - 0.333\,\Delta_1$$

$$M_{EF} = 2 \times 0.333\,EI\,(2\theta_E + \theta_F - \Delta_2 + \Delta_1)$$

$$M_{FE} = 2 \times 0.333\,EI\,(2\theta_F + \theta_E - \Delta_2 + \Delta_1)$$

Miembro *FH*

$$-\overline{M}_{FH} = \overline{M}_{HF} = \frac{20 \times 5^2}{12} = 41.67\ \text{kN-m}$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{5} = 0.20\,I$$

$$R = 0$$

$$M_{FH} = 2 \times 0.20\,I\,(2\theta_F + \theta_H) - 41.67$$

$$M_{HF} = 2 \times 0.20\,I\,(2\theta_H + \theta_F) + 41.67$$

**EJEMPLO 6.3** ***(continuación)***

Miembro *GH*

$$\overline{M}_{GH} = \overline{M}_{HG} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{7} = 0.143\,I$$

$$R = \frac{\Delta_2}{\ell} = \frac{\Delta_2}{7} = 0.143\,\Delta_2$$

$$M_{GH} = 2 \times 0.143\,EI\,(2\theta_G + \theta_H - 0.492\,\Delta_2)$$

$$M_{HG} = 2 \times 0.143\,EI\,(2\theta_H + \theta_G - 0.429\,\Delta_2)$$

Ordenando las ecuaciones y sabiendo que $\theta_A = \theta_D = \theta_G = 0$ y haciendo $EI = 1$

$$M_{AB} = 0.5\,\theta_B - 0.375\,\Delta_1$$
$$M_{BA} = \theta_B - 0.375\,\Delta_1$$
$$M_{BC} = 1.333\,\theta_B + 0.667\,\theta_C - 0.667\,\Delta_2 + 0.667\,\Delta_1$$
$$M_{CB} = 1.333\,\theta_C + 0.667\,\theta_B - 0.667\,\Delta_2 + 0.667\,\Delta_1$$
$$M_{BE} = 0.8\,\theta_B + 0.4\,\theta_E - 62.5$$
$$M_{EB} = 0.8\,\theta_E + 0.4\,\theta_B + 62.5$$
$$M_{CF} = 0.8\,\theta_C + 0.4\,\theta_F - 31.25$$
$$M_{FC} = 0.8\,\theta_F + 0.4\,\theta_C + 31.25$$
$$M_{DE} = 0.5\,\theta_E - 0.375\,\Delta_1$$
$$M_{ED} = \theta_E - 0.375\,\Delta_1$$
$$M_{EF} = 1.333\,\theta_E + 0.667\,\theta_F - 0.667\,\Delta_2 + 0.667\,\Delta_1$$
$$M_{FE} = 1.333\,\theta_F + 0.667\,\theta_E - 0.667\,\Delta_2 + 0.667\,\Delta_1$$
$$M_{FH} = 0.8\,\theta_F + 0.4\,\theta_H - 41.67$$
$$M_{HF} = 0.8\,\theta_H + 0.4\,\theta_F + 41.67$$
$$M_{GH} = 0.286\,\theta_H - 0.123\,\Delta_2$$
$$M_{HG} = 0.572\,\theta_H - 0.123\,\Delta_2$$

**EJEMPLO 6.3 *(continuación)***

Paso *b*) Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

Ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0 \qquad (1)$$

$$M_{CB} + M_{CF} = 0 \qquad (2)$$

$$M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} = 0 \qquad (3)$$

$$M_{FC} + M_{FE} + M_{FH} = 0 \qquad (4)$$

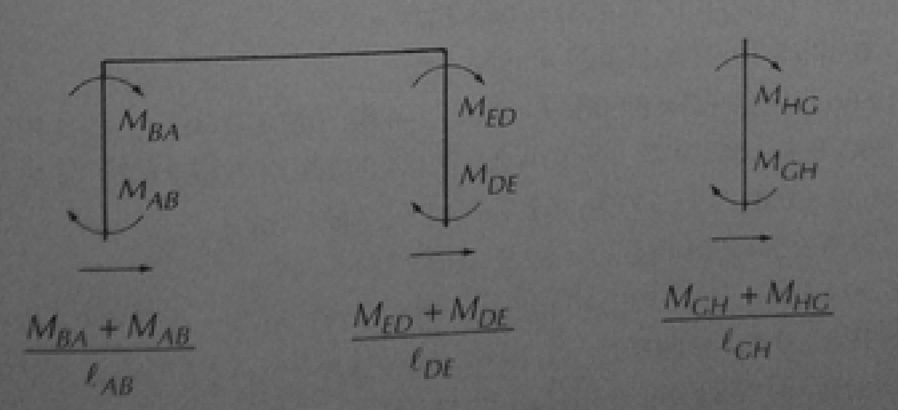
$$M_{HF} + M_{HG} \qquad (5)$$

Ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales

$M_{CB}$, $M_{BC}$ $\quad$ $M_{FE}$, $M_{EF}$ $\quad$ $M_{HG}$, $M_{GH}$

$$\frac{M_{CB} + M_{BC}}{\ell_{BC}} \qquad \frac{M_{EF} + M_{FE}}{\ell_{EF}} \qquad \frac{M_{HG} + M_{GH}}{\ell_{HG}}$$

$$\frac{M_{CB} + M_{BC}}{3} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{3} + \frac{M_{HG} + M_{GH}}{7} = 0 \qquad (6)$$




$$\frac{M_{BA} + M_{AB}}{\ell_{AB}} \qquad \frac{M_{ED} + M_{DE}}{\ell_{DE}} \qquad \frac{M_{GH} + M_{HG}}{\ell_{GH}}$$

$$\frac{M_{BA} + M_{AB}}{4} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{4} + \frac{M_{GH} + M_{HG}}{7} = 0 \qquad (7)$$

**EJEMPLO 6.3 *(continuación)***

Sustituyendo los valores de $M_{AB}$, $M_{BA}$, ..., $M_{HG}$, $M_{GH}$, en las ecuaciones (1) a (7):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3.133\ \theta_B$ | $+0.667\ \theta_C$ | $+0.400\ \theta_E$ | | | $+0.292\ \Delta_1$ | $-0.667\ \Delta_2$ | $-62.50$ | $=0$ |
| $0.667\ \theta_B$ | $+2.133\ \theta_C$ | | $+0.400\ \theta_F$ | | $+0.667\ \Delta_1$ | $-0.667\ \Delta_2$ | $-31.25$ | $=0$ |
| $0.400\ \theta_B$ | | $+3.133\ \theta_E$ | $+0.667\ \theta_F$ | | $+0.292\ \Delta_1$ | $-0.667\ \Delta_2$ | $+62.50$ | $=0$ |
| | $0.400\ \theta_C$ | $+0.667\ \theta_E$ | $+2.933\ \theta_F$ | $+0.400\ \theta_H$ | $+0.667\ \Delta_1$ | $-0.667\ \Delta_2$ | $-10.42$ | $=0$ |
| | | | $0.400\ \theta_F$ | $+1.372\ \theta_H$ | | $-0.123\ \Delta_2$ | $+41.67$ | $=0$ |
| $0.667\ \theta_B$ | $+0.667\ \theta_C$ | $+0.667\ \theta_E$ | $+0.667\ \theta_F$ | $+0.123\ \theta_H$ | $+0.888\ \Delta_1$ | $-0.923\ \Delta_2$ | | $=0$ |
| $0.375\ \theta_B$ | | $+0.375\ \theta_E$ | | $+0.123\ \theta_H$ | $-0.375\ \Delta_1$ | $-0.035\ \Delta_2$ | | $=0$ |

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\theta_B = 21.86639$
$\theta_C = 8.08079$
$\theta_E = -25.65519$
$\theta_F = 15.39190$
$\theta_H = -35.29190$
$\Delta_1 = -14.91401$
$\Delta_2 = -4.82706$

Paso c) Cálculo de los momentos finales

$M_{AB} = 0.5 \times 21.86639 - 0.375\ (-14.91401) = 16.53$ kN – m
$M_{BA} = 21.86639 - 0.375\ (-14.91401) = 27.46$ kN – m
$M_{BC} = 1.333 \times 21.86639 + 0.667 \times 8.08079 - 0.667\ (-4.82706) + 0.667\ (-14.91401) = 27.81$ kN – m
$M_{CB} = 1.333 \times 8.08079 + 0.667 \times 21.86639 - 0.667\ (-4.82706) + 0.667\ (-14.91401) = 18.63$ KN – m
$M_{BE} = 0.8 \times 21.86639 + 0.4\ (-29.65519) - 62.5 = -55.27$ kN – m
$M_{EB} = 0.8\ (-25.65519) + 0.4 \times 21.86639 + 62.5 = 50.72$ kN – m
$M_{CF} = 0.8 \times 8.08079 + 0.4 \times 15.39190 - 31.25 = -18.63$ kN – m
$M_{FC} = 0.8 \times 15.39190 + 0.4 \times 8.08079 + 31.25 = -46.80$ kN – m
$M_{DE} = 0.5\ (-25.65519) - 0.375\ (-14.91401) = -7.23$ KN – m
$M_{ED} = -25.65519 - 0.375\ (-14.91401) = -20.06$ kN – m
$M_{EF} = 1.333\ (-25.65519) + 0.667 \times 15.39190 - 0.667\ (-4.82706) + 0.667\ (-14.91401) = -30.66$ kN – m
$M_{FE} = 1.333 \times 15.39190 + 0.667\ (-25.65519) - 0.667\ (-4.82706) + 0.667\ (-14.91401) = -3.32$ kN – m

**EJEMPLO 6.3 *(continuación)***

$M_{FH} = 0.8 \times 15.39190 + 0.4\,(-35.29190) - 41.67 = -43.47$ kN – m

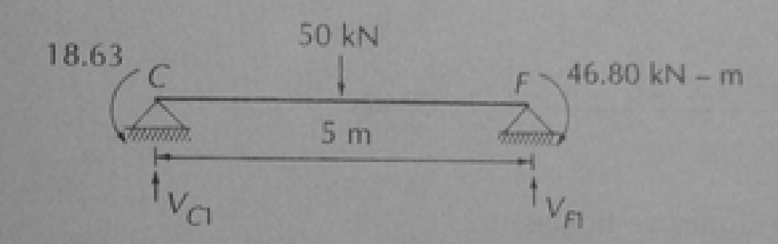
$M_{HF} = 0.8\,(-35.39190) + 0.4 \times 15.39190 + 41.67 = 19.59$ Kn – m

$M_{GH} = 0.286\,(-35.29190) - 0.123\,(-4.82706) = -9.50$ kN – m

$M_{HG} = 0.572\,(-35.29190) - 0.123\,(-4.82706) = -19.59$ kN – m

Paso *d*) Reacciones finales y diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

Viga *CF*




$$V_{C1} = \frac{50}{2} - \frac{46.80 - 18.63}{5} = 19.37 \text{ kN}$$

$$V_{F1} = \frac{50}{2} + \frac{46.80 - 18.63}{5} = 30.63 \text{ kN}$$

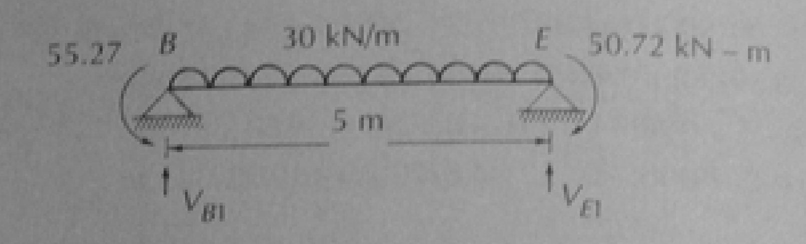
Viga *FH*

$$V_{F2} = \frac{20 \times 5}{2} + \frac{43.47 - 19.59}{5} = 54.78 \text{ kN}$$

$$V_{H1} = \frac{20 \times 5}{2} - \frac{43.47 - 19.59}{5} = 45.22 \text{ kN}$$

**EJEMPLO 6.3 *(continuación)***

Viga *BE*




$$V_{B1} = \frac{30 \times 5}{2} + \frac{55.27 - 50.72}{5} = 75.91 \text{ kN}$$

$$V_{E1} = \frac{30 \times 5}{2} - \frac{55.27 - 50.72}{5} = 74.09 \text{ kN}$$

Cálculo de reacciones verticales:

$$V_A = V_{C1} + V_{B1} = 19.37 + 75.91 = 95.28 \text{ kN}$$

$$V_D = V_{F1} + V_{F2} + V_{E1} = 30.63 + 54.78 + 74.09 = 159.50 \text{ kN}$$

$$V_C = V_{H1} = 45.22 \text{ kN}$$

Cálculo de reacciones horizontales:

$$H_A = \frac{M_{BA} + M_{AB}}{\ell_{AB}} = \frac{16.53 + 27.46}{4} = 10.99 \text{ kN}$$

$$H_D = \frac{M_{ED} + M_{DE}}{\ell_{DE}} = \frac{-20.06 - 7.23}{4} = -6.83 \text{ kN}$$

$$H_G = \frac{M_{HG} + M_{GH}}{\ell_{GH}} = \frac{-19.59 - 9.50}{7} = -4.16 \text{ kN}$$

Verificación del equilibrio:

$$\sum F_x = 10.99 - 6.83 - 4.16 = 0$$

$$\sum F_y = 95.28 + 159.50 + 45.22 - 50 - 20 \times 5 - 30 \times 5 = 0$$

## EJEMPLO 6.3 (continuación)

Fuerza normal en la viga *CF*:

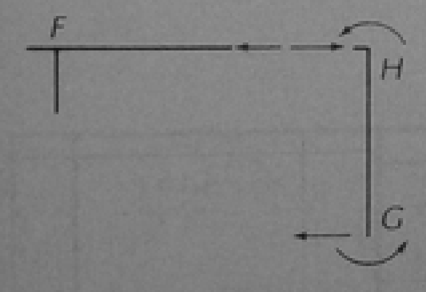
$$H_C = \frac{M_{CB} + M_{BC}}{\ell_{BC}} = \frac{18.63 + 27.81}{3} = 15.48 \text{ kN}$$

18.63
C
F
B
27.81

La fuerza en *CF* es de compresión, como se ve en este croquis

Fuerza normal en la viga *FH*:

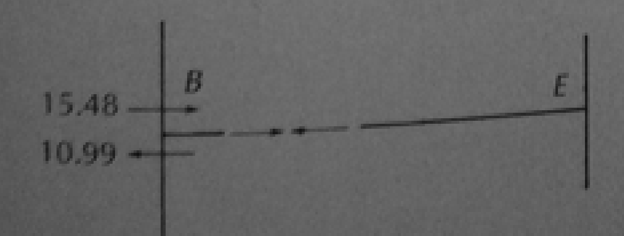
$$H_H = \frac{M_{HG} + M_{GH}}{\ell_{GH}} = \frac{-19.59 - 9.50}{7} = -4.16 \text{ kN}$$




La fuerza *FH* es también de compresión

Fuerza normal en la viga *BE*

$$H_B = \frac{M_{CB} + M_{BC}}{\ell_{BC}} - \frac{M_{BA} + M_{AB}}{\ell_{AB}} = 15.48 - 10.99 = 4.49 \text{ kN}$$




La fuerza en *BE* es de tensión

**EJEMPLO 6.3** ***(continuación)***

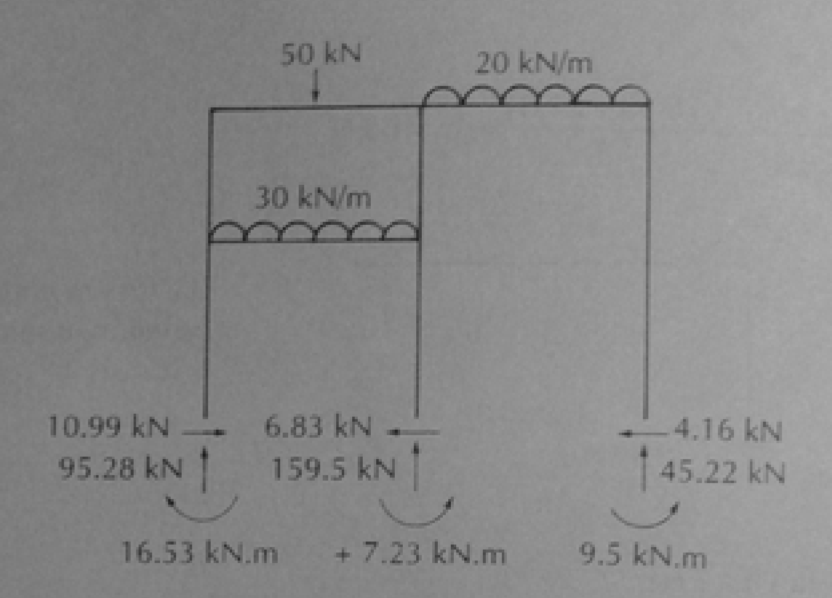



Diagrama de reacciones

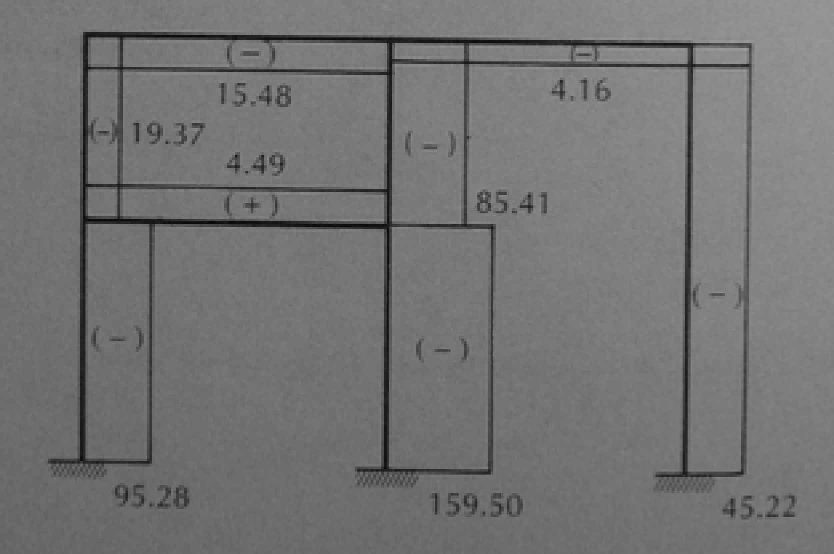



Diagrama de fuerzas normales (kN)

EJEMPLO 6.3 *(continuación)*

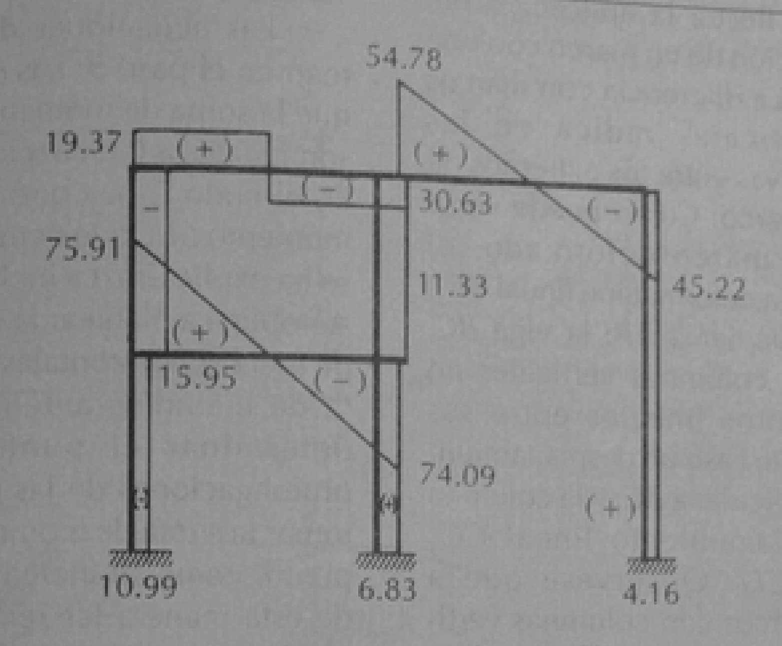



Diagrama de fuerzas cortantes (kN)

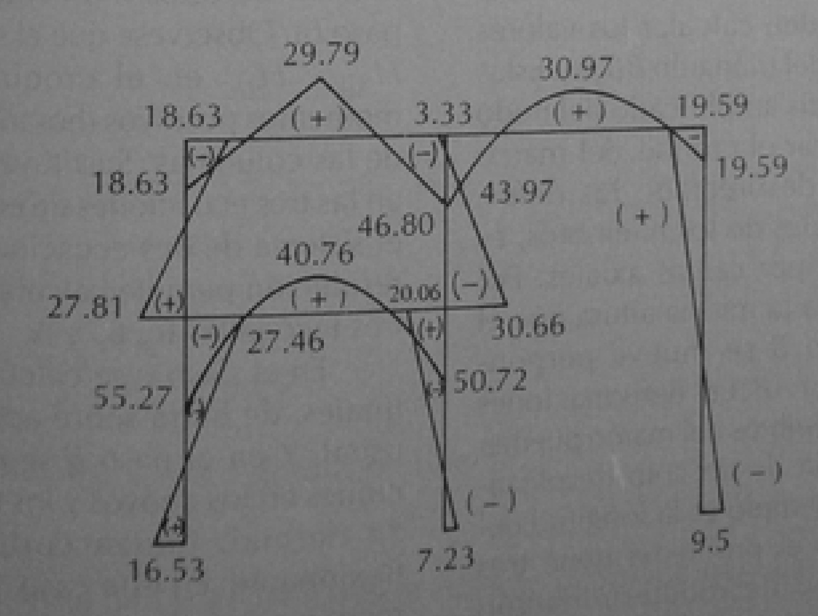



Diagrama de momentos flexionantes (kN-m)

**Ejemplo 6.4**

En este ejemplo se ilustra la aplicación del método en la resolución de un marco con una columna inclinada. La diferencia con marcos de columnas verticales radica en las deformaciones relativas entre los extremos de los miembros del marco. Como puede verse en el croquis del marco deformado, el miembro *AB* tiene una deformación lineal $BB_1$, siendo $BB_1$ perpendicular a *AB*; la viga *BC*, que en marcos con columnas verticales no tiene desplazamientos lineales entre sus extremos, tiene en este caso un desplazamiento lineal $BB_2$, perpendicular a *BC*; y la columna *CD* tiene un desplazamiento lineal $CC_1$ perpendicular a *CD*. Obsérvese que a diferencia de los marcos con columnas verticales, el desplazamiento lineal no es igual en las columnas, ya que el desplazamiento $BB_1$ es diferente al desplazamiento $CC_1$ . La relación entre los tres desplazamientos puede obtenerse observando que el triángulo $BB_1B_2$ es semejante al triángulo *ABF*; como se conocen las dimensiones de este último, a partir de ellas se pueden calcular los valores relativos de los lados del triángulo $BB_1B_2$. Éstas se indican en el croquis amplificado del nudo *B*. Nótese que al trazar el croquis del marco deformado, se han despreciado las deformaciones longitudinales de los miembros, es decir, las producidas por cargas axiales. Por esto el punto $C_1$ está a la misma altura que el punto *C*, y el punto *B* se mueve perpendicularmente a la línea *AB*. Las deformaciones lineales de los tres miembros del marco pueden expresarse en función de un solo desplazamiento $\Delta$ que en el ejemplo es la longitud del lado $B_2B_1$. Con esto el problema tiene tres grados de libertad o de indeterminación cinemática.

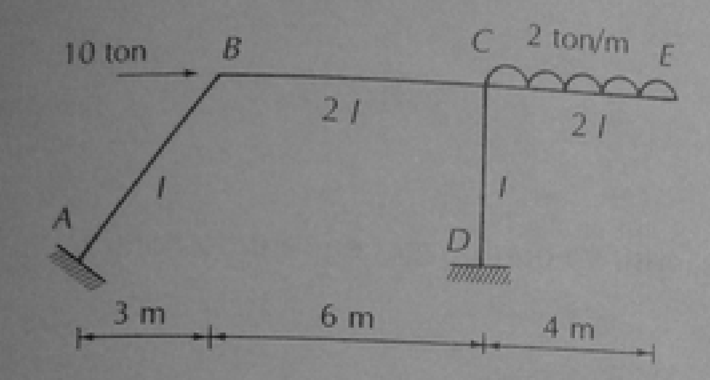
En el paso *a* se plantean las ecuaciones pendiente deflexión para todos los miembros, de la misma manera que en los ejemplos anteriores. Nótese únicamente que en el miembro *BC* se usó un momento de inercia 2I y que en el miembro *CE*, como es un voladizo, el momento está determinado como $w\ell^2/2$. Tiene por lo tanto un valor fijo de –16 ton-m.

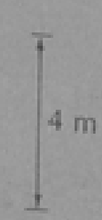
Las ecuaciones de equilibrio se plantean en el paso *b*. Las dos primeras expresan que la suma de momentos en los nudos *B* y *C* son iguales a 0 (ecuaciones 1 y 2 del paso *b*). En el nudo *C* hay que incluir desde luego el momento $M_{CE}$ que tiene un valor fijo como ya se ha explicado. La inclinación de la columna *AB* obliga a plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales de manera diferente a la de ejemplos anteriores. Es conveniente determinar el punto de cruce de las prolongaciones de las columnas *AB* y *CD*, y tomar la suma de momentos alrededor de este punto, como se indica en el croquis, ya que de esta manera las reacciones $V_{AB}$ y $V_{DC}$ no producen momentos, y las únicas incógnitas en la ecuación son las fuerzas $H_{AB}$ y $H_{DC}$. Estas fuerzas pueden expresarse en términos de los momentos en los extremos de las columnas, $M_{AB}$, $M_{BA}$, $M_{DC}$ y $M_{CD}$ y se puede plantear entonces la tercera ecuación de equilibrio en función de estos momentos (ecuación 3 del paso *b*). Obsérvese que el signo de las fuerzas $H_{AB}$ y $H_{DC}$ en el croquis corresponde a momentos positivos (horarios) en los extremos de las columnas. Sustituyendo los momentos en las tres ecuaciones de equilibrio se obtiene el sistema de tres ecuaciones (4, 5 y 6), cuya resolución permite calcular los valores de las tres incógnitas $\theta_B$, $\theta_C$ y $\Delta$.

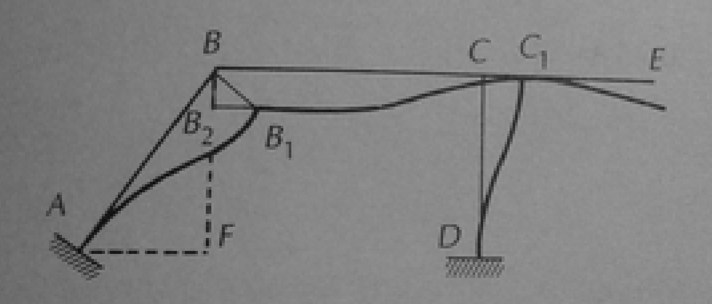
En el paso *c* se calculan los momentos finales, de barra sobre apoyo, de la manera usual. Y en el paso *d* se obtienen las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante. En este caso, se obtuvieron primero las reacciones horizontales $H_{AB}$ y $H_{DC}$ con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales del paso *b*, y después se calcularon las reacciones verticales $V_{AB}$ y $V_{DC}$ a patir de las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ .

## EJEMPLO 6.4. ANÁLISIS DE UN MARCO CON UNA COLUMNA INCLINADA

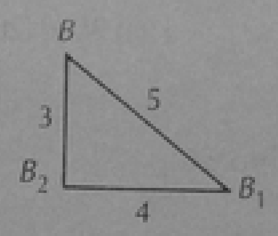
DATOS:




Marco deformado




Nudo B

Si

$$\Delta = B_2 B_1$$

$$\Delta_{AB} = B B_1 = \frac{5}{4} \Delta = 1.25 \Delta$$

$$\Delta_{BC} = B B_2 = \frac{3}{4} \Delta = 0.75 \Delta$$

$$\Delta_{CD} = C C_1 = B_2 B_1 = \Delta$$

Grados de libertad: $\theta_B, \theta_C, \Delta$;3 grados de libertad

Paso a) Planteamiento de las ecuaciones pendiente-deflexión para cada miembro:

$$M_{AB} = 2\,EK\,(2\theta_A + \theta_B - 3R) \pm \overline{M}_{AB}$$

$$M_{BA} = 2\,EK\,(2\theta_B + \theta_A - 3R) \pm \overline{M}_{BA}$$

**EJEMPLO 6.4** *(continuación)*

Miembro *AB*

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}_{BA} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{5} = 0.20\, I$$

$$R = \frac{\Delta_{AB}}{\ell} = \frac{1.25\,\Delta}{5} = 0.25\,\Delta \text{ (positivo porque gira en sentido horario)}$$

$$M_{AB} = 2 \times 0.20\, EI\,(2\theta_A + \theta_B - 0.75\,\Delta)$$

$$M_{BA} = 2 \times 0.20\, EI\,(2\theta_B + \theta_A - 0.75\,\Delta)$$

Miembro *BC*

$$\overline{M}_{BC} = \overline{M}_{CB} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{2I}{6} = 0.333\, I$$

$$R = \frac{\Delta_{BC}}{\ell} = \frac{0.75\,\Delta}{6} = 0.125\,\Delta \text{ (negativo porque gira en sentido antihorario)}$$

$$M_{BC} = 2 \times 0.333\, EI\,(2\theta_B + \theta_C + 0.375\,\Delta)$$

$$M_{CB} = 2 \times 0.333\, EI\,(2\theta_C + \theta_B + 0.375\,\Delta)$$

Miembro *CD*

$$\overline{M}_{CD} = \overline{M}_{DC} = 0$$

$$K = \frac{I}{\ell} = \frac{I}{4} = 0.25\, I$$

$$R = \frac{\Delta_{CD}}{\ell} = \frac{\Delta}{4} = 0.25\,\Delta \text{ (positivo porque gira en sentido horario)}$$

$$M_{CD} = 2 \times 0.25\, EI\,(2\theta_C + \theta_D - 0.75\,\Delta)$$

$$M_{DC} = 2 \times 0.25\, EI\,(2\theta_D + \theta_C - 0.75\,\Delta)$$

**EJEMPLO 6.4** ***(continuación)***

Miembro *CE*

$$M_{CE} = -\frac{w\ell^2}{2} = -\frac{2\times 4^2}{2} = -16 \text{ ton} - \text{m}$$

Ordenando las ecuaciones y haciendo $\theta_A = \theta_D = 0,\quad \text{y} \quad EI = 1$

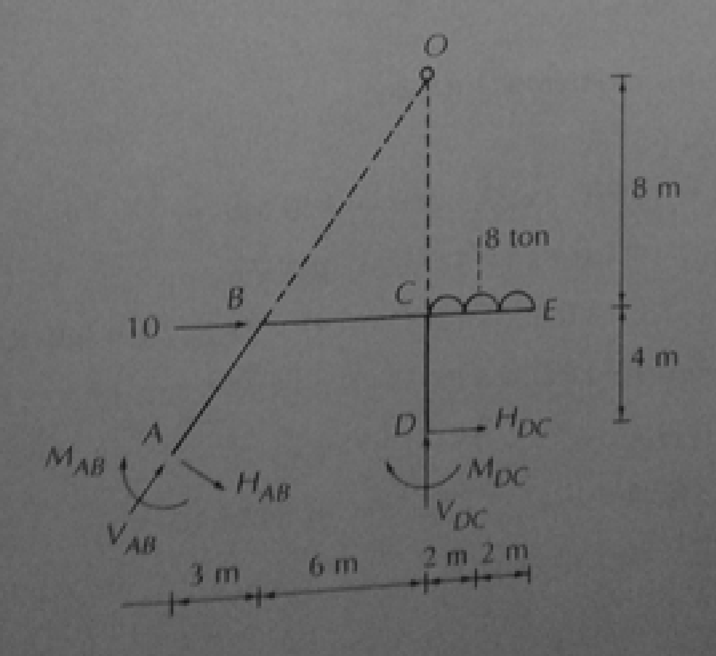
$$M_{AB} = 0.40\,\theta_B - 0.3\,\Delta$$
$$M_{BA} = 0.80\,\theta_B - 0.3\,\Delta$$
$$M_{BC} = 1.332\,\theta_B + 0.666\,\theta_C + 0.250\,\Delta$$
$$M_{CB} = 0.666\,\theta_B + 1.332\,\theta_C + 0.250\,\Delta$$
$$M_{CD} = \theta_C - 0.375\,\Delta$$
$$M_{DC} = 0.5\,\theta_C - 0.375\,\Delta$$
$$M_{CE} = -16 \text{ ton-m}$$

Paso *b*) Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.

Ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (1)$$
$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \qquad (2)$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas:



**EJEMPLO 6.4 *(continuación)***

$$\sum M_0 = M_{AB} + M_{DC} - H_{AB} \times 15 - H_{DC} \times 12 + 8 \times 2 - 10 \times 8 = 0$$

$$H_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{5}$$

$$H_{DC} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{\ell_{DC}} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{4}$$

$$\sum M_0 = -2M_{AB} - 3M_{BA} - 3M_{CD} - 2M_{DC} - 64 = 0 \qquad (3)$$

Sustituyendo los valores de $M_{AB}$, $M_{BA}$, $M_{BC}$, $M_{CB}$, $M_{CD}$ y $M_{DC}$ en las ecuaciones 1, 2 y 3:

$$2.132\,\theta_B + 0.666\,\theta_C - 0.050\,\Delta = 0 \qquad (4)$$
$$0.666\,\theta_B + 2.332\,\theta_C - 0.125\,\Delta - 16 = 0 \qquad (5)$$
$$-3.200\,\theta_B - 4.000\,\theta_C + 3.375\,\Delta - 64 = 0 \qquad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones (4), (5) y (6):

$$\theta_B = -2.150 \quad \theta_C = 8.951 \quad \Delta = 27.532$$

Paso c) Cálculo de los momentos finales

$$M_{AB} = 0.40(-2.15) - 0.3 \times 27.532 = -9.120 \text{ ton-m}$$
$$M_{BA} = 0.80(-2.15) - 0.3 \times 27.532 = -9.980 \text{ ton} - \text{m}$$
$$M_{BC} = 1.332(-2.15) + 0.666 \times 8.951 + 0.25 \times 27.532 = 9.980 \text{ ton} - \text{m}$$
$$M_{CB} = 0.666(-2.15) + 1.332 \times 8.951 + 0.25 \times 27.532 = 17.373 \text{ ton} - \text{m}$$
$$M_{CD} = 8.951 - 0.375 \times 27.532 = -1.373 \text{ ton} - \text{m}$$
$$M_{DC} = 0.50 \times 8.951 - 0.375 \times 27.532 = -5.849 \text{ ton} - \text{m}$$
$$M_{CE} = -16 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 6.4 *(continuación)***

*Paso d)* Reacciones finales y diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante

En el paso *b* se estableció que:

$$H_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} = \frac{-9.12 - 9.98}{5} = -3.82$$

$$H_{DC} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{\ell_{DC}} = \frac{-1.373 - 5.849}{4} = -1.80$$

De $\sum F_x = 0$ (ver figura paso *b*):

$$V_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) + H_{AB}\left(\frac{4}{5}\right) + 10 + H_{DC} = 0$$

Sustituyendo los valores de $H_{AB}$ y $H_{DC}$:

$$V_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3.82 \times 4}{5} + 10 - 1.80 = 0$$

$$V_{AB} = -8.57 \text{ ton}$$

De $\sum F_y = 0$

$$V_{AB}\left(\frac{4}{5}\right) + V_{DC} - H_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) - 8 = 0$$

Sustituyendo los valores de $V_{AB}$ y $H_{AB}$:

$$-\frac{8.57 \times 4}{5} + V_{DC} + \frac{3.82 \times 3}{5} - 8 = 0$$

$$V_{DC} = 12.56 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 6.4 *(continuación)***

El diagrama de reacciones queda como sigue:

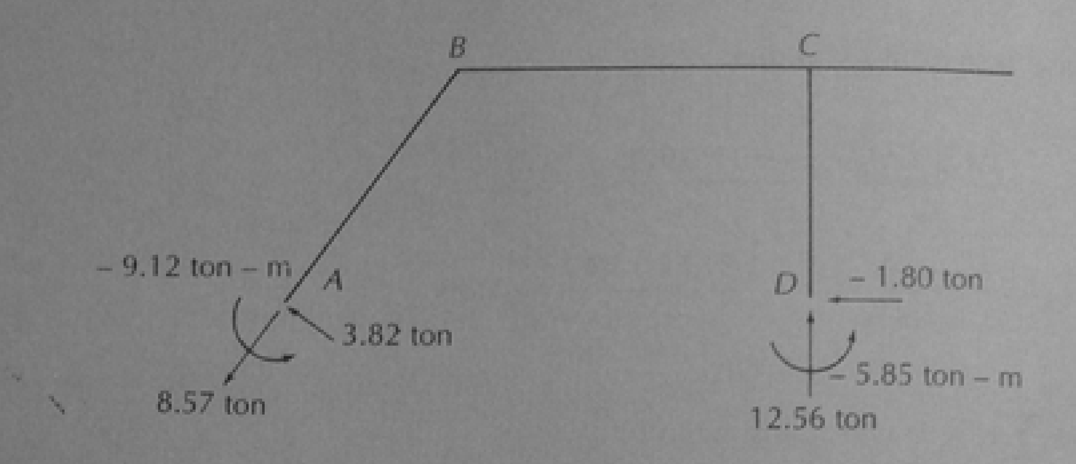



Diagrama de reacciones

Las cargas axiales en las columnas *AB* y *DC* ya quedan determinadas. La carga axial en la viga *BC* es igual a la fuerza cortante de la columna *DC*.

Los diagramas quedan de la siguiente forma:

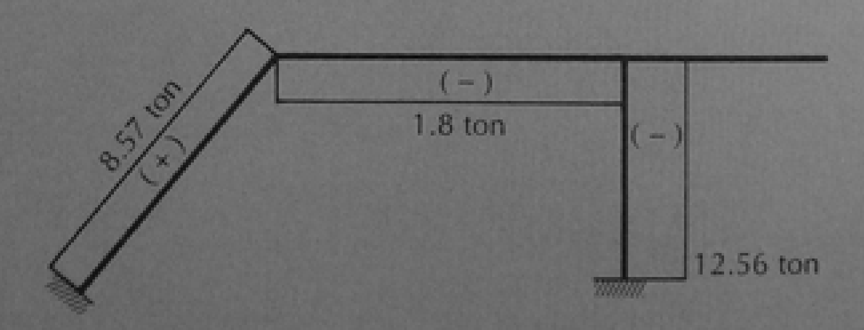



Diagrama de fuerzas normales

**EJEMPLO 6.4 (continuación)**

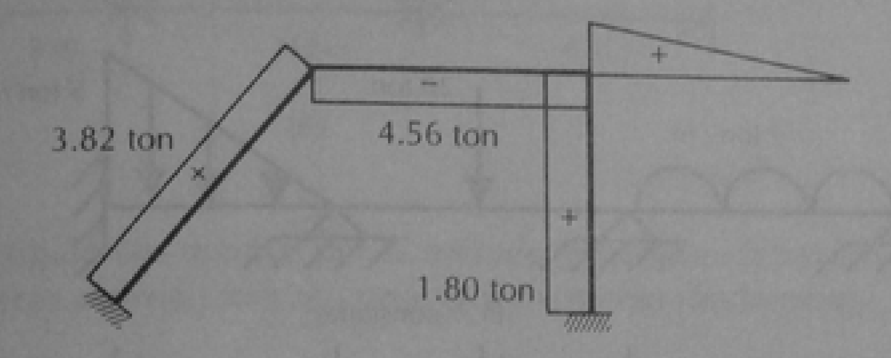



Diagrama de fuerzas cortantes

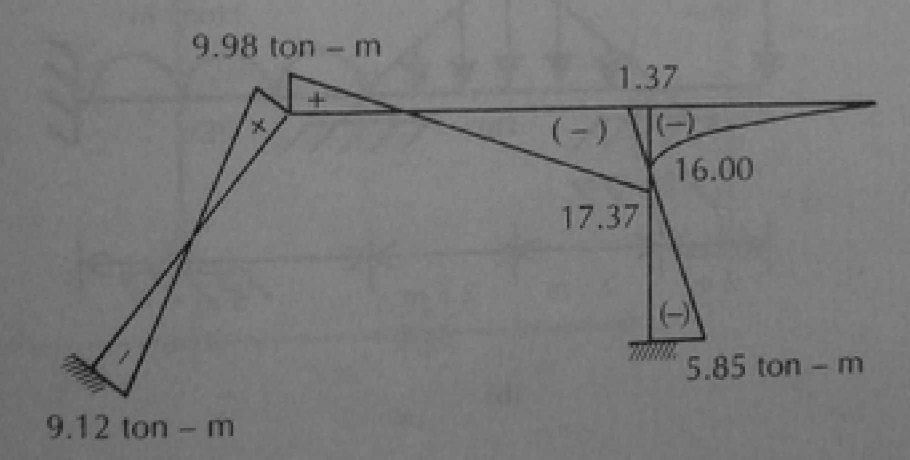
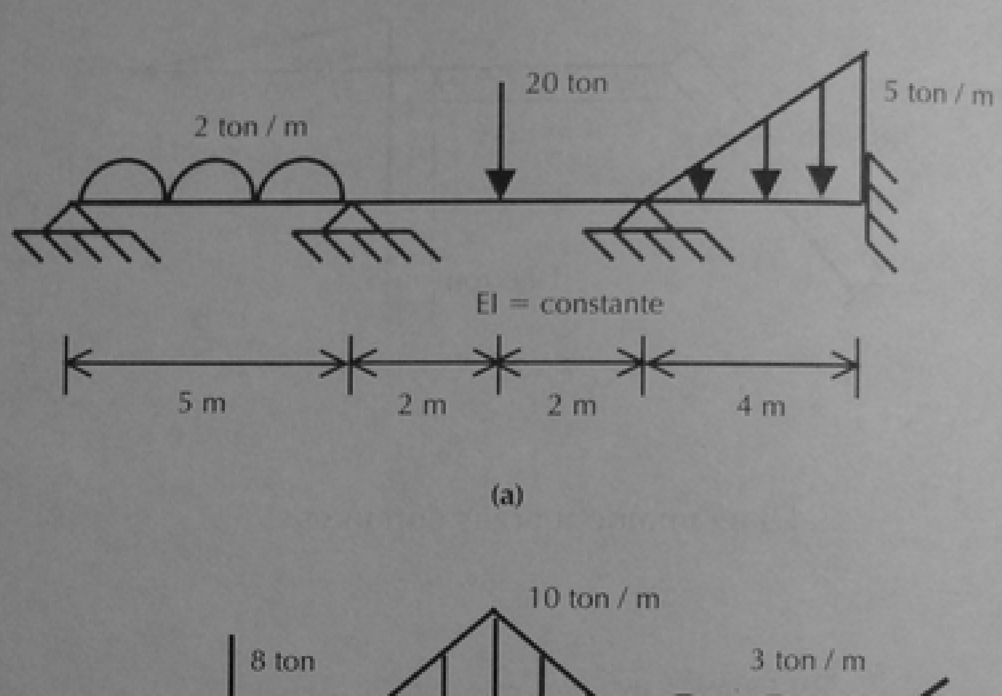


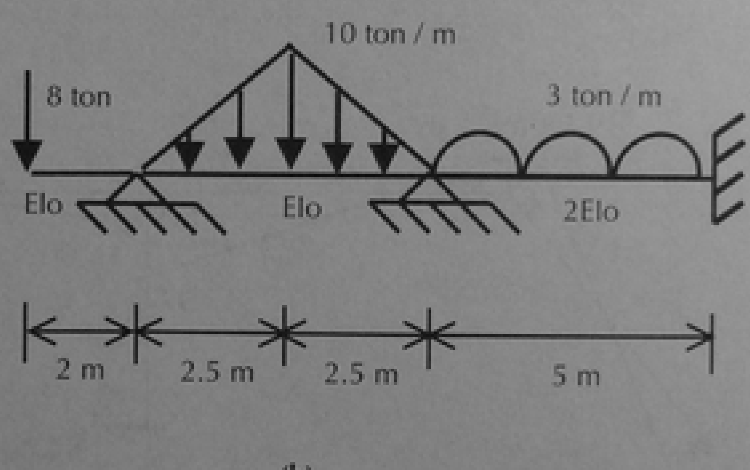

Diagrama de momentos flexionantes

## PROBLEMAS

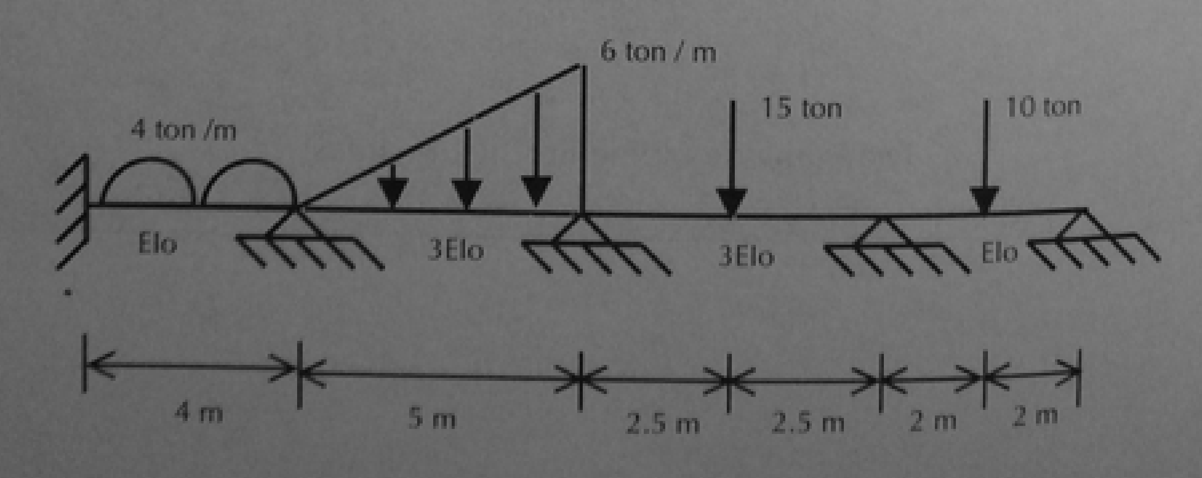
6.1 Resolver las siguientes vigas por el método pendiente-deflexión, trazando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Usar la tabla 5.1 para obtener los momentos de empotramiento perfecto.



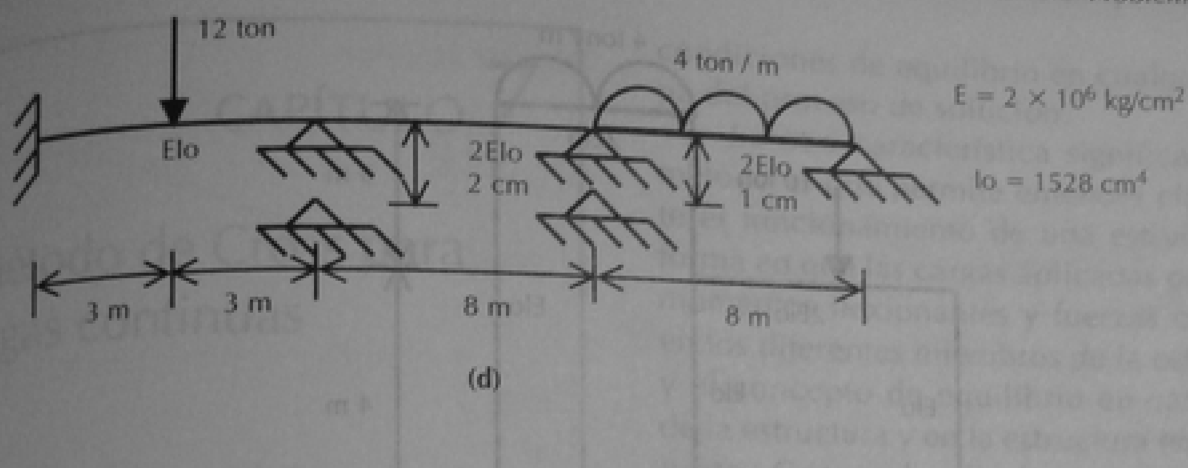

(a)




(b)




(c)




(d)

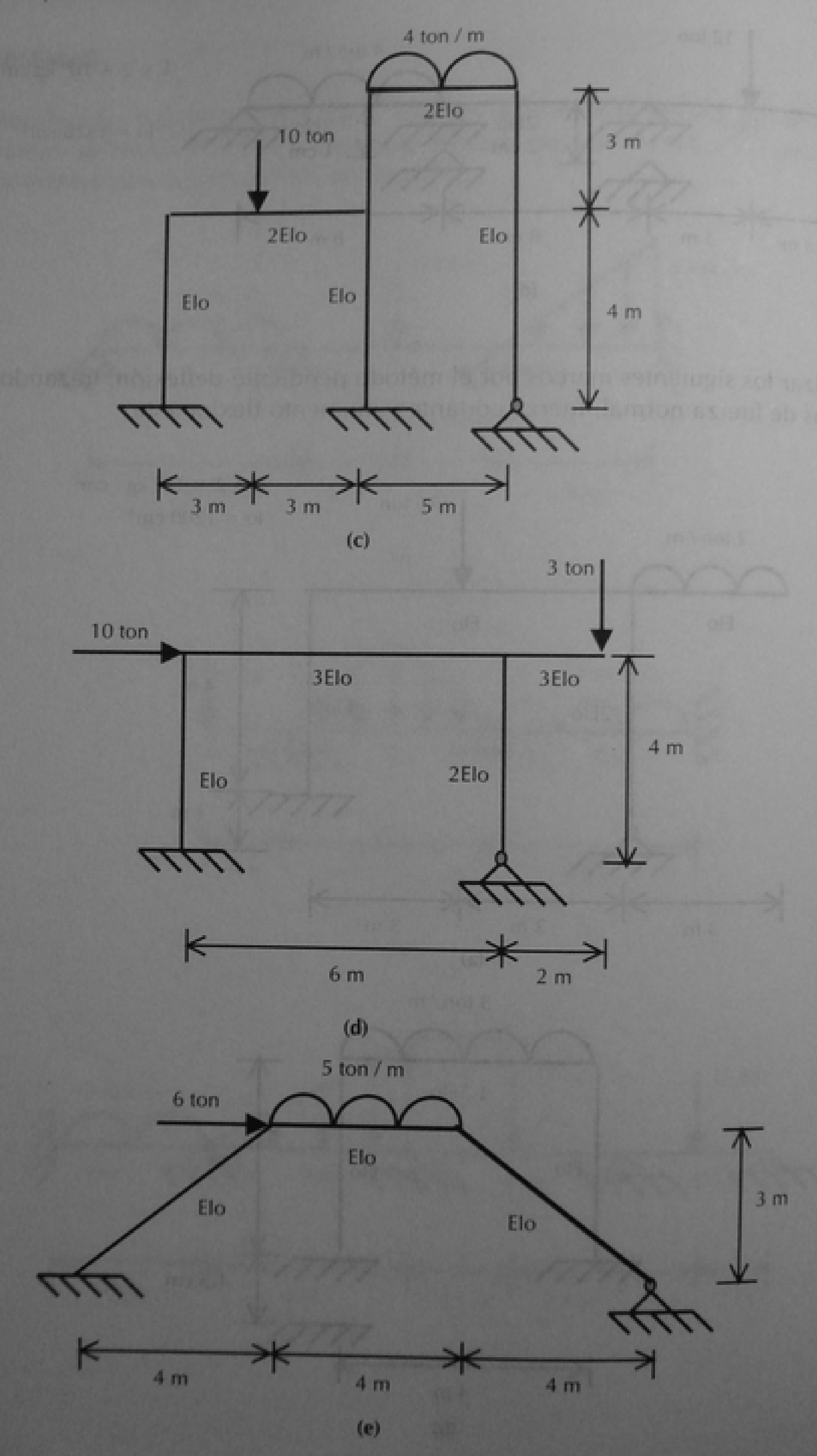
6.2 Analizar los siguientes marcos por el método pendiente-deflexión, trazando los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

E = 2 × 10$^6$ kg / cm$^2$
Io = 1200 cm$^4$
15 ton
2 ton / m
Elo
Elo
2Elo
Elo
4 m
1 m
3 m
3 m
3 m

(a)

3 ton / m
1.5Elo
Elo
Elo
3 m
1.5 cm
4 m

(b)


4 ton / m
2EIo
10 ton
3 m
2EIo
EIo
EIo
EIo
EIo
4 m
3 m
3 m
5 m
(c)
3 ton
10 ton
3EIo
3EIo
4 m
EIo
2EIo
6 m
2 m
(d)
5 ton / m
6 ton
EIo
EIo
EIo
3 m
4 m
4 m
4 m
(e)

# CAPÍTULO 7

# Método de Cross para vigas continuas

7.1 Introducción / 7.2 Conceptos fundamentales del método / 7.3 Presentación del método / 7.4 Vigas de sección variable

## 7.1 Introducción

El Prof. Hardy Cross desarrolló en el año de 1932 un método numérico para la resolución de estructuras hiperestáticas que alcanzó gran popularidad y que se sigue usando ampliamente hasta la fecha. El método tiene dos características que lo hacen interesante.

Es un método numérico de aproximaciones sucesivas, que evita tener que resolver sistemas de ecuaciones simultáneas de un número elevado, como sucede en los métodos de las fuerzas y de las deformaciones. Cuando el Prof. Cross publicó su método, no existían comercialmente, como ahora, computadoras que permitiesen resolver sistemas de ecuaciones en segundos, o fracciones de segundo. Por lo tanto, cualquier estructura con un grado de indeterminación importante requería una gran labor aritmética para resolver el sistema de ecuaciones resultante. Por otra parte, la verificación de las condicones finales de equilibrio se tenía que hacer después de toda esta labor numérica. El método de Cross no sólo evita la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones, sino que permite verificar las condiciones de equilibrio en cualquier etapa del proceso de solución.

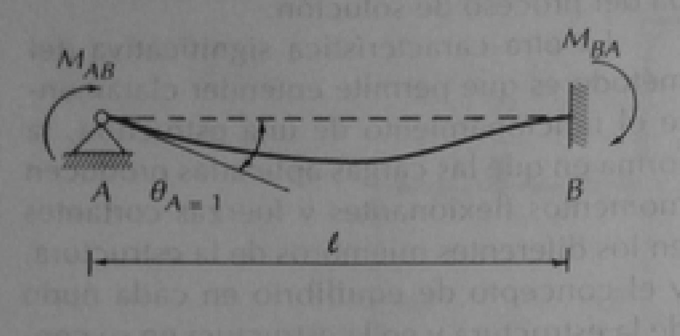
La otra característica significativa del método es que permite entender claramente el funcionamiento de una estructura, la forma en que las cargas aplicadas producen momentos flexionantes y fuerzas cortantes en los diferentes miembros de la estructura, y el concepto de equilibrio en cada nudo de la estructura y en la estructura en su conjunto. Como el método está basado en conceptos físicos fundamentales, es fácil recordar o reconstruir el procedimiento cuando no se tienen textos de consulta. Por esta razón es muy usado en la práctica cuando se presentan situaciones en las que hay necesidad de resolver estructuras sencillas.

## 7.2 Conceptos fundamentales del método

Más adelante se verá que el método de Cross está basado en el método de las deformaciones. Por lo tanto, los conceptos fundamentales son los mismos en ambos métodos y han sido estudiados en el Capítulo 5. A continuación se hace un repaso de estos conceptos y se introducen algunos otros que se usan en el método de Cross.

### *7.2.1 Rigidez angular, factor de transporte, momento transportado y rigidez lineal*

La *rigidez angular* se definió en la Sección 5.3 como el momento que hay que aplicar en el extremo de un miembro estructural para producir una rotación unitaria en dicho extremo. En la figura 5.1 se analizó el caso de que el extremo en que se aplica el momento estuviese articulado y el extremo opuesto estuviese empotrado. Se obtuvo que el valor del momento necesario para producir una rotación unitaria es:




Rigidez angular:

$$M_{AB} = \frac{4\,EI}{\ell}$$

Factor de transporte:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{1}{2}$$

**Figura 7.1.** Rigidez angular y factor de transporte en un miembro articulado en un extremo y empotrado en el otro

$$M_{AB} = \frac{4EI}{\ell} \qquad (7.1)$$

Ésta es por lo tanto la rigidez angular para un miembro con un extremo articulado y el otro empotrado, y se reproduce en la figura 7.1.

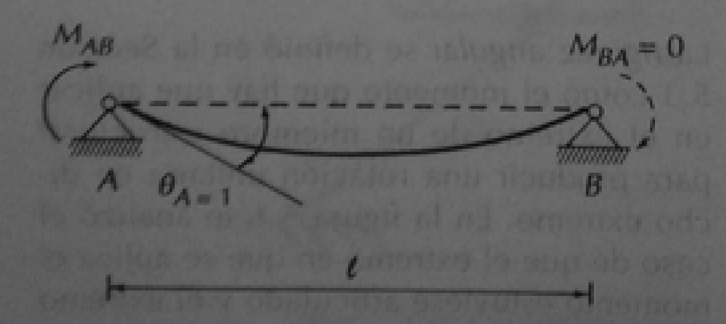
El caso de un miembro con los dos extremos articulados se estudió en la figura 5.2 de la Sección 5.3. El valor de la rigidez angular para este tipo de miembros, reproducida en la figura 7.2, es el siguiente:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell} \qquad (7.2)$$

Es común que en las estructuras se use el mismo material para los distintos miembros. Cuando esto sucede, el valor de $E$ es el mismo para todos los miembros. Como además lo que interesa en la mayoría de los casos es la rigidez relativa de los diferentes miembros estructurales, suele considerarse que la rigidez de un miembro con un extremo articulado y el otro empotrado es

$$K = \frac{I}{\ell} \qquad (7.3)$$

Esta rigidez se denomina *rigidez angular simplificada*. Si se usa esta expresión para




Rigidez angular:

$$M_{AB} = \frac{3\,EI}{\ell}$$

Factor de transporte:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = 0$$

**Figura 7.2.** Rigidez angular y factor de transporte en un miembro articulado en sus dos extremos

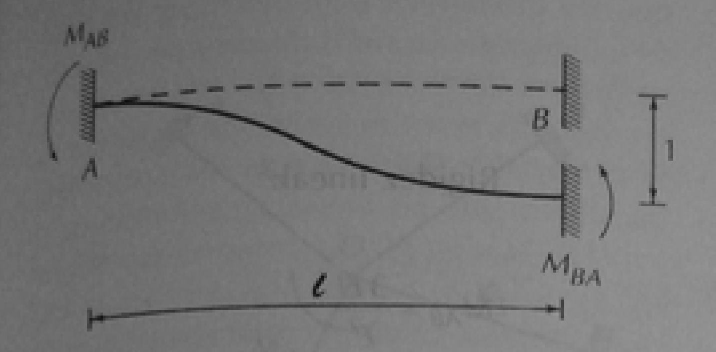



**Figura 7.3.** Rigidez lineal en un miembro empotrado en sus dos extremos

la rigidez de miembros como el de la figura 7.1, la rigidez simplificada para miembros como el de la figura 7.2, es decir, con los dos extremos articulados, es

$$K' = \frac{3}{4}K \qquad (7.4)$$

ya que la relación entre los valores de las ecuaciones 7.2 y 7.1 es precisamente de 3/4. La rigidez $K'$ se denomina *rigidez angular simplificada modificada*.

El *factor de transporte* se define como la relación entre el momento que se desarrolla en el extremo de un miembro cuando se aplica un momento en el otro extremo, y el valor del momento aplicado. Así, si se aplica un momento $M_{AB}$ en el extremo $A$ del miembro de la figura 7.1, y en el extremo $B$ se desarrolla como consecuencia un momento $M_{BA}$, el factor de transporte del miembro $AB$ es la relación entre los momentos $M_{BA}$ y $M_{AB}$. En la figura 5.1 se calculó que el momento $M_{BA}$ es 1/2 del momento $M_{AB}$. Por lo tanto, el factor de transporte para un miembro como el de la figura 7.1, con un extremo articulado y el otro empotrado, es

$$FT = \frac{1}{2} \qquad (7.5)$$

Si un miembro tiene sus dos extremos articulados, como en la figura 7.2, al aplicar un momento en el extremo $A$ no se desarrolla ningún momento en el extremo $B$, precisamente porque está articulado. En este caso el factor de transporte vale 0.

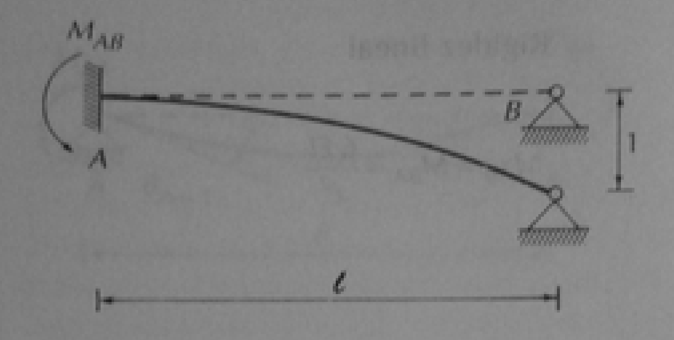
El momento que se desarrolla en un extremo como consecuencia de la aplicación de un momento en el otro extremo se denomina *momento transportado*. Así, en la figura 7.1 el momento $M_{BA}$ es un momento transportado ya que aparece como resultado de haber aplicado el momento $M_{AB}$, en el extremo $A$.

La *rigidez lineal* se ha definido en la sección 5.3 como el valor de los momentos que se desarrollan en los extremos de un miembro cuando se impone un desplazamiento lineal unitario entre dichos extremos. Si los dos están empotrados, como en las figuras 5.3 y 7.3, los momentos en ambos extremos valen, según se calculó en la figura 5.3,

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI}{\ell^2} \qquad (7.6)$$

Si un extremo está empotrado y el otro está articulado, como en las figuras 5.4 y 7.4, el momento en el extremo articulado es nulo y en el extremo empotrado vale

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2} \qquad (7.7)$$




Rigidez lineal:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2}$$

**Figura 7.4.** Rigidez lineal en un miembro empotrado en un extremo y articulado en el otro

Siguiendo un razonamiento semejante al del caso de la rigidez angular, se pueden definir la *rigidez lineal simplificada*

$$RL = \frac{I}{\ell^2} \qquad (7.8)$$

y la *rigidez lineal simplificada modificada*

$$RL' = \frac{1}{2} RL \qquad (7.9)$$

Esta última es para el caso de miembros con un extremo empotrado y el otro articulado.

### 7.2.2 Factores de distribución

Supóngase que se tiene una estructura como la de la figura 7.5*a*. constituida por varios miembros que concurren en un nudo rígido *O*, con sus extremos opuestos empotrados. Se dice que un nudo es rígido cuando el ángulo formado por dos miembros cualesquiera no cambia al girar el nudo. Los miembros de esta estructura tienen diferentes longitudes y momentos de inercia, de tal manera que la relación $K = I / \ell$ es diferente también para cada miembro. Si en el nudo *O* de esta estructura se aplica un momento $M_O$, el nudo sufre una rotación θ que es la misma que sufre cada miembro, por tratarse de un nudo rígido. En el extremo *O* de cada miembro aparecen momentos $M_{Oi}$ y en los extremos opuestos, momentos transportados $M_{iO}$, donde *i* son los extremos *A, B, C*, y *D*. En la figura 7.5*b*. se muestra la estructura deformada, y se indica que las rotaciones de todos los miembros en sus extremos *O* son iguales.

Los momentos $M_{Oi}$ pueden calcularse a partir de la ecuación 7.1. En efecto, si la rotación del nudo *O* tiene un valor θ, el momento en el extremo *O* de cada miembro será igual al valor expresado por la ecuación 7.1 multiplicado por θ. Por lo tanto,

$$M_{Oi} = \frac{4EI}{\ell}\theta = 4EK_i\theta \qquad (7.10)$$

donde $K_i$ representa el valor de la relación $I/\ell$ para el miembro *i*.

Por otra parte, la suma de los momentos $M_{Oi}$ tiene que ser igual al momento aplicado $M_O$. Esto permite establecer la ecuación

$$M_O = \sum M_{Oi} = \sum 4EK_i\theta = 4E\theta\sum K_i \qquad (7.11)$$

Despejando el valor de θ de esta ecuación:

$$\theta = \frac{M_O}{4E\sum K_i} \qquad (7.12)$$

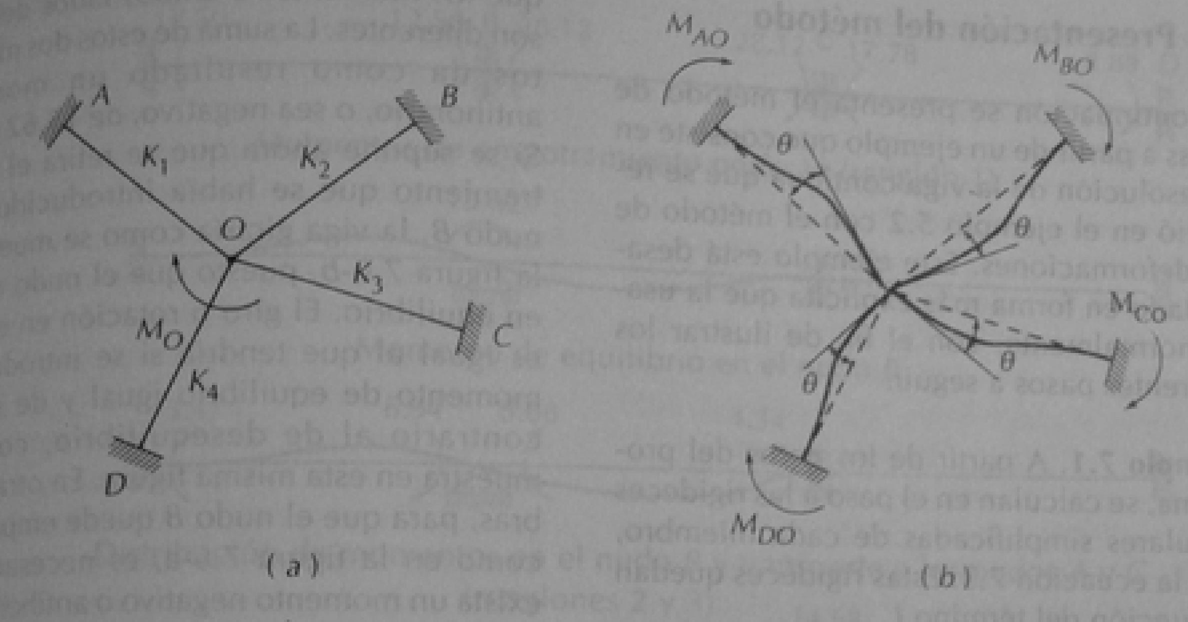



**Figura 7.5.** Deformaciones en un nudo rígido y momentos transportados

y sustituyendo este valor de θ en la ecuación 7.10:

$$M_{Oi} = M_O \frac{K_i}{\sum K_i} \qquad (7.13)$$

La ecuación 7.13 expresa que el momento que corresponde a un miembro $i$ es igual al momento aplicado $M_O$ multiplicado por un factor que es igual a la rigidez simplificada del miembro $K_i$ dividida entre la suma de las rigideces simplificadas de todos los miembros que concuren en el nudo $\sum K_i$. Este factor es el que se define como *factor de distribución* del miembro $i$ . Por lo tanto, si denominamos a los factores de distribución con la notación $FD$, se tiene que

$$FD_i = \frac{K_i}{\sum K_i} \qquad (7.14)$$

Con base en esta ecuación se puede decir que el factor de distribución de un miembro o barra de una estructura es igual a su rigidez simplificada dividida entre la suma de las rigideces simplificadas de todos los miembros que concurren en el nudo. De la ecuación 7.14 se deduce que la suma de los factores de distribución en cualquier nudo tiene que ser igual a la unidad.

En la figura 7.5 se planteó una estructura que tenía empotrados todos los extremos opuestos al nudo central. Si algunos de los extremos opuestos estuviese articulado, la ecuación 7.14 sigue siendo válida si se utilizan las rigideces simplificadas modificadas (ecuación 7.4) para dichos miembros. Y si el módulo de elasticidad $E$ no fuese constante, se deben utilizar las rigideces sin simplificar para cada miembro.

En todas las deducciones anteriores se ha supuesto que el momento de inercia $I$ es constante a lo largo de las barras, o sea, que se trata de barras prismáticas o de sección constante. Si no se cumple esta condición, las ecuaciones para calcular las rigideces angulares y lineales sufren modificaciones que se verán posteriormente. Sin embargo, las definiciones de factor de distribución y factor de transporte siguen siendo válidas. Lo que cambia es su valor numérico respecto al de barras prismáticas.

## 7.3 Presentación del método

A continuación se presenta el método de Cross a partir de un ejemplo que consiste en la resolución de la viga continua que se resolvió en el ejemplo 5.2 con el método de las deformaciones. Este ejemplo está desarrollado en forma más explícita que la usada normalmente, con el fin de ilustrar los diferentes pasos a seguir.

**Ejemplo 7.1**. A partir de los datos del problema, se calculan en el paso *a* las rigideces angulares simplificadas de cada miembro, con la ecuación 7.3. Estas rigideces quedan en función del término $I_o$ .

Después se calculan, en el paso *b*, los factores de distribución. A diferencia de las rigideces, que son únicas para cada miembro, los factores de distribución deben calcularse para cada extremo de cada miembro; por ejemplo, para el miembro *BC* se han calculado el factor de distribución en el extremo *B*, que es $FD_{BC}$ y en el extremo *C*, que es $FD_{CB}$ . La suma de los factores de distribución en cada nudo cumple con la condición de ser igual a la unidad, así $FD_{BA}$ más $FD_{BC}$ es igual a 1.

En el paso *c* se han calculado los momentos de empotramiento perfecto $\overline{M}$ en cada miembro de la manera usual. Se recuerda que en la Tabla 5.1 se presentan ecuaciones para el cálculo de estos momentos.

La ejecución del método se ilustra en el paso *d* y en la figura 7.6. En el croquis del paso *d* se han anotado los factores de distribución en los recuadros que aparecen en la parte superior de los extremos de los miembros. En el renglón (1), se han asentado los momentos de empotramiento perfecto con sus signos correspondientes. En esta etapa se ha supuesto que todos los extremos de los miembros están empotrados, como se indica en la figura 7.6-*a*.

Si se analiza el nudo *B* en la figura 7.6-*a*, se puede ver que no está en equilibrio, ya que los momentos a ambos lados del nudo son diferentes. La suma de estos dos momentos da como resultado un momento antihorario, o sea negativo, de 15.62 ton-m. Si se supone ahora que se retira el empotramiento que se había introducido en el nudo *B*, la viga giraría como se muestra en la figura 7.6-*b*, puesto que el nudo no está en equilibrio. El giro o rotación en el nudo es igual al que tendría si se introduce un momento de equilibrio igual y de sentido contrario al de desequilibrio, como se muestra en esta misma figura. En otras palabras, para que el nudo *B* quede empotrado, como en la figura 7.6-*a*, es necesario que exista un momento negativo o antihorario de 15.62 ton-m; es un momento de desequilibrio en el nudo. El nudo se puede liberar o soltar introduciendo un momento igual y de sentido contrario al de desequilibrio; en este caso un momento positivo de 15.62 ton-m, como se indica en la figura 7.6-*b*. Ahora bien, al introducir el momento de equilibrio, se desarrollan momentos en los extremos *B* de los miembros *BA* y *BC*. Cada uno de estos miembros toma una parte del momento de equilibrio, igual al valor de este momento mutiplicado por el factor de distribución del miembro. Esto se ha calculado en el renglón (2) del paso *d* y en la figura 7.6-c. El valor de +6.94 es igual al momento de +15.62 por el factor de distribución de 0.444, y el valor de +8.68 es igual a +15.62 por el factor de 0.556.

Los momentos que se desarrollan en los extremos *B* de los miembros *BA* y *BC*, producen momentos transportados en los extremos *A* y *C* de estos mismos miembros, los cuales permanecen empotrados. Como el factor de transporte es 1/2 (ecuación 7.5), el momento en *A* es la mitad de 6.94 y el momento en *C* es la mitad de 8.68, en todos los casos con el mismo signo. Esto se indica en el renglón (3) del croquis del paso *d* y en la figura 7.6-*c*. En el croquis se muestran con pequeñas flechas el origen y el destino de

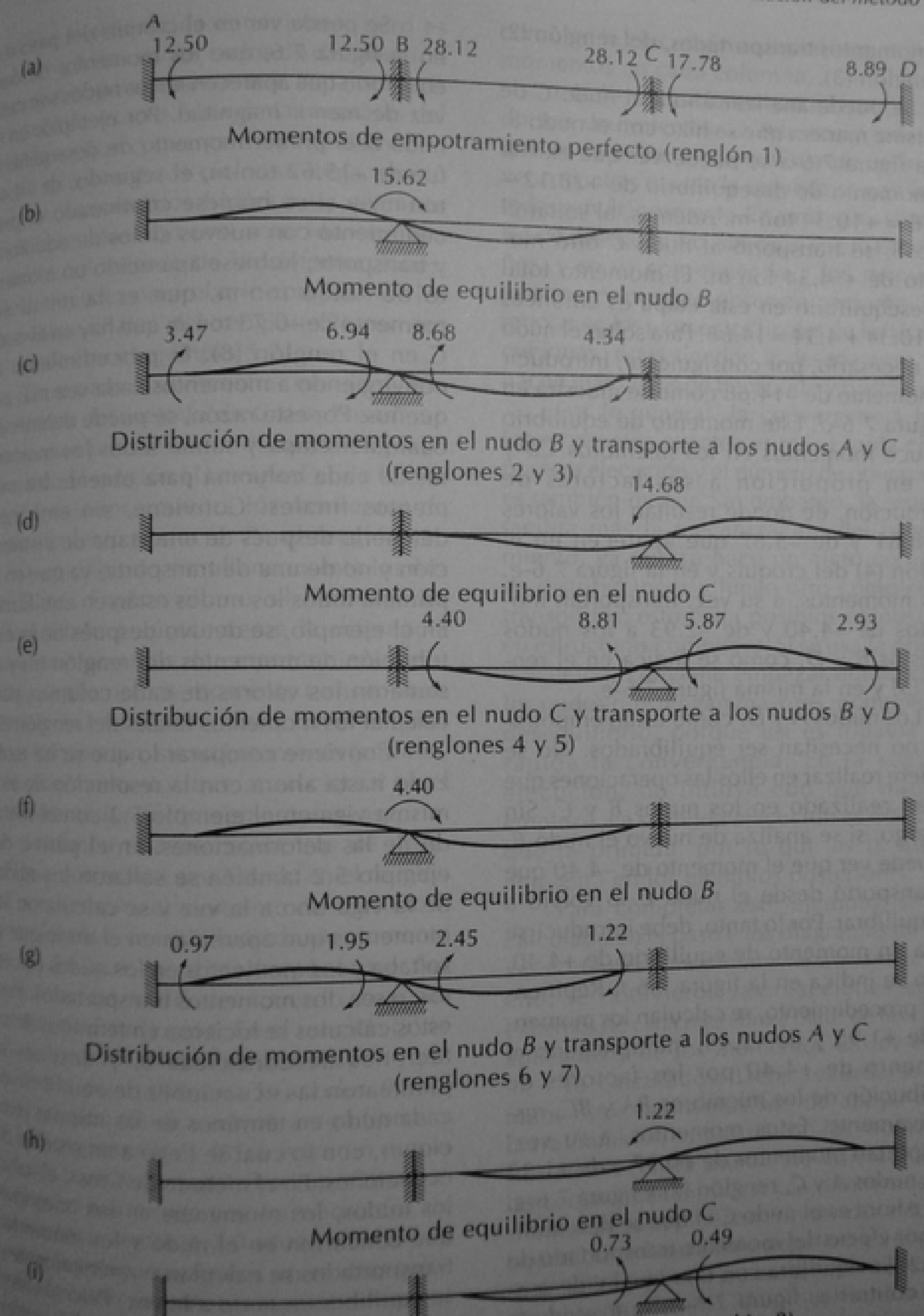



**Figura 7.6.** Representación gráfica de la ejecución del método de Cross en el ejemplo 7.1

los momentos transportados, del renglón (2) al renglón (3).

Se puede analizar ahora el nudo *C* de la misma manera que se hizo con el nudo *B*. En la figura 7.6-*a* se puede ver que existía un momento de desequilibrio de +28.12 − 17.78 = +10.34 ton-m. Además, al soltar el nudo B, se transportó al nudo *C* otro momento de + 4.34 ton-m. El momento total de desequilibrio en esta etapa es entonces de +10.34 + 4.34 = 14.68. Para soltar el nudo *C* es necesario, por consiguiente, introducir un momento de −14.68 como se muestra en la figura 7.6-*d*. Este momento de equilibrio produce momentos en los miembros *CB* y *CD*, en proporción a sus factores de distribución, de donde resultan los valores de −8.81 y de −5.87 que aparecen en el renglón (4) del croquis y en la figura 7.6-*e*. Estos momentos, a su vez, transportan momentos de −4.40 y de −2.93 a los nudos opuestos *B* y *D*, como se indica en el renglón (5) y en la misma figura 7.6-*e*.

Los nudos *A* y *D*, como están empotrados, no necesitan ser equilibrados. No se requiere realizar en ellos las operaciones que se han realizado en los nudos *B* y *C*. Sin embargo, si se analiza de nuevo el nudo *B*, se puede ver que el momento de −4.40 que se transportó desde el nudo *C* lo volvió a desequilibrar. Por lo tanto, debe introducirse ahora un momento de equilibrio de +4.40, como se indica en la figura 7.6-*f*. Repitiendo el procedimiento, se calculan los momentos de +1.95 y de +2.45, multiplicando el momento de +4.40 por los factores de distribución de los miembros *BA* y *BC*, respectivamente. Estos momentos, a su vez, transportan momentos de +0.97 y de +1.22 a los nudos *A* y *C*, renglón (7) y figura 7.6-*g*.

Ahora es el nudo *C* el que se desequilibra por efecto del momento transportado de +1.22. Se equilibra con uno igual y de sentido contrario, figura 7.6-*h*, que produce nuevos momentos en los miembros *CB* y *CD*, renglón (8) y figura 7.6-*i*.

Se puede ver en el croquis del paso *d* y en la figura 7.6, que los momentos de desequilibrio que aparecen en los nudos son cada vez de menor magnitud. Por ejemplo, en el nudo *B* el primer momento de desequilibrio fue de −15.62 ton-m, el segundo, de −4.40 ton-m, y si se hubiese continuado el procedimiento con nuevos ciclos de equilibrio y transporte, hubiese aparecido un momento de −0.36 ton-m, que es la mitad del momento de −0.73 ton-m que hay en el nudo *C* en el renglón (8). El procedimiento va convirgiendo a momentos cada vez más pequeños. Por esta razón, se puede detener en cualquier etapa y sumar todos los momentos de cada columna para obtener los momentos finales. Conviene, sin embargo, detenerlo después de una etapa de distribución y no de una de transporte, ya que en la primera todos los nudos están en equilibrio. En el ejemplo, se detuvo después de la distribución de momentos del renglón (8) y se sumaron los valores de cada columna para calcular los momentos finales del renglón (9).

Conviene comparar lo que se ha realizado hasta ahora con la resolución de esta misma viga en el ejemplo 5.2 con el método de las deformaciones. En el paso *c* del ejemplo 5.2 también se soltaron los nudos de la viga uno a la vez y se calcularon los momentos que aparecían en el nudo que se soltaba y los momentos en los nudos opuestos, o sea, los momentos transportados. Pero estos cálculos se hicieron en términos de rotaciones desconocidas $\theta$, y después se plantearon las ecuaciones de equilibrio de cada nudo en términos de las mismas rotaciones, con lo cual se llegó a un sistema de ecuaciones. En el método de Cross, al soltar los nudos, los momentos en los miembros que concurren en el nudo y los momentos transportados se calculan numéricamente y se equilibra un nudo a la vez. Pero al soltar un nudo dado, se desequilibran los nudos opuestos y es necesario volver a equilibrarlos en un nuevo ciclo. Esto evita tener que

resolver el sistema de ecuaciones, pero es necesario hacer varios ciclos de distribución y transporte para aproximarse cada vez más al resultado exacto. Una de las ventajas del método es que converge muy rápidamente, por lo que con 3 o 4 ciclos se llega, por lo general, a momentos finales muy cercanos a los obtenidos con una solución cerrada, como la del método de las deformaciones. El lector puede comprobarlo comparando los momentos finales del renglón (9) con los calculados en el ejemplo 5.2.

En el paso *d* se muestra una ejecución alternativa del método de Cross, basada en los mismos principios fundamentales ya explicados. El renglón (1) es igual al de la ejecución anterior, muestra los momentos de empotramiento perfecto. En el renglón (2), se han equilibrado simultáneamente los nudos *B* y *C*. En este último, el momento de desequilibrio es únicamente la diferencia entre los momentos de empotramiento perfecto, ya que no hay momento transportado como en la ejecución anterior. En el renglón (3) se transportan, simutáneamente también, todos los momentos que aparecieron en el renglón anterior. Estos momentos transportados producen nuevos momentos de desequilibrio que se han equilibrado en el renglón (4); por ejemplo, el momento de −3.10 ton-m en el nudo *C* se equilibró con un momento de +3.10 que se distribuyó entre los miembros *BA* y *BC* de acuerdo con sus factores de distribución. En el renglón (5) se calculan nuevos momentos de transporte que vuelven a desequilibrar a los nudos *B* y *C*. En el renglón (6) se vuelven a equilibrar, y en los renglones (7) y (8) se hace un nuevo ciclo de transporte y distribución. Obsérvese que no hay momentos transportados de los empotramientos *A* y *D* a los nudos *B* y *C*, ya que los empotramientos no se desequilibran al recibir momentos transportados; es como si los empotramientos absorbiesen cualquier momento transportado que reciban. Los momentos finales se obtienen, como en la ejecución anterior, sumando los momentos en cada columna.

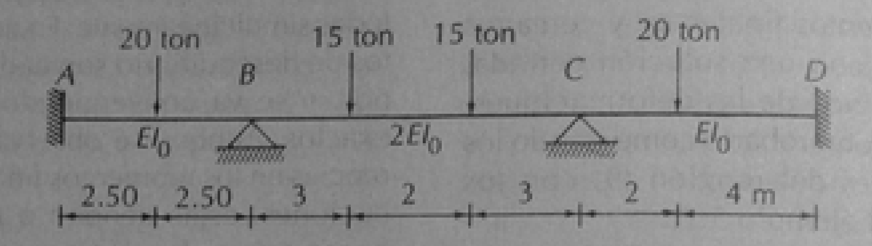
Las dos ejecuciones que se han planteado son equivalentes. La diferencia radica en que en la primera se equilibra un nudo a la vez, mientras que en la segunda se equilibran todos simultáneamente. En ambas, los momentos de desequilibrio son cada vez más pequeños, y se va convergiendo a los momentos exactos. Aunque se observan pequeñas diferencias en los momentos finales de las dos ejecuciones, éstas tienden a desaparecer si se hacen más ciclos de transporte y distribución.

Por lo general, la convergencia hacia los momentos exactos es más rápida con la primera ejecución y el número de operaciones es también menor. Sin embargo, la segunda facilita más la mecanización del procedimiento, ya que se hace un ciclo completo de distribuciones y luego otro completo de transportes; esto evita posibles confusiones en estructuras complejas. Si se usa la primera ejecución, conviene empezar equilibrando los nudos que tengan mayores momentos de desequilibrio, porque así es todavía más rápida la convergencia. En la segunda ejecución, no influye con qué nudo se empieze. La segunda ejecución es más usual que la primera, por lo que es la que se empleará en los ejemplos posteriores.

Para completar este ejemplo, se han calculado en el paso *e* los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Para ello, se obtuvieron las reacciones en los extremos de cada miembro a partir de las cargas aplicadas y de los momentos en los extremos ya calculados. Debe recordarse que todos estos momentos son de apoyo sobre barra. También se calcularon los momentos isostáticos en los puntos de aplicación de las cargas concentradas. Los momentos positivos se obtuvieron restándole a los isostáticos, el momento negativo en el punto de aplicación de las cargas. Por ejemplo, el momento de +10.21 ton-m en el miembro *AB* es igual al isostático de 25 ton-m menos el promedio de 8.05 y 21.52 ton-m.

## EJEMPLO 7.1. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON LOS EXTREMOS EMPOTRADOS

DATOS:




Paso *a*) Cálculo de rigideces angulares simplificadas

$$K_{AB} = \frac{I_0}{5} = 0.20\, I_0$$

$$K_{BC} = \frac{2\, I_0}{8} = 0.25\, I_0$$

$$K_{CD} = \frac{I_0}{6} = 0.167\, I_0$$

Paso *b*) Cálculo de factores de distribución

$$FD_{BA} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{0.20}{0.20 + 0.25} = 0.444$$

$$FD_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{0.25}{0.20 + 0.25} = 0.556$$

$$FD_{CB} = \frac{K_{BC}}{K_{BC} + K_{CD}} = \frac{0.25}{0.25 + 0.167} = 0.600$$

$$FD_{CD} = \frac{0.167}{0.25 + 0.167} = 0.400$$

## EJEMPLO 7.1 *(continuación)*

Paso *c)* Cálculo de momentos de empotramiento perfecto

$$\overline{M}_{AB}=-\frac{P\ell}{8}=-\frac{20\times 5}{8}=-12.50\ \text{ton-m}$$

$$\overline{M}_{BA}=+\frac{P\ell}{8}=+12.50\ \text{ton-m}$$

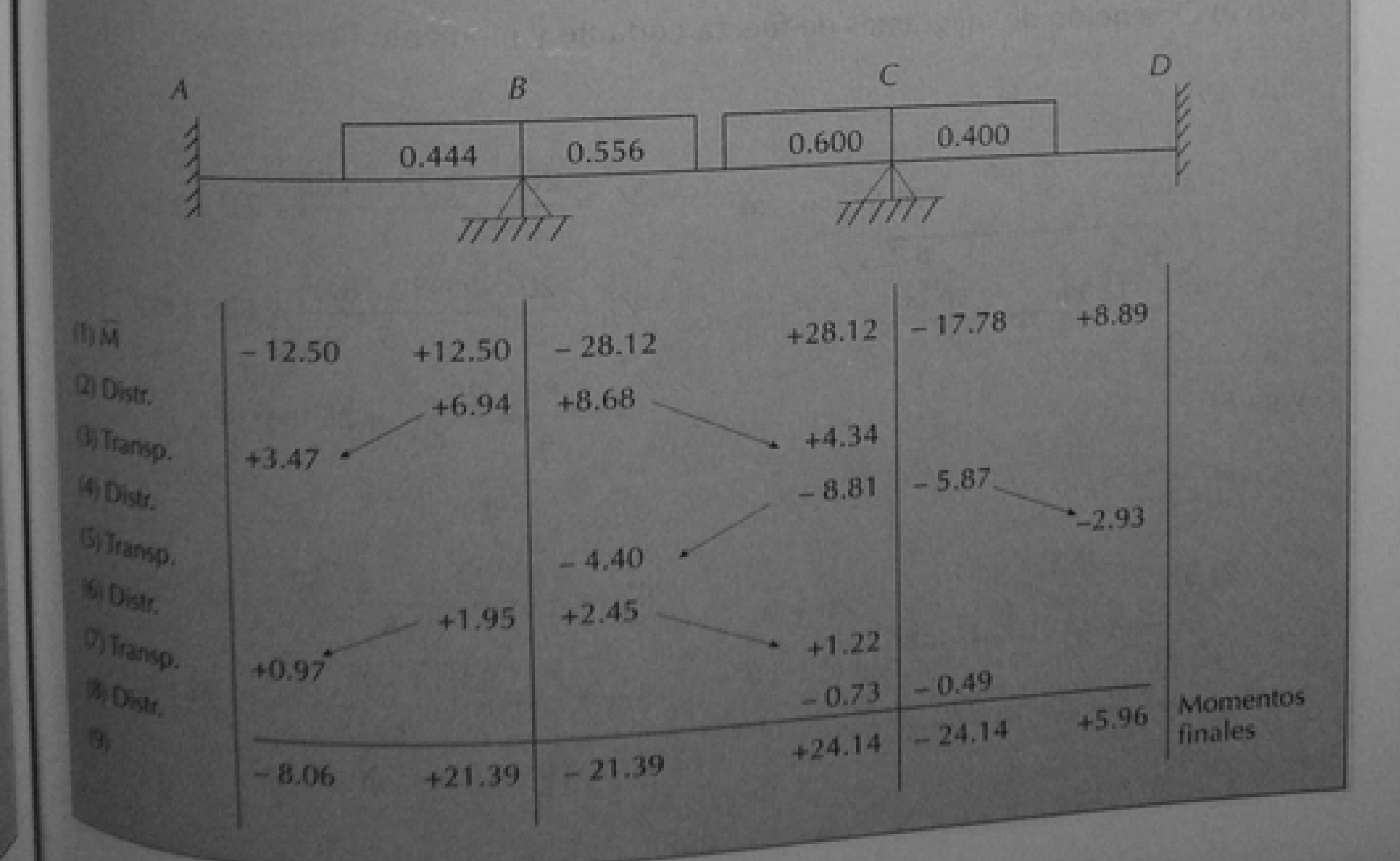
$$\overline{M}_{BC}=-\frac{Pab^2}{\ell^2}-\frac{Pa^2b}{\ell^2}=-\frac{15\times 3\times 5^2}{8^2}-\frac{15\times 3^2\times 5}{8^2}=-28.12\ \text{ton-m}$$

$$\overline{M}_{CB}=+\frac{Pa^2b}{\ell^2}+\frac{Pab^2}{\ell^2}=+28.12\ \text{ton-m}$$

$$\overline{M}_{CD}=-\frac{Pab^2}{\ell^2}=-\frac{20\times 2\times 4^2}{6^2}=-17.78\ \text{ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC}=+\frac{Pa^2b}{\ell^2}=+\frac{20\times 2^2\times 4}{6^2}=8.89\ \text{ton-m}$$

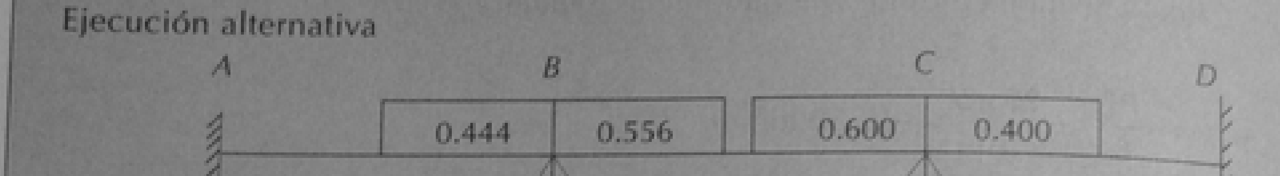
Paso *d)* Ejecución del método




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $\overline{M}$ | −12.50 | +12.50 | −28.12 | +28.12 | −17.78 | +8.89 | |
| (2) Distr. | | +6.94 | +8.68 | | | | |
| (3) Transp. | +3.47 | | | +4.34 | | | |
| (4) Distr. | | | | −8.81 | −5.87 | | |
| (5) Transp. | | | −4.40 | | | −2.93 | |
| (6) Distr. | | +1.95 | +2.45 | | | | |
| (7) Transp. | +0.97 | | | +1.22 | | | |
| (8) Distr. | | | | −0.73 | −0.49 | | |
| (9) | −8.06 | +21.39 | −21.39 | +24.14 | −24.14 | +5.96 | Momentos finales |

## EJEMPLO 7.1 *(continuación)*

Ejecución alternativa




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $\overline{M}$ | − 12.50 | +12.50 | − 28.12 | +28.12 | − 17.78 | +8.89 | |
| (2) 1a. Distr. | | +6.94 | +8.68 | −6.20 | − 4.14 | | |
| (3) 1er. Transp. | +3.47 | 0 | −3.10 | +4.34 | 0 | − 2.07 | |
| (4) 2a. Distr. | | +1.38 | +1.72 | − 2.60 | − 1.74 | | |
| (5) 2o. Transp. | +0.69 | | −1.30 | +0.86 | | −0.87 | |
| (6) 3a. Distr. | | +0.58 | +0.72 | − 0.52 | − 0.34 | | |
| (7) 3er. Transp. | +0.29 | | −0.26 | +0.36 | | − 0.17 | |
| (8) 4a. Distr. | | +0.12 | +0.14 | − 0.22 | − 0.14 | | |
| | − 8.05 | +21.52 | − 21.52 | +24.14 | − 24.14 | +5.78 | Momentos finales |

Paso *e*) Obtención de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

Viga *AB*:

8.05 20 ton 21.52 ton − m

A B

2.50 m 2.50 m

$$V_A = \frac{20}{2} - \frac{21.52 - 8.05}{5} = 7.31 \text{ ton}$$

$$V_{B1} = \frac{20}{2} + \frac{21.52 - 8.05}{5} = 12.69 \text{ ton}$$

$$M_i = \frac{P\ell}{4} = \frac{20 \times 5}{4} = 25 \text{ ton-m}$$

Viga *BC*:

21.52 15 15 ton 24.12 ton − m

B C

3 m 2 m 3 m

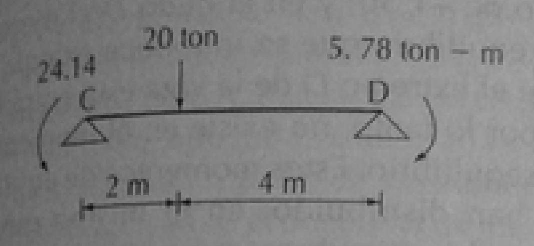
$$V_{B2} = 15 - \frac{24.14 - 21.52}{8} = 14.67 \text{ ton}$$

$$V_{C1} = 15 + \frac{24.14 - 21.52}{8} = 15.33 \text{ ton}$$

$$M_i = 15 \times 3 = 45 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 7.1 (continuación)**

*Viga CD:*




$$V_{C2} = \frac{20 \times 4}{6} + \frac{24.14 - 5.78}{6} = 16.39 \text{ ton}$$

$$V_D = \frac{20 \times 2}{6} - \frac{24.14 - 5.78}{6} = 3.61 \text{ ton}$$

$$M_i = \frac{Pab}{\ell} = \frac{20 \times 2 \times 4}{6} = 26.67 \text{ ton-m}$$

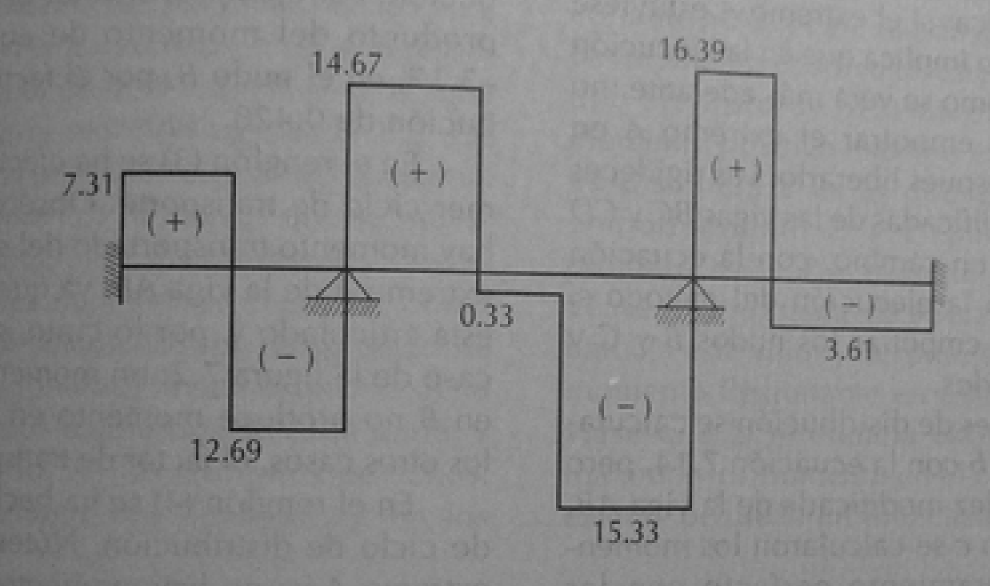



Diagrama de fuerza cortante

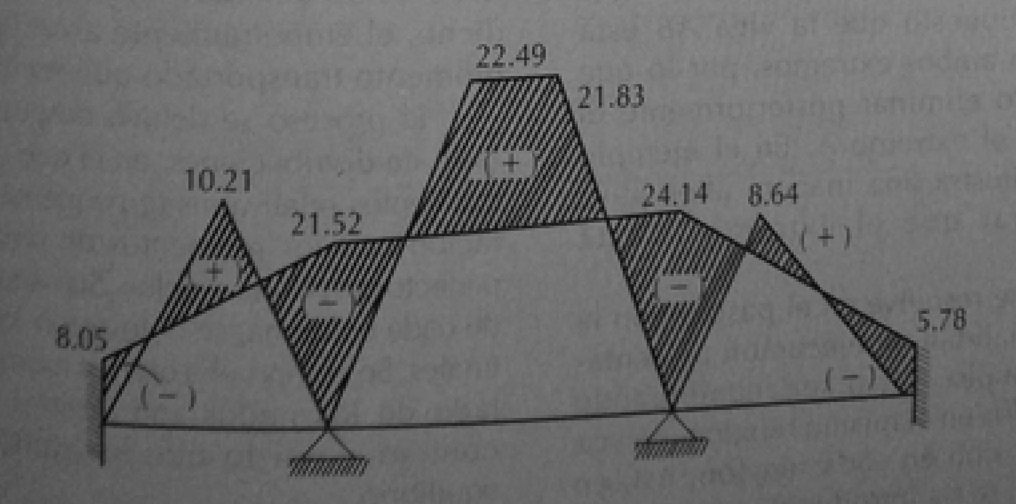



Diagrama de momentos flexionantes

**Ejemplo 7.2.** En el ejemplo anterior, los dos extremos de la viga estaban empotrados. En este ejemplo se ilustra la forma de tratar extremos libremente apoyados, como el extremo *A* de la viga mostrada.

Se observa, en el paso *a*, que la rigidez angular simplificada de la viga *AB* se calculó con la ecuación 7.4, o sea, es la rigidez angular simplificada modificada que corresponde a una viga como la mostrada en la figura 7.2. El momento que habría que aplicar en el extremo *B* para producir un giro unitario, es igual a las 3/4 partes del que habría que aplicar si el extremo *A* estuviese empotrado. Esto implica que en la ejecución del método, como se verá más adelante, no será necesario empotrar el extremo *A* en cada ciclo y después liberarlo. Las rigideces angulares simplificadas de las vigas *BC* y *CD* se calcularon, en cambio, con la ecuación 7.3, ya que en la ejecución del método sí será necesario empotrar los nudos *B* y *C* y después liberarlos.

Los factores de distribución se calcularon en el paso *b* con la ecuación 7.14, pero usando la rigidez modificada de la viga *AB*.

En el paso *c* se calcularon los momentos de empotramiento perfecto con las ecuaciones correspondientes a carga uniformemente distribuida y a carga concentrada en el centro del claro (Tabla 5.1). En este paso se ha supuesto que la viga *AB* está empotrada en ambos extremos, por lo que será necesario eliminar posteriormente el momento en el extremo *A*. En el ejemplo siguiente se ilustra una manera alternativa de considerar que el extremo *A* está articulado.

La viga se resuelve en el paso *d* con la segunda modalidad de ejecución presentada en el ejemplo 7.1, o sea, equilibrando todos los nudos en el mismo renglón, en vez de equilibrar uno en cada renglón. Así, en el renglón (2) se ha introducido un momento de +10.67 para eliminar el momento de empotramiento perfecto en el extremo *A*, donde el momento debe ser nulo; en el nudo*B* se ha introducido un momento de equilibrio de −3.17 para eliminar el momento de desequilibrio de +10.67 − 7.50 = +3.17; en el nudo *C*, un momento de equilibrio de +1.50; y en el nudo *D* el momento de equilibrio que se introduce es nulo porque el extremo *D* de la viga está empotrado y, por lo tanto, no existe en él momento de desequilibrio. Estos momentos de equilibrio se han distribuido, en el mismo renglón, entre los miembros que concurren a cada nudo de acuerdo con sus factores de distribución. Por ejemplo, el valor de −1.36 es el producto del momento de equilibrio de −3.17, en el nudo *B*, por el factor de distribución de 0.428.

En el renglón (3) se ha efectuado el primer ciclo de transporte. Obsérvese que no hay momento transportado del extremo *B* al extremo *A* de la viga *AB*, ya que este último está articulado y, por lo tanto, se está en el caso de la figura 7.2: un momento aplicado en *B* no produce momento en *A*. En todos los otros casos, el factor de transporte es 1/2.

En el renglón (4) se ha hecho el segundo ciclo de distribución. Nótese que en el extremo *A* ya no hay momento, por lo que no se introduce ningún momento de equilibrio. Tampoco hay que equilibrar el momento de +0.30 del nudo *D*, ya que, como se ha dicho, el empotramiento absorbe cualquier momento transportado que reciba.

El proceso se detuvo después del tercer ciclo de distribuciones, en el que ya aparecían momentos relativamente pequeños en comparación con los momentos de empotramiento perfecto del primer renglón. Sumando los valores de cada columna, se obtuvieron los momentos finales. Se comprueba que los momentos a cada lado de los nudos son iguales y de signo contrario, por lo que los nudos están en equilibrio.

En el paso *e* se obtienen los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Se ha analizado cada tramo de viga

con las cargas aplicadas y los momentos de apoyo sobre barra calculados en el paso anterior. Obsérvese que el signo de los momentos en los extremos de cada tramo es el mismo obtenido en la ejecución del método. Para cada tramo se han calculado las reacciones y el momento isostático $M_i$, o sea, el momento que producirían las cargas en una viga libremente apoyada. Calculadas las reacciones, se trazó, a partir de sus valores y de las cargas aplicadas, el diagrama de fuerza cortante. Por ejemplo, el valor de 6.49 es la reacción $V_A$ en el extremo $A$; el diagrama disminuye linealmente por efecto de la carga distribuida en el tramo $AB$, y en el extremo $B$ alcanza el valor de $6.49 - 2 \times 8 = -9.51$, que coincide con la reacción calculada $V_{BI}$. De manera similar se calculó el resto del diagrama.

Los momentos negativos que se muestran en el diagrama de momentos flexionantes son los calculados en el paso $d$. Como los momentos calculados son de apoyo sobre barra, los flexionantes tienen el mismo signo en los extremos izquierdos de cada barra, y signo contrario, en los extremos derechos. Por eso los momentos flexionantes en los apoyos $B$, $C$ y $D$ son negativos. Los momentos positivos que se muestran en el diagrama se obtuvieron restando al momento isostático $M_i$ el promedio de los momentos negativos en los extremos. Por ejemplo, el valor de +5.07 en el tramo $CD$ es la diferencia entre el momento isostático de 13.50 y el promedio de los momentos negativos −7.38 y −9.48. Los momentos son, por lo tanto, los que actúan en el centro del claro y no los momentos máximos. Estos últimos pueden calcularse localizando primero la posición de los puntos de fuerza cortante nula, y calculando después el valor del momento positivo en este punto. Al final del ejemplo se ilustra el cálculo del momento positivo máximo en el tramo $CD$. La distancia $x$ es la que existe entre el empotramiento $D$ y el punto de fuerza cortante nula. Por triángulos semejantes, véase el diagrama de fuerza cortante, se calcula este valor y después se determina el momento flexionante en este punto. Puede verse que la diferencia entre el momento máximo y el momento en el centro del claro es muy pequeña en este caso.

## EJEMPLO 7.2. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON UN EXTREMO EMPOTRADO Y EL OTRO ARTICULADO

DATOS:

15 ton
A
2 ton/m
B
C
3 ton/m
D
$2I_0$
$I_0$
$I_0$
8 m
2 m
2 m
6 m

Paso a) Cálculo de las rigideces angulares simplificadas

$$K_{AB} = \frac{3}{4} K_{AB} = \frac{3 \times 2 I_0}{4 \times 8} = 0.187\, I_0 \qquad \text{(ecuación 7.4)}$$

**EJEMPLO 7.2 *(continuación)***

$$K_{BC} = \frac{I_0}{4} = 0.25\, I_0$$

$$K_{CD} = \frac{I_0}{6} = 0.167\, I_0$$

Paso *b*) Cálculo de los factores de distribución

$$FD_{BA} = \frac{0.187}{0.187 + 0.250} = 0.428$$

$$FD_{BC} = \frac{0.250}{0.187 + 0.250} = 0.572$$

$$FD_{CB} = \frac{0.250}{0.250 + 0.167} = 0.600$$

$$FD_{CD} = \frac{0.167}{0.250 + 0.167} = 0.400$$

Paso *c*) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto.

$$\overline{M}_{AB} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{2 \times 8^2}{12} = -10.67 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BA} = +\frac{w\ell^2}{12} = \frac{2 \times 8^2}{12} = +10.67 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{P\ell}{8} = -\frac{15 \times 4}{8} = -7.50 \text{ ton-m}$$

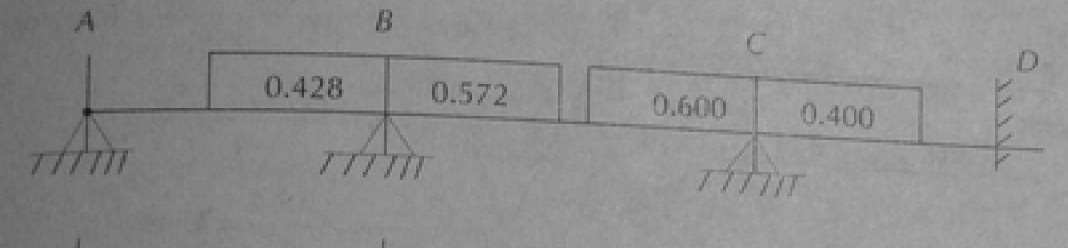
$$\overline{M}_{CB} = +\frac{P\ell}{8} = +\frac{15 \times 4}{8} = +7.50 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{3 \times 6^2}{12} = -9.00 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC} = +\frac{w\ell^2}{12} = +\frac{3 \times 6^2}{12} = +9.00 \text{ ton-m}$$

## EJEMPLO 7.2 *(continuación)*

Paso *d)* Ejecución del método




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $\overline{M}$ | − 10.67 | +10.67 | − 7.50 | +7.50 | − 9.00 | +9.00 |
| (2) 1a. Distr. | + 10.67 | − 1.36 | − 1.81 | +0.90 | + 0.60 | 0 |
| (3) 1er. Transp. | 0 | +5.33 | +0.45 | − 0.90 | 0 | +0.30 |
| (4) 2a. Distr. | 0 | −2.47 | −3.31 | +0.54 | + 0.36 | 0 |
| (5) 2o. Transp. | 0 | 0 | +0.27 | − 1.65 | 0 | +0.18 |
| (6) 3a. Distr. | 0 | − 0.12 | − 0.15 | +0.99 | + 0.66 | 0 |
| Momentos finales | 0 | +12.05 | − 12.05 | +7.38 | −7.38 | + 9.48 |

Paso *e)* Obtención de diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes

Viga *AB*:

A — 2 ton/m — B, 12.05 ton − m, 8 m

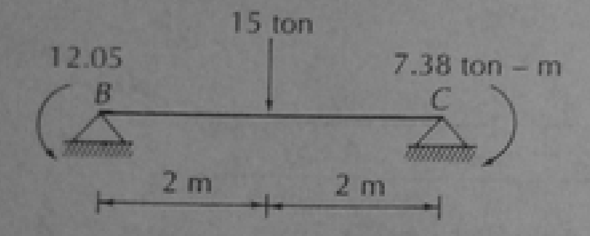
$$V_A = \frac{2\times 8}{2} - \frac{12.05}{8} = 6.49 \text{ ton}$$

$$V_{B1} = \frac{2\times 8}{2} + \frac{12.05}{8} = 9.51 \text{ ton}$$

$$M_l = \frac{wl^2}{8} = \frac{2\times 8^2}{8} = 16 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 7.2 *(continuación)***

Viga *BC*

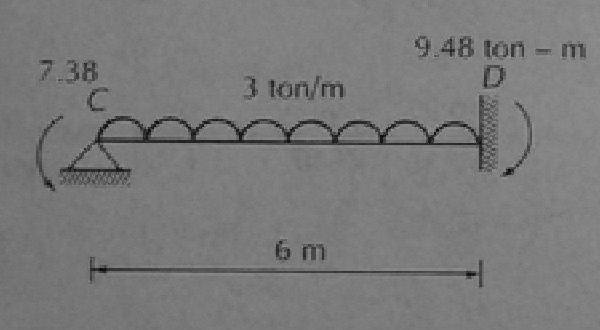



$$V_{B2} = 7.5 + \frac{12.05 - 7.38}{4} = 8.67 \text{ ton}$$

$$V_{C1} = 7.5 - \frac{12.05 - 7.38}{4} = 6.33 \text{ ton}$$

$$M_i = \frac{P\ell}{4} = \frac{15 \times 4}{4} = 15 \text{ ton-m}$$

Viga *CD*




$$V_{C2} = \frac{3 \times 6}{2} - \frac{9.48 - 7.38}{6} = 8.65 \text{ ton}$$

$$V_D = \frac{3 \times 6}{2} + \frac{9.48 - 7.38}{6} = 9.35 \text{ ton}$$

$$M_i = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{3 \times 6^2}{8} = 13.50 \text{ ton-m}$$

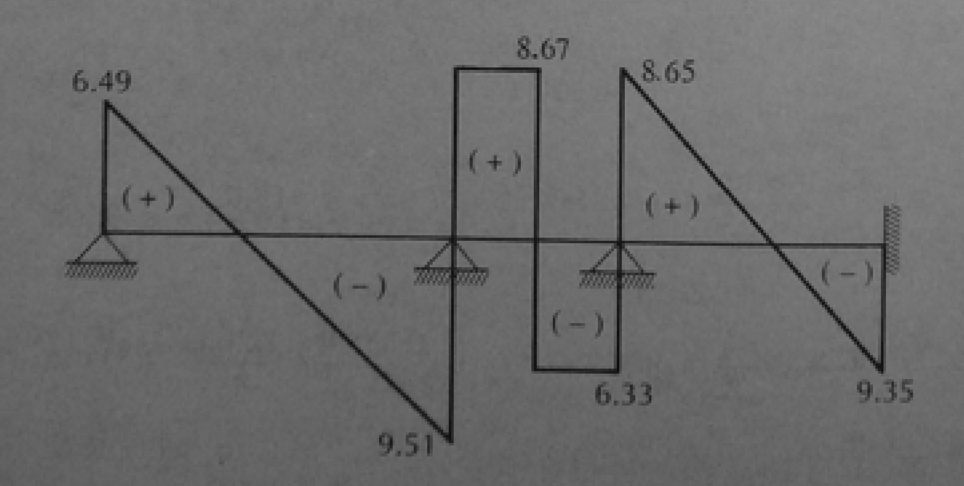
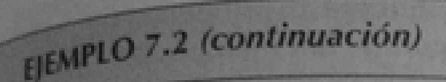



Diagrama de fuerza cortante



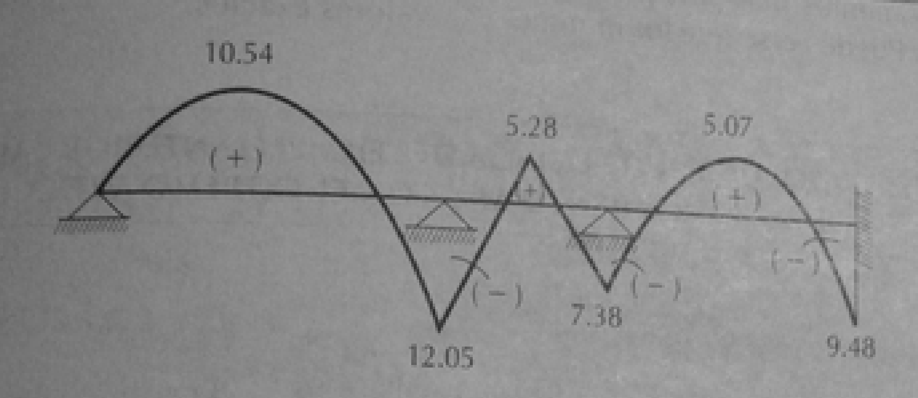
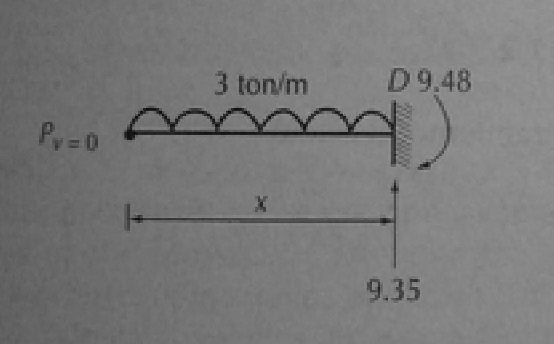




Diagrama de momentos flexionantes

Cálculo del momento positivo máximo en el tramo *CD*:




$$\frac{x}{9.35} = \frac{6}{8.65+9.35}$$

$$x = 3.12 \text{ m}$$

$$M_x = -9.48 + 9.35 \times 3.12 - \frac{3 \times 3.12^2}{2}$$

$$M_x = 5.09 \text{ ton-m}$$

**Ejemplo 7.3.** Se ilustra otra manera de resolver la misma viga del ejemplo anterior, en la cual se toma en cuenta, desde el cálculo de los momentos de empotramiento perfecto, que la viga *AB* está articulada en el extremo *A*.

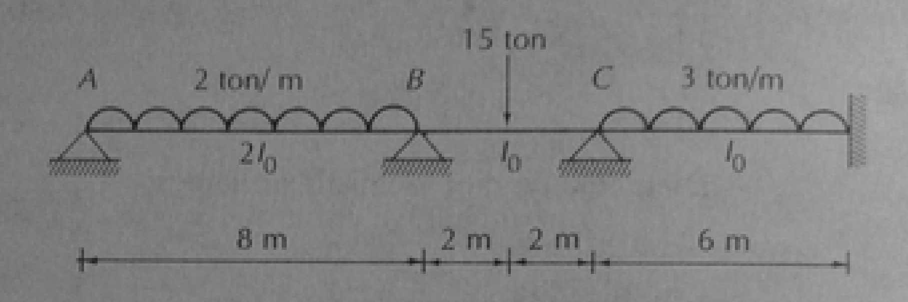
El cálculo de las rigideces angulares y de los factores de distribución, pasos *a* y *b*, es el mismo que en el ejemplo anterior. Pero en el paso c, en vez de considerar a la viga *AB* como doblemente empotrada, se considera articulada en *A* y empotrada en *B*. El valor $\overline{M}_{AB}$ es por lo tanto igual a 0 y el de $\overline{M}_{BA}$, según la Tabla 5.1, es igual a $w\ell^2/8$. Ahora, al hacer la primera distribución, ya no hay que anular el momento de empotramiento en *A*, ya que es nulo desde el principio.

El resto de los cálculos es igual que en el ejemplo anterior. Se puede ver que se llega a resultados muy parecidos. Las pequeñas diferencias se deben a que sólo se hicieron tres ciclos de distribución y transporte. Se sugiere al lector hacer uno o dos ciclos más en cada ejemplo para observar cómo disminuyen las diferencias.

Esta manera de resolver el problema es más conveniente porque se empieza con valores de los momentos más parecidos a los valores finales. Puede verse que los momentos en la tercera distribución son más pequeños que los del ejemplo 7.2, por lo que los momentos finales son más cercanos a los valores exactos.

**EJEMPLO 7.3. RESOLUCIÓN DE LA VIGA DEL EJEMPLO ANTERIOR CALCULANDO EL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO $M_{BA}$ CON EL EXTREMO ARTICULADO**

DATOS:




Paso *a*) y paso *b*) iguales a los del ejemplo 7.2

Paso *c*) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto

$$\overline{M}_{AB} = 0$$

$$\overline{M}_{BA} = +\frac{w\ell^2}{8} = +\frac{2\times 8^2}{8} = +16 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{P\ell}{8} = -\frac{15\times 4}{8} = -7.50 \text{ ton-m}$$

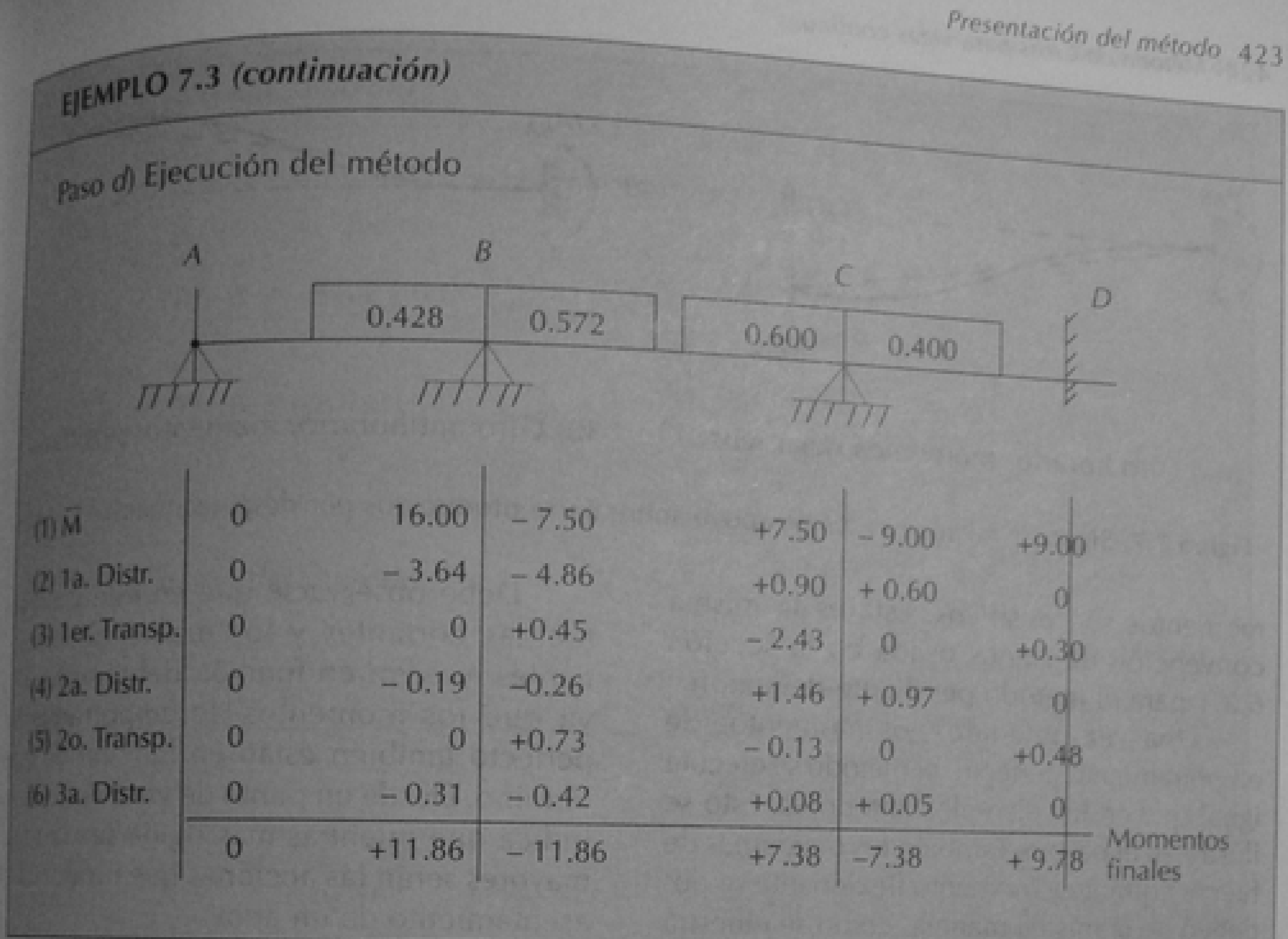
$$\overline{M}_{CB} = +\frac{P\ell}{8} = +\frac{15\times 4}{8} = +7.50 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{3\times 6^2}{12} = -9.00 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC} = +\frac{w\ell^2}{12} = +9.00 \text{ ton-m}$$

## EJEMPLO 7.3 (continuación)

Paso *d*) Ejecución del método

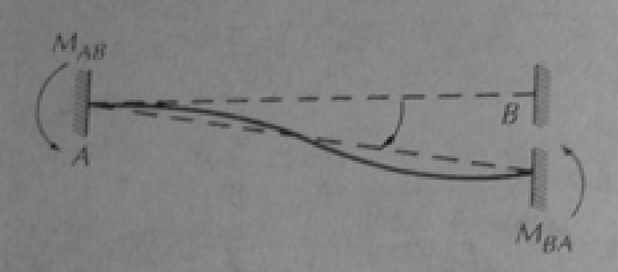



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $\overline{M}$ | 0 | 16.00 | – 7.50 | +7.50 | – 9.00 | +9.00 |
| (2) 1a. Distr. | 0 | – 3.64 | – 4.86 | +0.90 | + 0.60 | 0 |
| (3) 1er. Transp. | 0 | 0 | +0.45 | – 2.43 | 0 | +0.30 |
| (4) 2a. Distr. | 0 | – 0.19 | –0.26 | +1.46 | + 0.97 | 0 |
| (5) 2o. Transp. | 0 | 0 | +0.73 | – 0.13 | 0 | +0.48 |
| (6) 3a. Distr. | 0 | – 0.31 | – 0.42 | +0.08 | + 0.05 | 0 |
| Momentos finales | 0 | +11.86 | – 11.86 | +7.38 | –7.38 | + 9.78 |

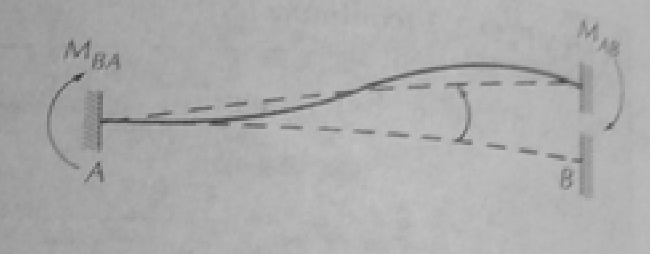
**Ejemplo 7.4**. El método de Cross resulta conveniente para resolver vigas con asentamientos en los apoyos. En este ejemplo se analiza la misma viga de los ejemplos 7.2 y 7.3, pero sin cargas y con un asentamiento de 2 cm en el apoyo *B*.

Las rigideces angulares y los factores de distribución, como sólo dependen de las propiedades de la viga y no de las acciones que actúan en ella, son iguales a los de los ejemplos anteriores. Los momentos de empotramiento perfecto se desarrollan ahora, no por efecto de las cargas, sino del asentamiento en el apoyo *B*. Si se supone que este apoyo se desplaza linealmente hacia abajo, y que se introducen empotramientos provisionales en los nudos *B* y *C*, el tramo *AB* queda en la situación de la viga de la figura 7.4, porque el extremo *A* continúa articulado, y el tramo *BC* en la de la viga de la figura 7.3. El momento de empotramiento perfecto $\overline{M}_{BA}$ se puede calcular entonces con la ecuación 7.7 y los momentos $\overline{M}_{BC}$ y $\overline{M}_{CB}$ con la ecuación 7.6, multiplicando en ambos casos el segundo miembro por el valor del desplazamiento, ya que las ecuaciones se obtuvieron para un desplazamiento unitario. Nótese que en el tramo *CD* no aparecen momentos de empotramiento perfecto porque no hay desplazamiento relativo entre sus extremos.

Es importante tener claridad en el signo de los momentos de empotramiento producidos por un desplazamiento lineal. Este signo puede verse en la figura 7.7. Si el desplazamiento es tal que la cuerda que une los extremos *A* y *B* gira en sentido horario, como en la figura 7.7-*a*, los momentos que aparecen en los extremos tienen signo negativo. Si la cuerda que une *A* y *B* gira en sentido antihorario, como en la figura 7.7-*b*, los




(a) Giro horario, momentos negativos




(b) Giro antihorario, momentos positivos

**Figura 7.7.** Signo de los momentos de apoyo sobre barra producidos por desplazamientos lineales

momentos son positivos. Esta es la misma convención de signos usada en la sección 6.3.1 para el método pendiente-deflexión.

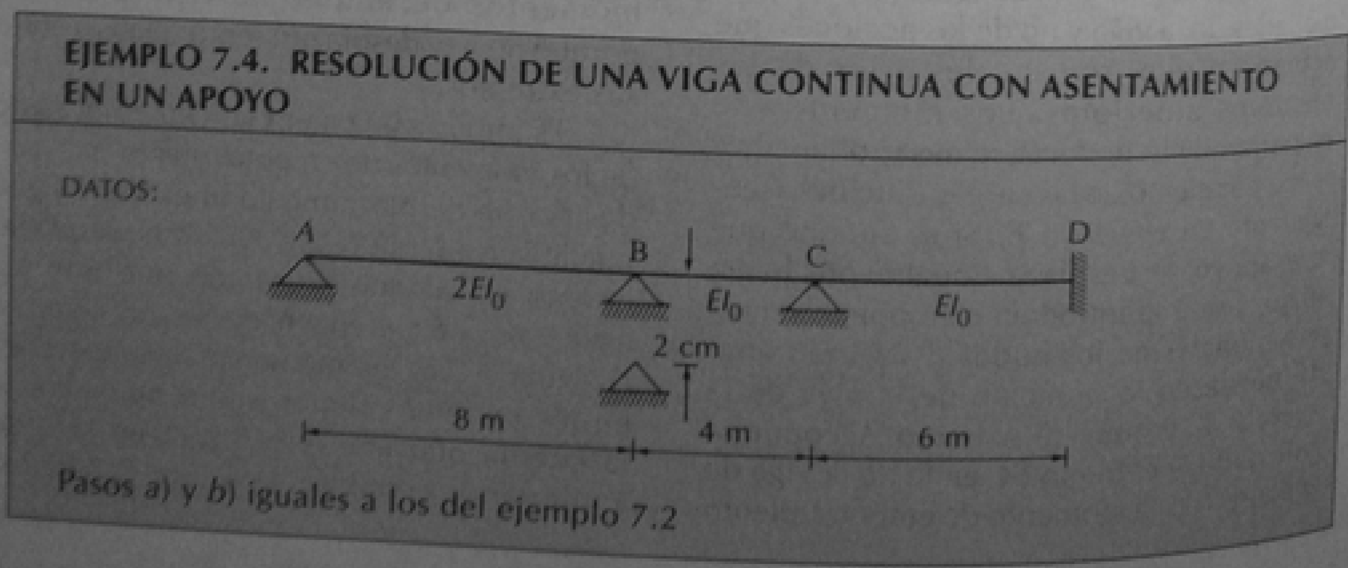
Una vez obtenidos los momentos de empotramiento perfecto, el método se ejecuta igual que en los ejemplos anteriores. Esto se ilustra en el paso *d*. También los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se obtienen de la misma manera, como se muestra en el paso *e*, con la observación de que no hay cargas aplicadas a las vigas, sino sólo momentos en los extremos. Si se observa el signo de las reacciones, se puede ver que la reacción en el apoyo *B* es hacia abajo, lo que indica que la viga tiende a regresar a la posición horizontal, mientras que en los otros apoyos es hacia arriba por la fuerza que ejerce la viga sobre ellos como consecuencia del asentamiento del apoyo *B*.

Debe observarse que en este caso las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes quedan en función del término $EI_0$, ya que los momentos de empotramiento perfecto también están en función de este término. Desde un punto de vista físico, esto indica que mientras más rígida sea la viga, mayores serán las acciones que produzca el asentamiento de un apoyo.

De manera semejante pueden resolverse vigas con asentamientos en varios apoyos o con cargas y asentamientos actuando simultáneamente. En este último caso, suele ser más conveniente aplicar el principio de superposición de causas y efectos. Los comentarios de la sección 4.3.2, planteados en el método de las fuerzas, son aplicables también a la resolución por el método de Cross.

**EJEMPLO 7.4. RESOLUCIÓN DE UNA VIGA CONTINUA CON ASENTAMIENTO EN UN APOYO**

DATOS:




Pasos *a*) y *b*) iguales a los del ejemplo 7.2

**EJEMPLO 7.4 (continuación)**

Paso c) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto

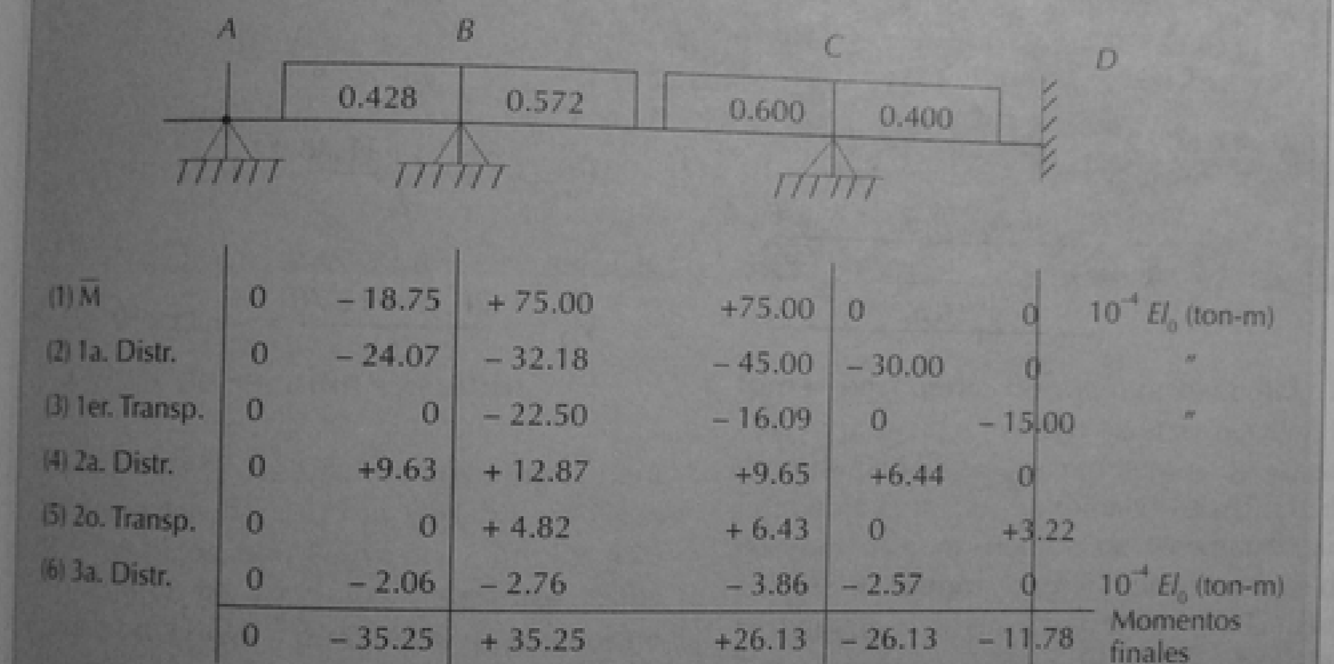
$$\overline{M}_{AB} = 0$$

$$\overline{M}_{BA} = \frac{3\,EI\,\Delta}{\ell^2} = -\frac{3\times 2\times 0.02}{8^2}\,EI_0 = -18.75\times 10^{-4}\,EI_0\ \text{(ton − m)}$$

$$\overline{M}_{BC} = \frac{6\,EI\,\Delta}{\ell^2} = \frac{6\times 0.02}{4^2}\,EI_0 = 75.00\times 10^{-4}\,EI_0\ \text{(ton − m)}$$

$$\overline{M}_{CD} = \overline{M}_{DC} = 0$$

Paso d) Ejecución del método




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) $\overline{M}$ | 0 | − 18.75 | + 75.00 | +75.00 | 0 | 0 | $10^{-4}\,EI_0$ (ton-m) |
| (2) 1a. Distr. | 0 | − 24.07 | − 32.18 | − 45.00 | − 30.00 | 0 | " |
| (3) 1er. Transp. | 0 | 0 | − 22.50 | − 16.09 | 0 | − 15.00 | " |
| (4) 2a. Distr. | 0 | +9.63 | + 12.87 | +9.65 | +6.44 | 0 | |
| (5) 2o. Transp. | 0 | 0 | + 4.82 | + 6.43 | 0 | +3.22 | |
| (6) 3a. Distr. | 0 | − 2.06 | − 2.76 | − 3.86 | − 2.57 | 0 | $10^{-4}\,EI_0$ (ton-m) |
| | 0 | − 35.25 | + 35.25 | +26.13 | − 26.13 | − 11.78 | Momentos finales |

Paso e) Obtención de diagramas de fuerza cortante y momentos flexionantes

Viga *AB*:

$35.25\times 10^{-4}\,EI_0$

A B

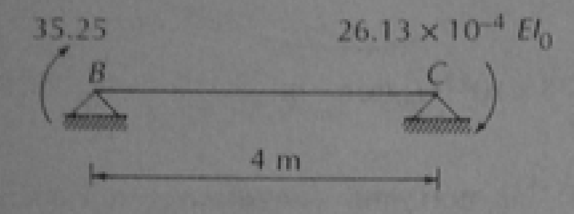
8 m

$$V_A = +\frac{35.25}{8} = +4.41\times 10^{-4}\,EI_0$$

$$V_B = -\frac{35.25}{8} = -4.41\times 10^{-4}\,EI_0$$

**EJEMPLO 7.4 *(continuación)***

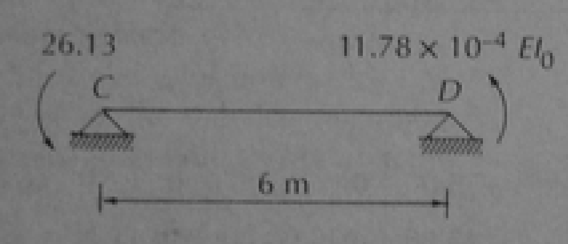
Viga *BC*:




$$V_B = -\frac{35.25 + 26.13}{4} = -15.34 \times 10^{-4}\ EI_0$$

$$V_C = -\frac{35.25 + 26.13}{4} = +15.34 \times 10^{-4}\ EI_0$$

Viga *CD*




$$V_C = +\frac{26.13 + 11.78}{6} = +6.32 \times 10^{-4}\ EI_0$$

$$V_D = -\frac{26.13 + 11.78}{6} = -6.32 \times 10^{-4}\ EI_0$$

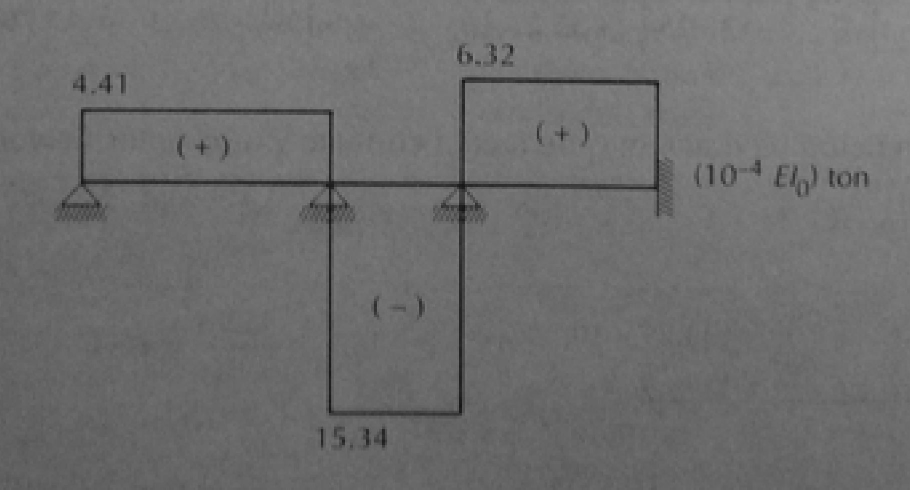



Diagrama de fuerza cortante

EJEMPLO 7.4 (continuación)

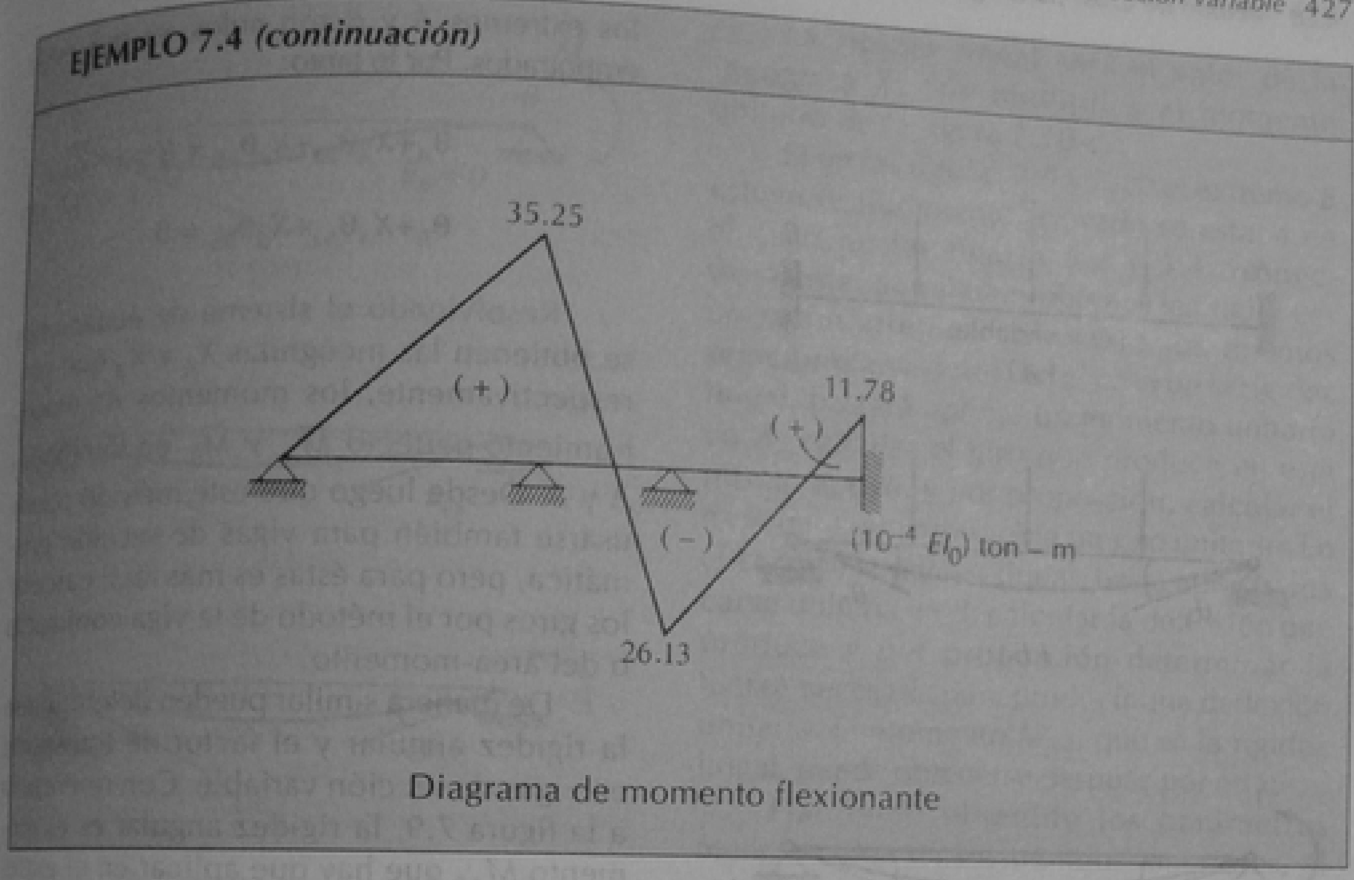
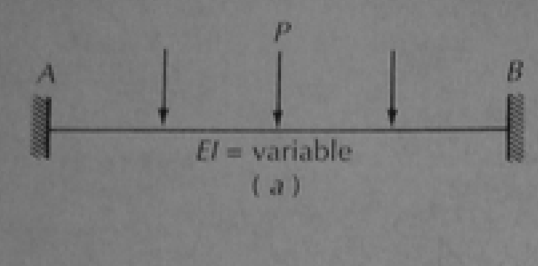


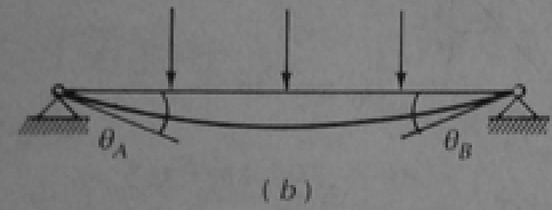

Diagrama de momento flexionante

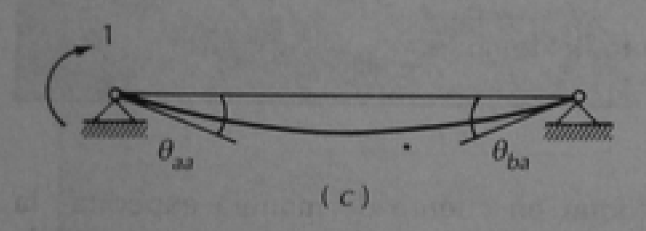
## 7.4 Vigas de sección variable

El método de Cross resulta conveniente para resolver vigas de sección variable, o vigas no prismáticas, con pequeños cambios a lo expuesto en las secciones anteriores. Estos cambios se originan porque los momentos de empotramiento perfecto, las rigideces angulares, los factores de transporte y las rigideces lineales no son iguales para vigas de sección constante y para vigas de sección variable. Los momentos de empotramiento perfecto de la Tabla 5.1 se obtuvieron para vigas prismáticas y las rigideces angulares, factores de transporte y rigideces lineales de las figuras 7.1 a 7.4 suponen un valor constante del término $EI$, lo cual sólo se cumple en secciones prismáticas.

Todos los parámetros mencionados en el párrafo anterior pueden calcularse fácilmente para vigas no prismáticas con el método de Newmark estudiado en los capítulos 2 y 3, ya que como se recordará, este método permite tomar en cuenta de manera expedita la variación de $EI$ a lo largo de una viga. Así, la determinación de los momentos de empotramiento perfecto, combinando el método de las fuerzas y el método de Newmark para cálculo de deformaciones, puede hacerse de la siguiente manera, con referencia a la figura 7.8. Supóngase que se tiene una viga doblemente empotrada de sección variable, con un sistema cualquiera de cargas P, como se muestra en la figura 7.8-a. Si las cargas son verticales, la viga tiene dos grados de indeterminación. De acuerdo con el método de las fuerzas, capítulo 4, para resolver esta viga se plantea primero una viga isostática fundamental en la que se hayan suprimido las dos redundancias, como la de la figura 7.8-*b*. Usando el método de Newmark, para que sea más fácil el cálculo de deformaciones, se determinan los giros en los extremos de la isostática fundamental sujeta a las cargas *P*. Estos giros se han denominado $\theta_A$ y $\theta_B$ en la figura 7.8-*b*.



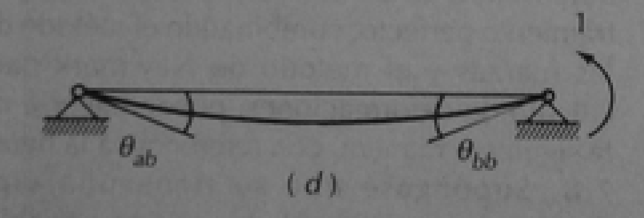




**Figura 7.8.** Deformaciones en una viga de sección variable

Continuando con el método de las fuerzas, se introducen ahora momentos unitarios en los extremos de la isostática fundamental y se calculan, también con el método de Newmark, los giros en los extremos indicados en las figuras 7.8-*c* y *d*. La notación usada para estos giros es la misma que la usada en el capítulo 4. A continuación se plantean las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, que para este caso deberán expresar que los giros finales en los extremos *A* y *B* son nulos, ya que están empotrados. Por lo tanto:

$$\theta_A+X_A\theta_{aa}+X_B\theta_{ab} = 0$$
$$\theta_B+X_A\theta_{ba}+X_B\theta_{bb} = 0 \qquad (7.15)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las incógnitas $X_A$ y $X_B$ que son, respectivamente, los momentos de empotramiento perfecto $\overline{M}_A$ y $\overline{M}_B$ en los apoyos *A* y *B*. Desde luego que este método puede usarse también para vigas de sección prismática, pero para éstas es más fácil calcular los giros por el método de la viga conjugada o del área-momento.

De manera similar pueden determinarse la rigidez angular y el factor de transporte en vigas de sección variable. Con referencia a la figura 7.9, la rigidez angular es el momento $M_{AB}$ que hay que aplicar en el extremo *A* para que la rotación $\theta_A$ sea igual a 1, y el factor de transporte es la relación $M_{BA}/M_{AB}$, figura 7.9-*a*. Estos momentos pueden obtenerse si se aplican momentos unitarios en cada extremo de la viga isostática fundamental, como se indica en las figuras 7.9-*b* y 7.9-*c*, y se plantea el sistema de ecuaciones de tal manera que exprese que las rotaciones finales en A y en B son, respectivamente, iguales a 1 y a 0:

$$\theta_{aa}X_A+\theta_{ab}X_b = 1$$
$$\theta_{ba}X_A + \theta_{bb}X_b = 0 \qquad (7.16)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se puede obtener la rigidez angular $M_{AB} = X_A$ y el factor de transporte $X_B/X_A$. De nuevo se señala que el cálculo de las rotaciones $\theta_{aa}$, $\theta_{ab}$, $\theta_{ba}$ y $\theta_{bb}$ se simplifica en vigas de sección variable si se usa el método de Newmark. El lector puede observar que el sistema de ecuaciones 7.16 es el mismo que se planteó en la figura 5.1 para determinar la rigidez angular de vigas de sección constante.

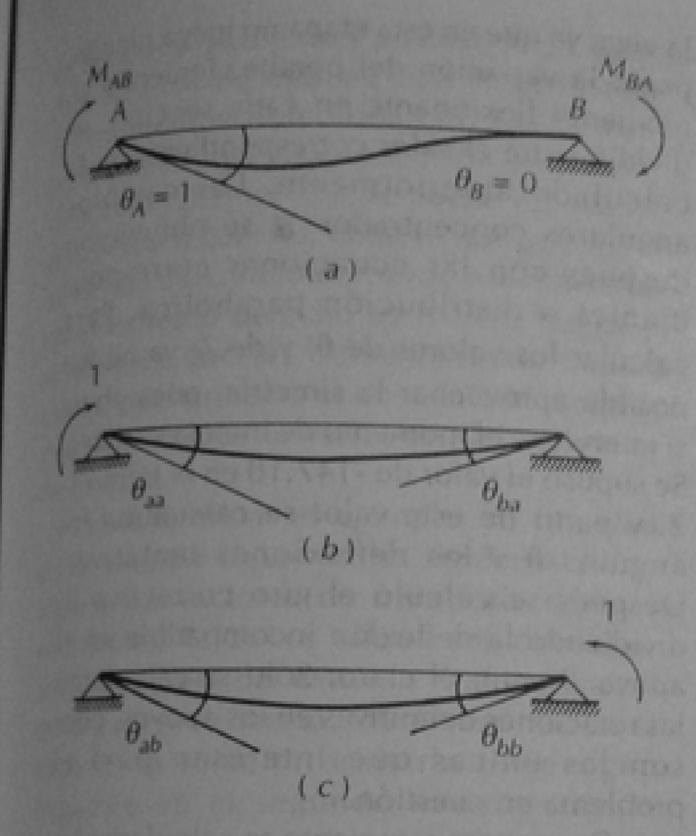



**Figura 7.9.** Determinación de la rigidez angular y el factor de transporte

Finalmente, la rigidez lineal puede determinarse como se indica en la figura 7.10. En este caso, la rigidez lineal es el momento $M_{AB} = M_{BA}$ que se presenta en los empotramientos si ocurre un desplazamiento lineal unitario entre los extremos de la viga. Conviene plantear la isostática fundamental como un voladizo al que se aplican primero un carga unitaria y luego un momento unitario en el extremo libre, figuras 7.10-*b* y 7.10-*c*. Para que la suma de las configuraciones de deformaciones de estas dos figuras, multiplicada la primera por una incógnita $X_1$ y la segunda por otra incógnita $X_2$, sea igual a la configuración de la figura 7.10-a, el sistema de ecuaciones de compatibilidad debe plantearse como:

$$\begin{aligned} \delta_{b1}X_1+\delta_{b2}X_2 &= 1 \\ \theta_{b1}X_1+\theta_{b2}X_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.17)$$

La rigidez lineal será el valor de la incógnita $X_2$ que multiplica al momento unitario de la figura 7.10-c.

Si en las figuras 7.9 y 7.10 el extremo *B* estuviese libremente apoyado se estaría en el caso de las figuras 5.2 y 5.4, respectivamente. Se pueden obtener las rigideces correspondientes aplicando los mismos principios anteriores. En el caso de la rigidez lineal, bastará aplicar un momento unitario en *A*, calcular el giro que produce en este mismo apoyo, y por proporción, calcular el momento que produciría un giro unitario. En el caso de la rigidez lineal, basta aplicar una carga unitaria en *B*, calcular la deflexión que produce y por proporción determinar la fuerza necesaria para producir una deflexión unitaria. El momento $M_{AB}$, que es la rigidez lineal, puede obtenerse después por estática.

Habiendo obtenido los parámetros mencionados en los párrafos anteriores, el método de Cross se aplica de la manera usual. Es importante que el lector observe

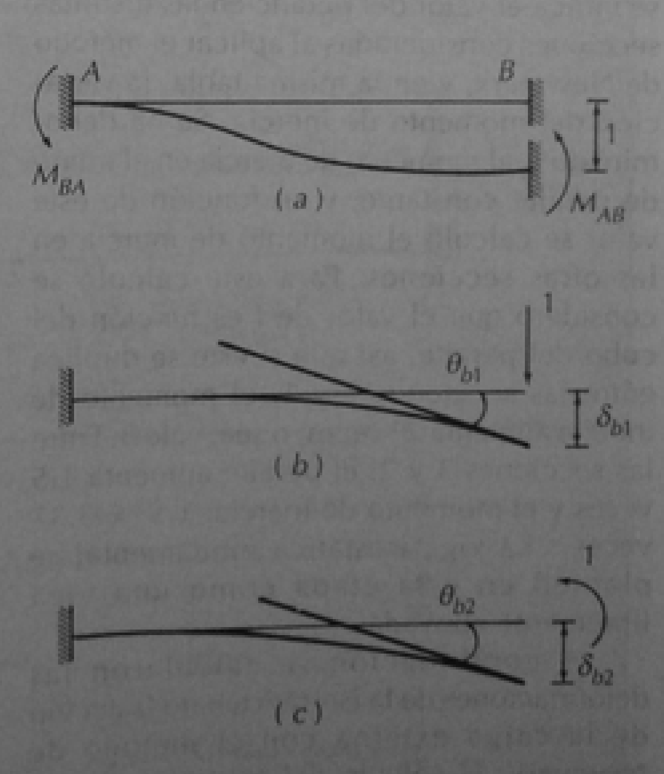



**Figura 7.10.** Determinación de la rigidez lineal

que las vigas de sección variable pueden resolverse también por los otros métodos expuestos en este texto. Por ejemplo, el método de las deformaciones del capítulo 5 puede aplicarse ya teniendo los momentos de empotramiento y las rigideces angulares y lineales calculadas como se ha presentado en esta sección. Si la isostática fundamental planteada en el método de las fuerzas es de sección variable, sus deformaciones pueden calcularse por el método de Newmark y seguir los otros pasos del método como se explicó en el capítulo 4.

**Ejemplo 7.5** Se calculan los momentos de empotramiento, el factor de transporte y la rigidez angular de una viga doblemente empotrada de sección variable. El ancho de la viga es constante, de 30 cm, pero el peralte varía, como se indica en los datos, de 100 cm en el extremo izquierdo a 50 cm en el centro del claro. Entre este punto y el extremo derecho, el peralte es constante.

Inmediatamente después de los datos, se indica el valor del peralte en las distintas secciones consideradas al aplicar el método de Newmark, y en la misma tabla, la variación del momento de inercia. Se ha denominado $I_0$ al momento de inercia en el tramo de peralte constante, y en función de este valor se calculó el momento de inercia en las otras secciones. Para este calculó se consideró que el valor de $I$ es función del cubo del peralte, así que si éste se duplica entre las secciones 3 y 1, el momento de inercia aumenta $2^3$ veces, o sea, vale 8. Entre las secciones 3 y 2, el peralte aumenta 1.5 veces y el momento de inercia, $1.5^3 = 3.37$ veces. La viga isostática fundamental se planteó en esta etapa como una viga libremente apoyada.

A continuación se calcularon las deformaciones de la isostática bajo la acción de la carga externa con el método de Newmark. El cálculo del momento flexionante se realizó aprovechando la simetría de la viga, ya que en esta etapa no juega ningún papel la variación del peralte. Teniendo el momento flexionante en cada sección, se dividió entre el valor correspondiente de $EI$ calculado anteriormente. Los cambios angulares concentrados $\overline{\alpha}$ se obtuvieron después con las ecuaciones correspondientes a distribución parabólica. Para calcular los valores de $\theta'$ y de $\overline{\theta}'$ ya no fue posible aprovechar la simetría, pues ahora sí interviene el momento de inercia variable. Se supuso el valor de -147.10 en el tramo 1-2, y partir de este valor se calcularon los ángulos $\theta$ y las deflexiones tentativas. Después se calculó el giro correctivo $\theta_c$ dividiendo la deflexión incompatible en el apoyo $B$ entre el claro. Sólo se calcularon las rotaciones definitivas en los apoyos, pues son las únicas que interesan para el problema en cuestión.

De manera semejante se calcularon las rotaciones en los apoyos para el caso de un momento unitario aplicado en el apoyo $A$ y un momento unitario aplicado en el apoyo $B$. Obsérvese que el factor de la derecha de la tabla para estos casos es diferente al de la primera tabla. Por esta razón se calcularon los últimos renglones con un factor igual para los tres casos (ton-m$^2$/$EI_0$). En las tablas de los incisos *b*) y *c*), se usaron las ecuaciones de distribución parabólica entre las secciones 1 y 3, y las ecuaciones de distribución lineal entre las secciones 3 y 5.

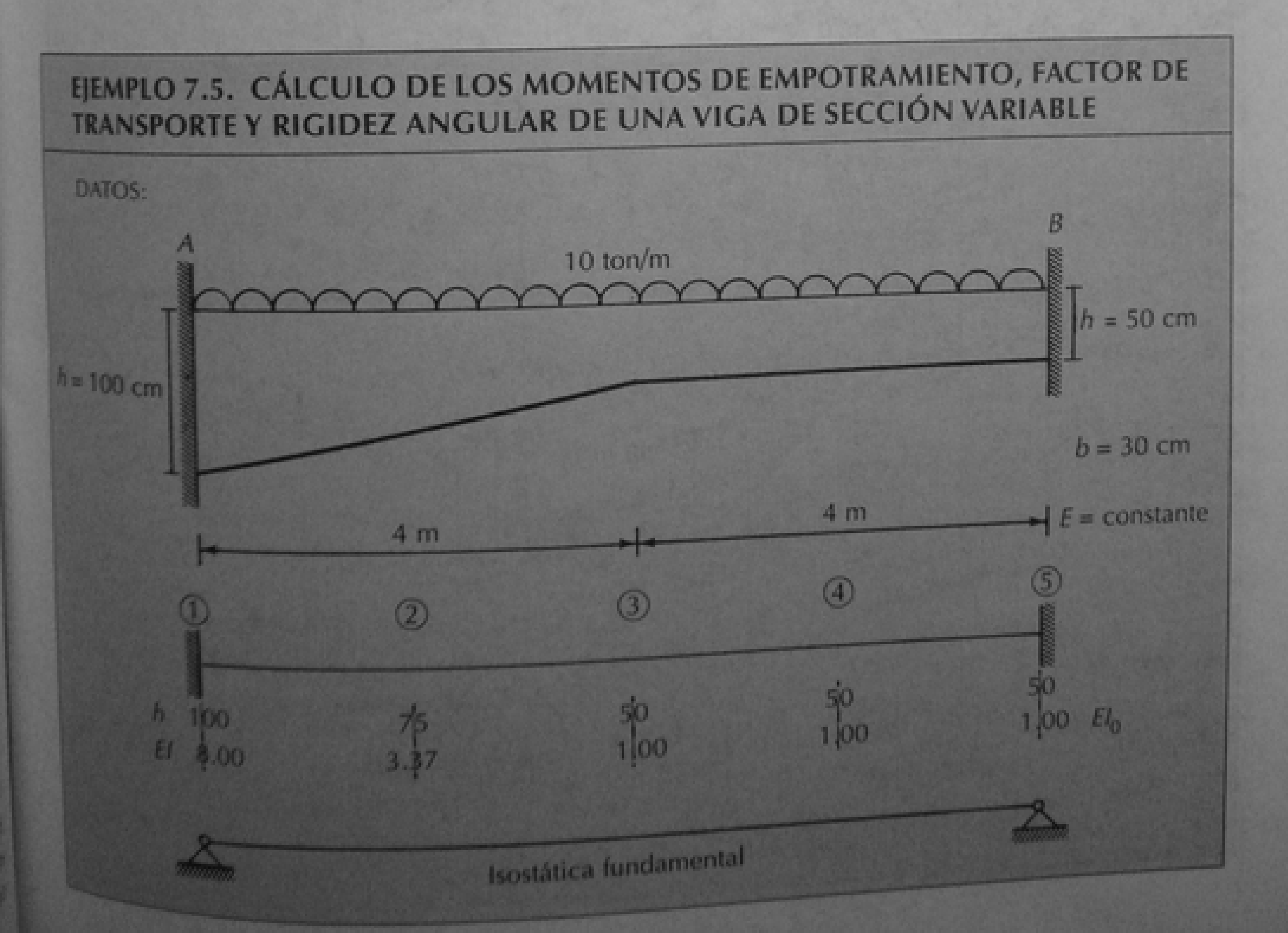
En la sección siguiente se obtuvieron los momentos de empotramiento perfecto con las ecuaciones 7.15. La primera ecuación expresa, como ya se ha dicho, que el giro total en el apoyo $A$ es nulo, y la segunda, que también lo es en el apoyo B, después de multiplicar las rotaciones de los casos *b*) y *c*) por las incógnitas $X_A$ y $X_B$ respectivamente. Los signos negativos que resultan para las incógnitas expresan que los momentos de empotramiento tienen signos contrarios a los aplicados en los extremos de la viga en los casos *b*) y *c*), con lo cual resultan negativo

en el apoyo izquierdo y positivo en el derecho. Al final de esta sección se comparan los momentos obtenidos con los correspondientes a una viga de sección prismática, en la cual valen $w\ell^2/12$. Se puede ver que en el extremo izquierdo, el de mayor peralte, el momento calculado es mayor, mientras que en el extremo derecho es menor. También se observa que las diferencias son importantes, por lo que no es conveniente despreciar el efecto de la variación del momento de inercia.

Para terminar el ejemplo, se calculan en la sección siguiente las rigideces angulares y los factores de transporte con las ecuaciones 7.16. Los valores son diferentes si se considera del extremo *A* al extremo *B* de la viga o viceversa. Obsérvese que en el caso *a*) la rotación unitaria tiene signo negativo en el segundo miembro de la primera ecuación. Esto es así porque las rotaciones en el extremo izquierdo son negativas si la viga es cóncava hacia arriba. En cambio en el caso *b*) es positiva porque en el extremo derecho tienen este signo, figura 7.18. En el caso *a*, el signo positivo de la incógnita $X_A$ indica que el momento en el extremo *A* es horario, como el aplicado en el caso *b*) de la sección Cálculo de Deformaciones, mientras que el signo negativo de $X_B$ indica que tiene signo contrario al aplicado en el caso *c*) de la misma sección. Un razonamiento semejante se puede aplicar al caso *b*).

Si la viga tuviese un momento de inercia constante igual a $I_0$, su rigidez lineal sería $4EI_0/\ell = 0.50\ EI_0$, y si fuese de $8I_0$, sería $4 \times 8\ EI_0/\ell = 4\ EI_0$. Nuevamente se puede ver que el efecto de la variación del peralte es importante y no debe despreciarse.

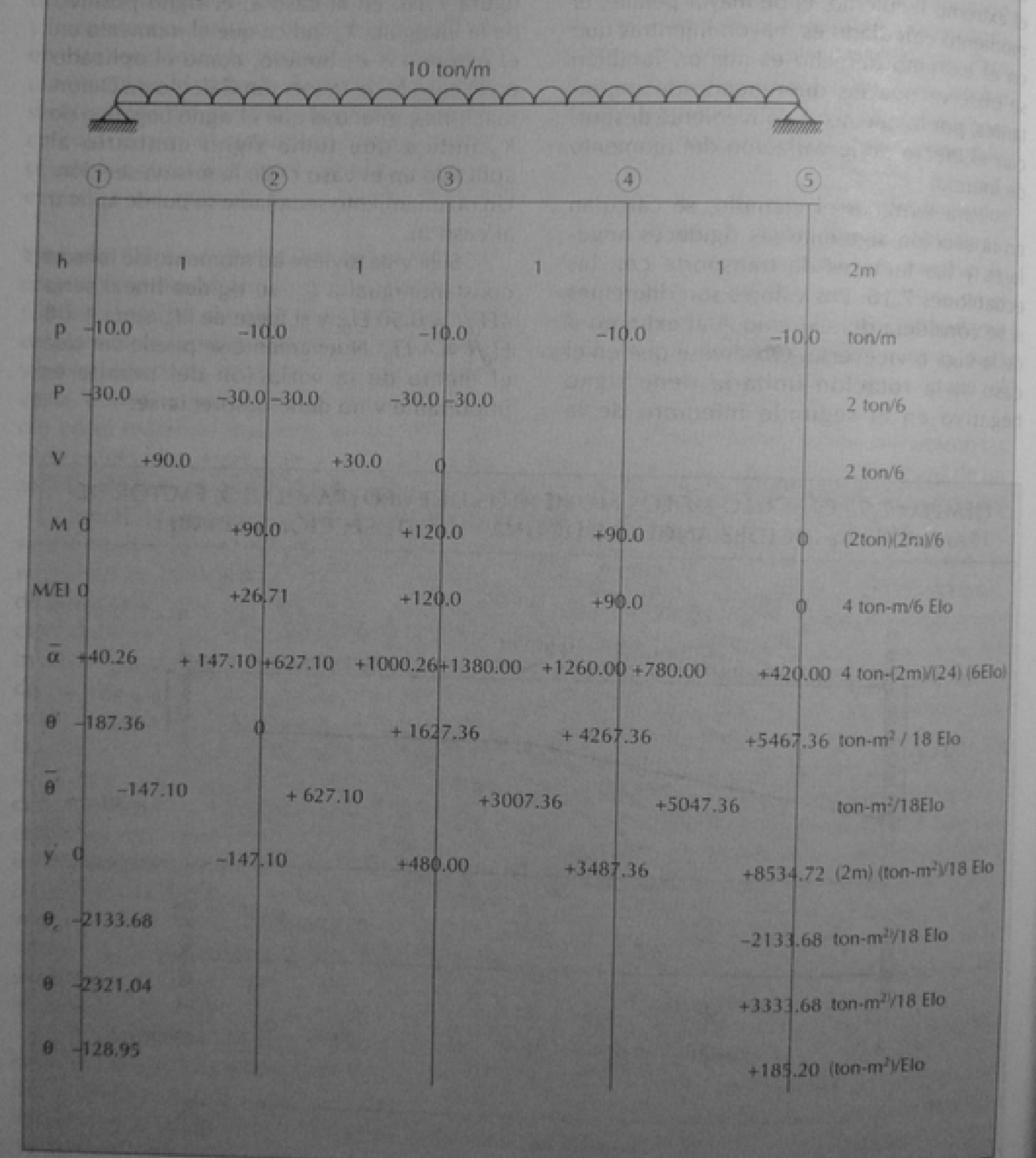
## EJEMPLO 7.5. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO, FACTOR DE TRANSPORTE Y RIGIDEZ ANGULAR DE UNA VIGA DE SECCIÓN VARIABLE



## EJEMPLO 7.5 *(continuación)*

CÁLCULO DE DEFORMACIONES

a) Con carga externa



## EJEMPLO 7.5 (continuación)

*b)* Con un momento unitario en *A*

| | ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 1.00 | | 0.75 | | 0.50 | | 0.25 | | 0 | ton-m |
| M/EI | 0.125 | | 0.222 | | 0.500 | | 0.250 | | 0 | (ton-m)/EIo |
| $\bar{\alpha}$ | +1.707 | | +2.095 / +3.595 | | +4.707 / +5.000 | | +4.000 / +2.000 | | +1.000 | (ton-m)(2m) /24 EIo |
| $\theta'$ | −3.802 | | 0 | | +8.302 | | +17.302 | | +20.302 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\bar{\theta}$ | | −2.095 | | +3.595 | | +13.302 | | +19.302 | | (ton-m²) / 12 EIo |
| $y'$ | 0 | | −2.095 | | +1.500 | | +14.802 | | +34.104 | (2m)(ton-m²)/12EIo |
| $\theta_c$ | −8.526 | | | | | | | | −8.526 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\theta$ | −12.328 | | | | | | | | +11.776 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\theta$ | −1.027 | | | | | | | | +0.981 | (ton-m²)/EIo |

*c)* Con un momento unitario en *B*

| | ① | | ② | | ③ | | ④ | | ⑤ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 0 | | 0.25 | | 0.50 | | 0.75 | | 1.00 | ton-m |
| M/EI | 0 | | 0.074 | | 0.50 | | 0.75 | | 1.00 | (ton-m)/EIo |
| $\bar{\alpha}$ | −0.056 | | +0.24 / +2.24 | | +3.944 / +7.00 | | +8.00 / +10.00 | | +11.00 | (ton-m)(2m) /24 EIo |
| $\theta'$ | −0.184 | | 0 | | +6.184 | | +21.184 | | +42.184 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\bar{\theta}$ | | −0.24 | | +2.24 | | +13.184 | | +31.184 | | (ton-m²) / 12 EIo |
| $y'$ | 0 | | −0.24 | | +2.00 | | +15.184 | | +46.368 | (2m)(ton-m²)/12EIo |
| $\theta_c$ | −11.592 | | | | | | | | −11.592 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\theta$ | −11.776 | | | | | | | | +30.592 | (ton-m²)/12 EIo |
| $\theta$ | −0.981 | | | | | | | | +2.549 | (ton-m²)/EIo |

**EJEMPLO 7.5 *(continuación)***

CÁLCULO DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

Planteo de las ecuaciones 7.15:

$$- 128.95 - 1.027X_A - 0.981X_B = 0$$
$$+ 185.20 + 0.981X_A + 2.549X_B = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\overline{M}_{AB} = X_A = -88.80\,\text{ton}-\text{m}$$

$$\overline{M}_{BA} = X_B = -38.48\,\text{ton}-\text{m}$$

Si la sección fuese prismática

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}_{BA} = \frac{w\ell^2}{12} = \frac{10 \times 8^2}{12} = 53.33\,\text{ton}-\text{m}$$

CÁLCULO DE LAS RIGIDICES ANGULARES Y FACTORES DE TRANSPORTE

a) $M_{AB}$, ecuaciones 7.16

$$- 1.027X_A - 0.981X_B = -1\ (EI_o)$$
$$+ 0.981\ X_A + 2.549X_B = 0$$

**EJEMPLO 7.5 (continuación)**

Resolviendo el sistema:

$$X_A = +1.54\ EI_o$$

$$X_B = -0.59\ EI_o$$

Rigidez angular $M_{AB} = 1.54$ ton-m

Factor de transporte $M_{BA}/M_{AB} = 0.38$

b) $M_{BA}$, ecuaciones 7.16 cambiando $B$ y $A$:

$$-1.027\ X_A - 0.981 X_B = 0$$

$$0.981 X_A + 2.549 X_B = 1\ (EI_o)$$

Resolviendo el sistema

$$X_A = -0.59\ (EI_o)$$

$$X_B = +0.62\ (EI_o)$$

Rigidez angular $M_{BA} = 0.62$ ton-m

Factor de transporte $M_{AB}/M_{BA} = 0.95$

## PROBLEMAS

7.1 Calcular la rigidez angular de los siguientes miembros si un extremo está articulado y el otro empotrado.

6 m

50 cm

20 cm

(a) $E = 200\,000 \text{ kg/cm}^2$

115 cm

12 cm

48 cm

7 m

15 cm

(b) $E = 180\,000 \text{ kg/cm}^2$

8 m

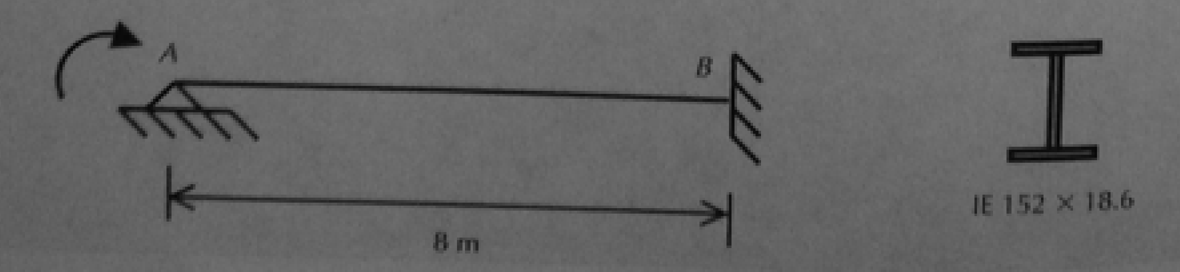
IE 152 × 18.6

(c)

7.2 Calcular la rigidez angular de los miembros del problema 7.1 si ambos extremos están articulados.

7.3 Calcular la rigidez lineal de los miembros del problema 7.1 suponiendo: a) que los dos extremos están empotrados; b) que un extremo está empotrado y el otro está articulado; c) que ambos extremos están articulados.

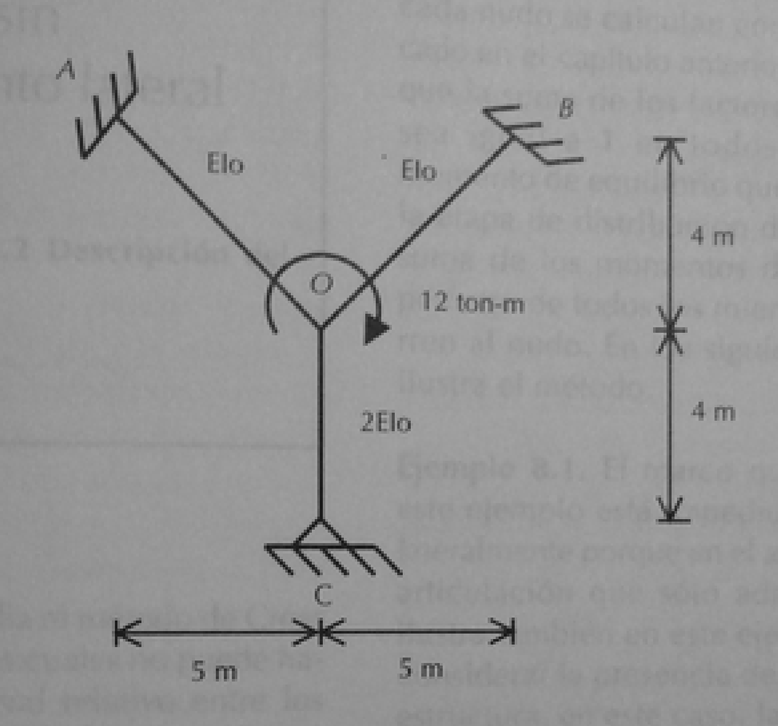
7.4 Calcular el momento que es necesario aplicar en el extremo *A* de la viga mostrada para que tenga un giro de 0.01 radianes en dicho extremo.



7.5 Calcular los momentos que aparecen en los extremos *A* y *B* de la viga del problema 7.4: a) si el extremo *B* se desplaza 0.6 cm hacia arriba; b) si el extremo *A* se desplaza 0.4 cm hacia arriba; c) si el extremo *B* se desplaza 1.1 cm hacia abajo.

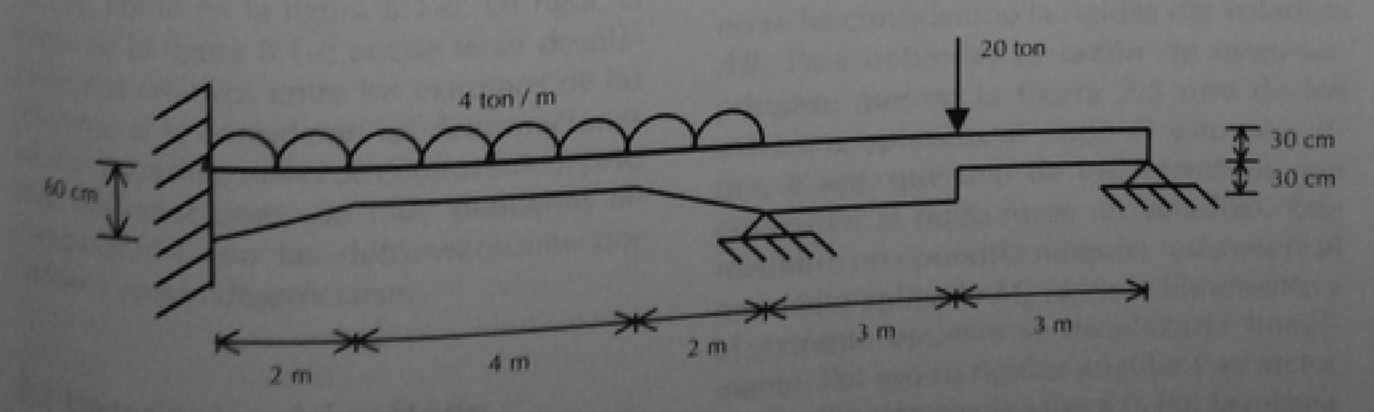
7.6 Repetir el problema 7.5 suponiendo que ambos extremos están empotrados.

7.7 Calcular los momentos de empotramiento en *A* y *B* si se aplica un momento de 12 ton-m en el nudo *O* de la estructura mostrada.




7.8 Analizar las vigas del problema 6.1 por el método de Cross, trazando los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

7.9 Analizar la siguiente viga por el método de Cross tomando en cuenta que no es prismática. Despreciar el peso propio.



CAPÍTULO 8

# Método de Cross para marcos sin desplazamiento lateral

8.1 Introducción / 8.2 Descripción del método

## 8.1 Introducción

En este capítulo se estudia el método de Cross aplicado a marcos en los cuales no puede haber deplazamiento lateral relativo entre los extremos de los miembros, o sea, que no pueden desarrollarse momentos como los mostrados en las figuras 7.3 y 7.4. La imposibilidad de que exista desplazamiento lateral relativo puede deberse a restricciones en los apoyos o en los nudos de los marcos, como en las figuras 8.1-*a*,*b* y *c*, o bien, a condiciones de simetría, tanto en geometría como en carga, de los marcos, como en la figura 8.1-*d*. En rigor, el marco de la figura 8.1-*c* puede tener desplazamientos relativos entre los extremos de las columnas si se consideran las deformaciones axiales de las diagonales de contraventeo; pero estas deformaciones son muy pequeñas en comparación con las deformaciones por flexión y suelen despreciarse.

## 8.2 Descripción del método

El método se ejecuta de la misma manera que para vigas continuas. La única diferencia estriba en que pueden concurrir más de dos miembros a un mismo nudo. Por ejemplo, en un nudo interior de un marco reticular se unen generalmente dos vigas y dos columnas. Las rigideces angulares de los miembros y los factores de distribución en cada nudo se calculan como ya se ha explicado en el capítulo anterior. Debe verificarse que la suma de los factores de distribución sea igual a 1 en todos los nudos y el momento de equilibrio que se introduzca en la etapa de distribución debe ser igual a la suma de los momentos de empotramiento perfecto de todos los miembros que concurren al nudo. En los siguientes ejemplos se ilustra el método.

**Ejemplo 8.1.** El marco que se resuelve en este ejemplo está impedido de desplazarse lateralmente porque en el apoyo *D* existe una articulación que sólo admite rotación. Se ilustra también en este ejemplo la forma de considerar la presencia de voladizos en una estructura, en este caso, la viga *AB*.

Los pasos *a*, *b* y *c* se realizan de la misma manera que en los ejemplos del capítulo anterior. Nótese que para los miembros *CD* y *CF* se han usado las rigideces angulares simplificadas modificadas calculadas con la ecuación 7.4, ya que tienen un extremo articulado. Obsérvese también que al calcular los factores de distribución en el nudo *B*, no se ha considerado la rigidez del voladizo *AB*. Para entender la razón de esto, supóngase que en la figura 7.5 uno de los extremos opuestos al nudo *O* estuviese libre, o sea, que uno de los miembros que concurren al nudo fuese un voladizo. Este miembro no opondría ninguna resistencia al momento aplicado $M_o$, giraría libremente y el extremo opuesto se desplazaría linealmente. Por eso su rigidez angular y su factor de distribución son iguales a 0. Por la misma razón, el factor de transporte del nudo al extremo del voladizo también es igual a 0;

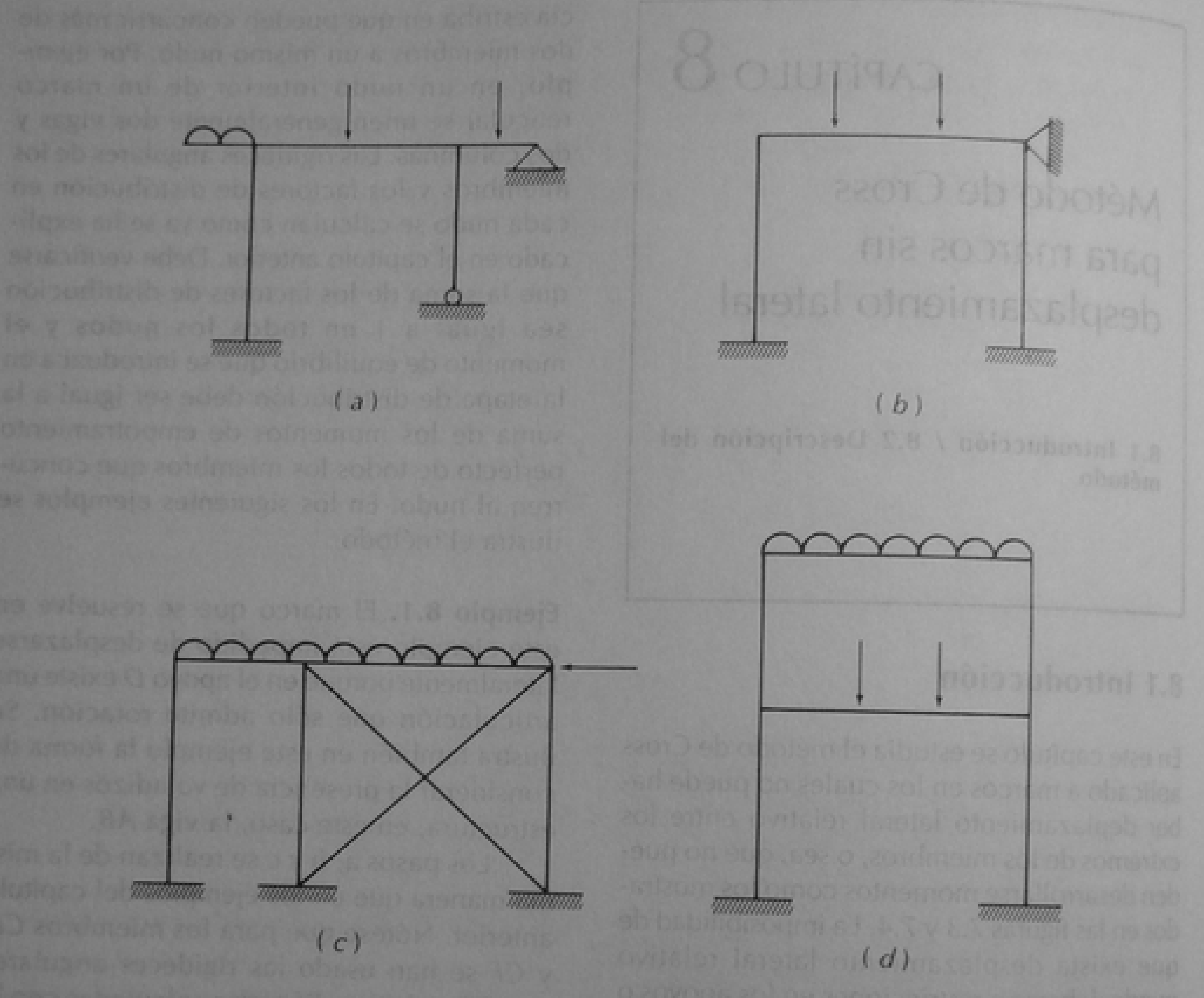


**Figura 8.1.** Ejemplos de marcos sin desplazamiento lateral

al girar el nudo, no aparece ningún momento en el extremo libre del voladizo. Por último, nótese que el momento de empotramiento perfecto $M_{BA}$ es el momento en el extremo del voladizo; su signo es positivo porque se trabaja con momentos de apoyo sobre barra, y en el extremo derecho es contrario al flexionante.

En el paso *d* se desarrolla el método. Conviene establecer una convención sobre la localización de los cálculos correspondientes a cada miembro de la estructura. Aquí se ha seguido una convención usual que consiste en ubicar las columnas de cálculo en la parte inferior del miembro, si se trata de extremos izquierdos, y en la parte superior, si se trata de extremos derechos. Así, el factor de distribución $FD_{BC}$, y todos los cálculos correspondientes al extremo *B* del miembro *BC*, se han escrito en la parte inferior del miembro, de arriba hacia abajo. En cambio, los correspondientes al extremo *C* del mismo miembro, por tratarse del extremo derecho, se han escrito en la parte superior y de abajo hacia arriba. En las columnas se sigue la misma convención, manteniendo también la convención establecida en la sección 2.9.2 y en la figura 2.15: el

extremo inferior de una columna se considera como el extremo izquierdo de una viga, y el extremo superior, como el extremo derecho. Así, el extremo $E$ de la columna $EB$ sería un extremo izquierdo y los cálculos se colocan, por lo tanto, en la parte inferior, que equivale a la parte derecha de la columna. Con esta convención, o con alguna otra equivalente, es posible trabajar en nudos a los que concurran cuatro miembros sin que se superpongan los cálculos. En el ejemplo siguiente se muestra otra forma de ordenar los cálculos.

Aunque no se han numerado los renglones, la secuencia de los cálculos es la misma seguida en los ejemplos de vigas. En el primer renglón, después de los factores de distribución, se han anotado los momentos de empotramiento perfecto, por ejemplo, -13.33 y +6.67 en el miembro $BC$. Obsérvese que en el miembro $CD$ se calcularon los momentos de empotramiento perfecto como si ambos extremos estuviesen empotrados. Por eso, se anotó el momento de +10.00 en el extremo $D$ aunque esté articulado; es la variante que se siguió en el ejemplo 7.2 y no la del ejemplo 7.3. En esta estructura no existen cargas transversales aplicadas a las columnas. Si existiesen, también se calcularían momentos de empotramiento perfecto en ellas y se anotarían en el lugar correspondiente, donde ahora se han puesto ceros.

En el segundo renglón se ha hecho la primera distribución de momentos de equilibrio. Por ejemplo, en el nudo $B$, el momento de desequilibrio es (+9.00 – 13.33 = –4.33). Por lo tanto, se distribuyó un momento de equilibrio de +4.33 entre los miembros $BA$, $BC$ y $BE$, pero como el factor de distribución del voladizo $BA$ es igual a 0, sólo se distribuyó entre $BC$ y $BE$, tocándoles +1.60 y +2.73, respectivamente. Obsérvese que en la articulación $D$ se anuló el momento de empotramiento perfecto de +10.00. Después de este ciclo de distribución se ha trazado una raya en cada columna de cálculos.

A continuación se ha efectuado un ciclo de transporte de momentos. Por ejemplo, el momento de +1.60 en el extremo $B$ del miembro $BC$ transporta un momento de +0.80 al extremo $C$ del mismo miembro. Obsérvese que del extremo $C$ al extremo $D$ de $CD$ no hay transporte por ser este último una articulación. Tampoco puede haber transporte del extremo del voladizo al nudo $B$. El momento de +9.00 ton-m será el momento final $M_{BA}$.

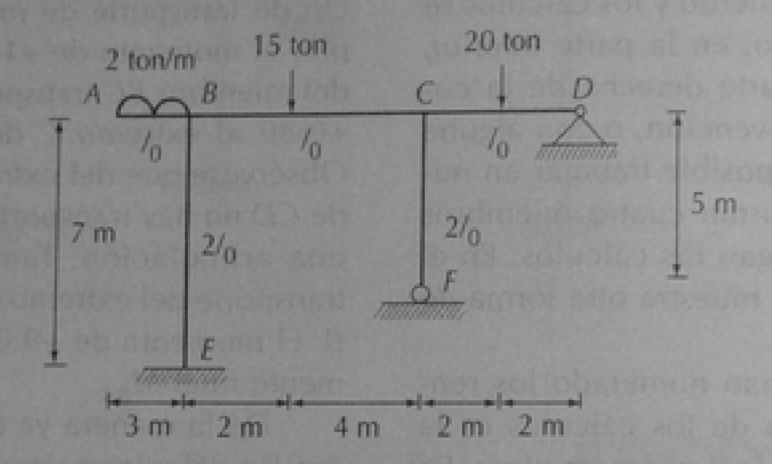
De la manera ya descrita se continuaron los cálculos hasta completar tres ciclos de distribución. Después del tercer ciclo se trazó una raya doble, para indicar que se habían terminado dichos ciclos, y se sumaron los momentos de cada columna de cálculos. Se debe verificar que todos los nudos estén en equilibrio. Para mayor claridad del desarrollo del ejemplo, se anotaron todos los ceros en las articulaciones, pero esto no es desde luego necesario.

Se sugiere al lector repetir este ejemplo con la variante del ejemplo 7.3, o sea, calculando el momento de empotramiento perfecto $M_{CD}$ considerando que el extremo $D$ está articulado.

En el paso e se obtuvieron los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la manera ya explicada en ejemplos anteriores. Los momentos positivos se calcularon en los puntos de aplicación de las cargas concentradas, donde son máximos. Al trazar los diagramas en las columnas, se consideró que los extremos inferiores equivalían a los extremos izquierdos de vigas, y los extremos superiores, a los extremos derechos (convención de la figura 2.15). Los valores negativos se dibujaron por debajo de los miembros y los positivos, por arriba.

## EJEMPLO 8.1. RESOLUCIÓN DE UN MARCO SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

DATOS:




Paso *a*) Cálculo de las rigideces angulares simplificadas.

$$K_{BC} = \frac{I_o}{6} = 0.167\, I_o$$

$$K'_{CD} = \frac{3}{4} K_{CD} = \frac{3 \times I_o}{4 \times 4} = 0.187\, I_o$$

$$K_{BE} = \frac{2\, I_o}{7} = 0.286\, I_o$$

$$K'_{CF} = \frac{3}{4} K_{CF} = \frac{3 \times 2\, I_o}{4 \times 5} = 0.300\, I_o$$

Paso *b*) Cálculo de los factores de distribución.

$$FD_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BE} + K_{BC}} = \frac{0.167}{0.286 + 0.167} = 0.369$$

$$FD_{BE} = \frac{K_{BE}}{K_{BE} + K_{BC}} = \frac{0.286}{0.286 + 0.167} = 0.631$$

**EJEMPLO 8.1 *(continuación)***

$$FD_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K'_{CD} + K'_{CF}} = \frac{0.167}{0.167 + 0.187 + 0.300} = 0.255$$

$$FD_{CD} = \frac{K'_{CD}}{K_{CB} + K'_{CD} + K'_{CF}} = \frac{0.187}{0.167 + 0.187 + 0.300} = 0.286$$

$$FD_{CF} = \frac{K'_{CF}}{K_{CB} + K'_{CD} + K'_{CF}} = \frac{0.300}{0.167 + 0.187 + 0.300} = 0.459$$

Paso *c)* Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto.

$$\overline{M}_{BA} = \frac{w\ell^2}{2} = \frac{2 \times 3^2}{2} = 9 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{Pab^2}{\ell^2} = -\frac{15 \times 2 \times 4^2}{6^2} = -13.33 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CB} = \frac{Pa^2b}{\ell^2} = \frac{15 \times 2^2 \times 4}{6^2} = 6.67 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{P\ell}{8} = -\frac{20 \times 4}{8} = -10 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC} = \frac{P\ell}{8} = \frac{20 \times 4}{8} = 10 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 8.1 *(continuación)***

Paso *d*) Ejecución del método.

| | | |
|---|---|---|
| + 9.00 | + 9.34 | 0 |
| 0 | + 0.02 | 0 |
| 0 | − 0.07 | 0 |
| 0 | + 1.07 | 0 |
| 0 | + 0.80 | 0 |
| 0 | + 0.85 | 0 |
| 9.00 | + 6.67 | 0 |
| 0 | 0.255 | − 10.00 |
| | | + 10.00 |

+ 2.13, − 0.34, 0, − 0.27, 0, + 2.73, 0, 0.631

0.369, −13.33, + 1.60, + 0.42, − 0.15, + 0.53, − 0.20, −11.13

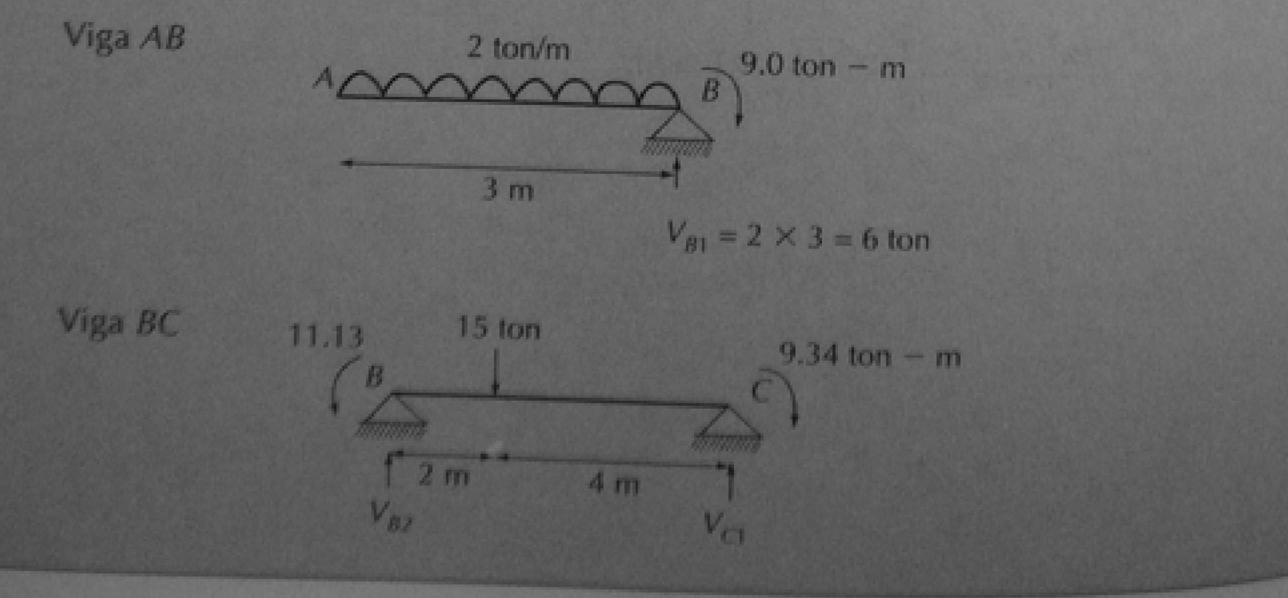
+3.49, +0.03, 0, 1.93, 0, + 1.53, 0, 0.459

0.286, −10.00, + 0.95, − 5.00, + 1.20, 0, + 0.02, − 12.83

0, 0, + 1.36, 0, − 0.13, 0, + 1.23

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

Paso *e*) Obtención de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



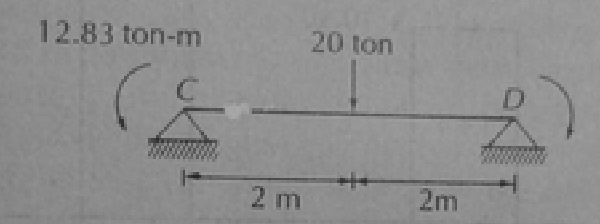
**EJEMPLO 8.1** ***(continuación)***

$$V_{B2}=\frac{15\times 4}{6}+\frac{11.13-9.34}{6}=10.30\text{ ton}$$

$$V_{C1}=\frac{15\times 2}{6}-\frac{11.13-9.34}{6}=4.70\text{ ton}$$

$$M(+)=-M_{BC}+V_{B2}(2)=-11.13+(10.30\times 2)=+9.47\text{ ton-m}$$

Viga *CD*

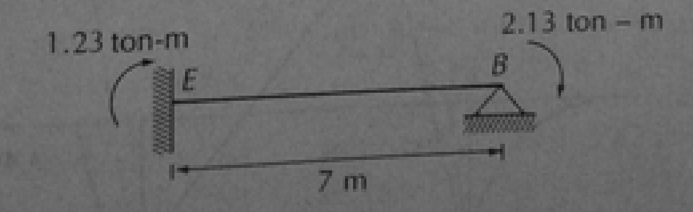



$$V_{C2}=\frac{20}{2}+\frac{12.83}{4}=13.21\text{ ton}$$

$$V_{C2}=\frac{20}{2}-\frac{12.83}{4}=6.79\text{ ton}$$

$$M(+)=V_D(2)=+6.79\times 2=+13.58\text{ ton-m}$$

Columna *EB*

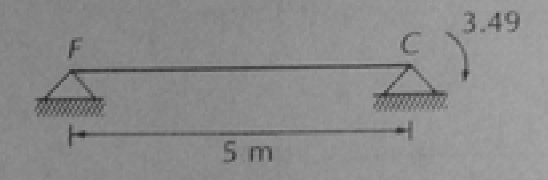


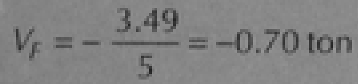

$$V_E=-\frac{1.23+2.13}{7}=-0.48\text{ ton}$$

$$V_{B3}=+\frac{1.23+2.13}{7}=+0.48\text{ ton}$$

**EJEMPLO 8.1 *(continuación)***

Columna *CF*



$$V_F = -\frac{3.49}{5} = -0.70 \text{ ton}$$

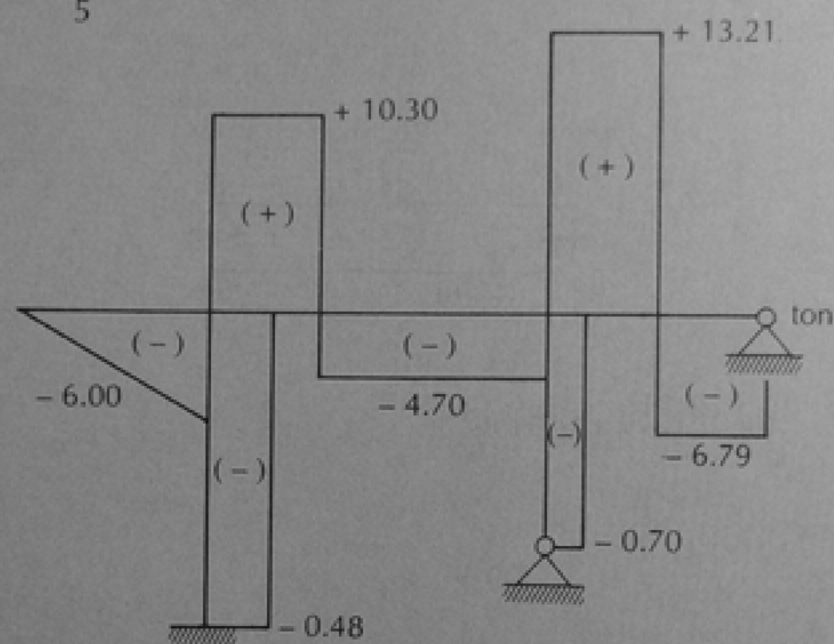



Diagrama de fuerzas cortantes.

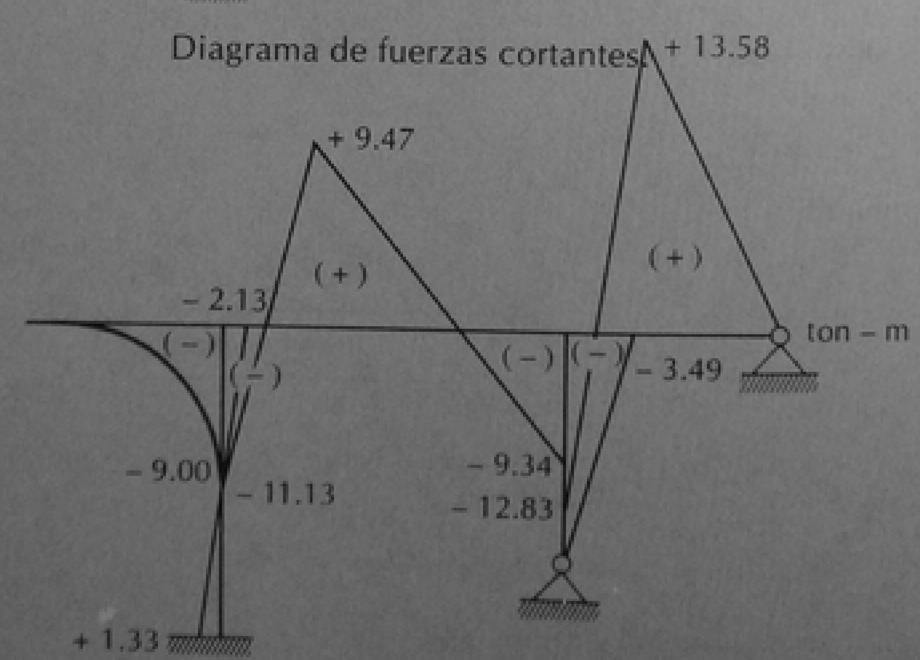



Diagrama de momentos flexionantes.

**Ejemplo 8.2.** El marco resuelto en este ejemplo tendría desplazamientos laterales, tanto por ser asimétrico como por la presencia de la carga horizontal de 8 ton que actúa en la columna *AB*. Sin embargo, el apoyo exterior que existe en el nudo *D* impide este desplazamiento y el marco puede resolverse por los métodos estudiados en este capítulo.

El cálculo de las rigideces angulares y de los factores de distribución, pasos *a* y *b* no presenta ninguna diferencia respecto a los ejemplos anteriores. En la columna *EC* se usó la rigidez modificada por la articulación que existe en el apoyo *E*.

En el paso *c* debe observarse que en los extremos de la columna *AB* se presentan momentos de empotramiento perfecto por efecto de la carga horizontal de 8 ton. Si se sigue la convención de la figura 2.15, en el extremo *A* el momento es negativo, y en el extremo *B* es positivo.

El paso *d* presenta una forma diferente de llevar a cabo los cálculos. En vez de efectuarlos sobre un croquis del marco, como en el ejemplo anterior, se hacen en una tabla conforme se explica a continuación. En el primer renglón de la tabla, se escriben todos los nudos de la estructura, en este caso del nudo *A* al nudo *F*, dejando un ancho suficiente para que en el segundo renglón se anoten, debajo de cada uno, los miembros que concurran al nudo. Por ejemplo, al nudo *D* concurren los miembros *DC* y *DF*. Es posible que un mismo miembro aparezca más de una vez, ya que puede concurrir a más de un nudo. Por ejemplo, la columna *AB* aparece como miembro *AB* debajo del nudo *A* y como miembro *BA* debajo del nudo *B*. En el tercer renglón se anotan los factores de distribución en cada extremo de cada miembro. Obsérvese que en los empotramientos *A* y *F* se ha anotado un factor de 0 y en la articulación *E*, de 1.

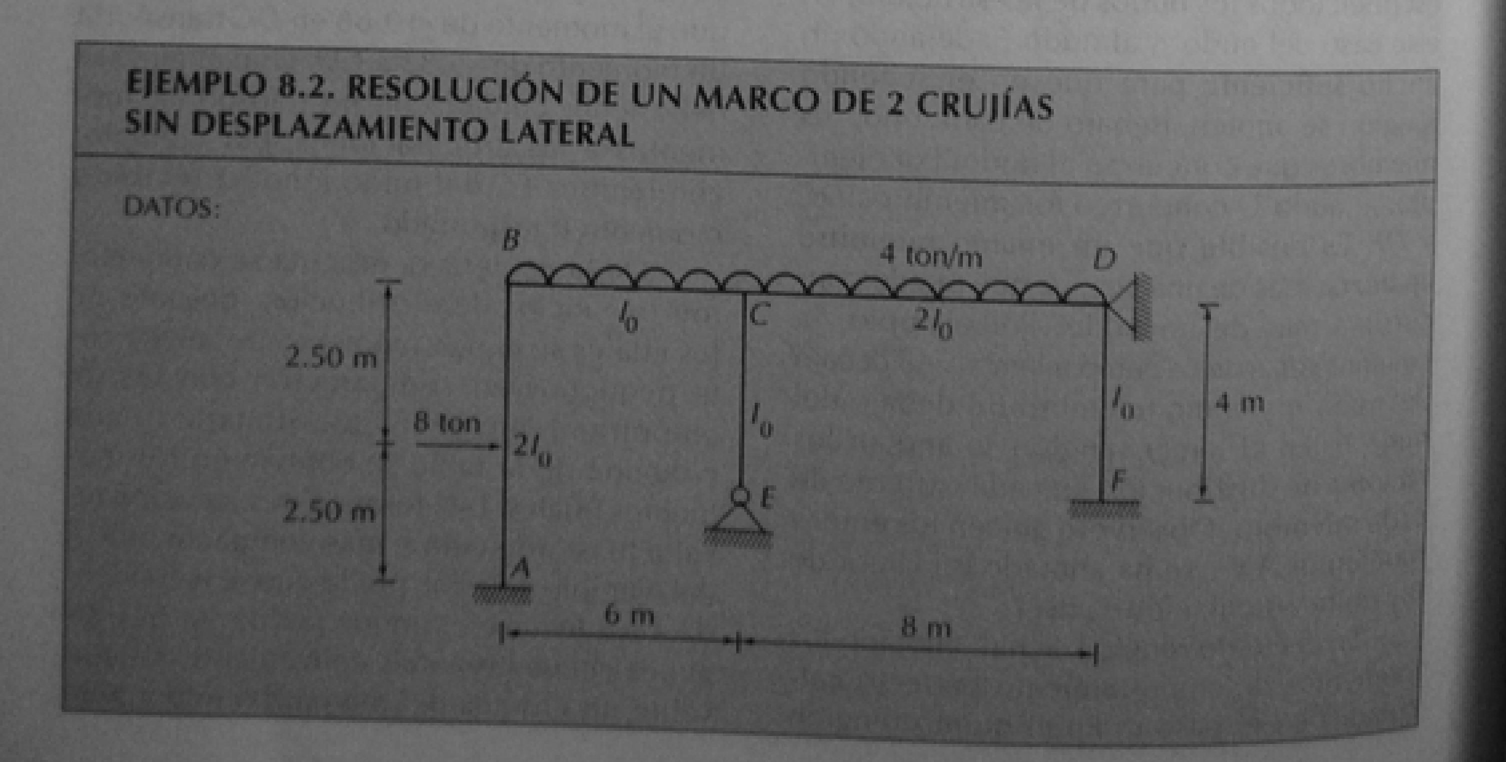
En el cuarto renglón se han anotado los momentos de empotramiento perfecto calculados en el paso *c*. En el quinto renglón se ha efectuado la primera distribución de los momentos de equilibrio que hay que introducir en cada nudo. Por ejemplo, en el nudo *B* se presenta un momento de desequilibrio de (+5.00 – 12.00 = –7.00). Para equilibrarlo se introduce un momento de +7.00 que se distribuye entre los miembros *BA* y *BC* de acuerdo con sus factores de distribución. Este formato de ejecución tiene la ventaja de permitir la fácil identificación de los momentos de desequilibrio, ya que todos los miembros de un mismo nudo están agrupados en las columnas correspondientes al nudo en cuestión.

El primer ciclo de transporte se ha efectuado en el sexto renglón. Aunque puede ser conveniente tener a la vista un croquis del marco para identificar los extremos de los miembros entre los que hay que transportar momentos, esto no es estrictamente necesario. Basta con detectar cada miembro con distinto orden de colocación de sus extremos, por ejemplo, el miembro *CD* en el nudo *C* y el miembro *DC* en el nudo *D*, que son en realidad un solo miembro, y transportar los momentos entre ambos extremos; por ejemplo, el momento de +3.86 en *CD* transporta un momento de +1.93 a *DC*, mientras que el momento de -10.66 en *DC* transporta un momento de –5.33 a *CD*. Únicamente se debe tener cuidado de no transportar momentos a las articulaciones; por ejemplo, el miembro *EC* del nudo *E* no ha recibido momento transportado.

De la manera ya descrita se completaron tres ciclos de distribución, después de los cuales se tenían momentos relativamente pequeños en comparación con los de empotramiento perfecto. Sumando cada columna de la tabla se obtuvieron los momentos finales. Este formato de ejecución resulta más ordenado y más compacto que el del ejemplo anterior, por lo que se recomienda a los lectores, aunque puede ser que algunos encuentren más conveniente trabajar sobre un croquis del marco. Lo importante

es tener claros los conceptos fundamentales de equilibrar los nudos en cada ciclo y transportar los momentos entre los extremos de cada miembro.

En el paso *e* se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El análisis de cada miembro se ha hecho de la misma manera que en los ejemplos anteriores. Los momentos positivos se obtuvieron en el centro del claro de cada miembro, que en el caso de la columna *AB* coincide con el punto de aplicación de la carga concentrada y con el de momento máximo. Un punto importante es la determinación de la reacción horizontal en el nudo *D*; recuérdese que se había señalado al principio de este ejemplo que el marco no se desplazaba lateralmente porque lo impedía el apoyo de este nudo. Para calcular la reacción que se desarrolla en *D*, se partió de la determinación de las reacciones horizontales en las tres columnas del marco. Teniendo estas reacciones horizontales en los apoyos *A*, *E* y *F*, se planteó una ecuación de equilibrio de todas las fuerzas horizontales externas, en la cual debe incluirse a la carga de 8 ton que actúa en la columna *AB*. De esta ecuación se calculó que en el punto *D* debe desarrollarse una reacción horizontal de 1.77 ton de derecha a izquierda. O sea, que para evitar el desplazamiento lateral del marco, es necesario que se desarrolle una reacción de esta magnitud en el apoyo *D*. También puede calcularse el valor de la reacción horizontal en *D*, sumando las reacciones horizontales en los extremos superiores de las columnas *AB*, *EC* y *DF*. Así, en el nudo *B* hay una reacción horizontal de derecha a izquierda de 5.13 ton, como puede verse en el croquis correspondiente; esta fuerza produce una reacción de sentido contrario, de izquierda a derecha, sobre la viga *BC*. Haciendo el mismo análisis en los extremos *C* y *D* de las otras dos columnas se obtiene una fuerza de (5.13 + 1.11 − 4.47 = 1.77 ton) que actúa de izquierda a derecha. Como reacción a esta fuerza, se desarrolla otra fuerza de la misma magnitud, pero de derecha a izquierda, en el apoyo *D*. Obsérvese que el efecto de la carga de 8 ton en la columna *AB* ya se tomó en cuenta al calcular la reacción horizontal en el extremo *B* de esta columna.



**EJEMPLO 8.2 (continuación)**

Paso *a*) Cálculo de las rigideces angulares simplificadas

$$K_{AB}=\frac{2\,I_o}{5}=0.400\,I_o$$

$$K_{BC}=\frac{I_o}{6}=0.167\,I_o$$

$$K'_{CE}=\frac{3}{4}K_{CE}=\frac{3\times I_o}{4\times 4}=0.187\,I_o$$

$$K_{CD}=\frac{2\,I_o}{8}=0.250\,I_o$$

$$K_{DF}=\frac{I_o}{4}=0.250\,I_o$$

Paso *b*) Cálculo de los factores de distribución.

$$FD_{BA}=\frac{K_{AB}}{K_{AB}+K_{BC}}=\frac{0.400}{0.400+0.167}=0.705$$

$$FD_{BC}=\frac{K_{BC}}{K_{AB}+K_{BC}}=\frac{0.167}{0.400+0.167}=0.295$$

$$FD_{CB}=\frac{K_{BC}}{K_{BC}+K_{CD}+K'_{CE}}=\frac{0.167}{0.167+0.250+0.187}=0.276$$

$$FD_{CD}=\frac{K_{CD}}{K_{BC}+K_{CD}+K'_{CE}}=\frac{0.250}{0.167+0.250+0.187}=0.414$$

$$FD_{CE}=\frac{K'_{CE}}{K_{BC}+K_{CD}+K'_{CE}}=\frac{0.187}{0.167+0.250+0.187}=0.310$$

$$FD_{DC}=\frac{K_{CD}}{K_{CD}+K_{DF}}=\frac{0.250}{0.250+0.250}=0.500$$

$$FD_{DF}=\frac{K_{DF}}{K_{CD}+K_{DF}}=\frac{0.250}{0.250+0.250}=0.500$$

**EJEMPLO 8.2 (continuación)**

Paso *c*) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto.

$$\overline{M}_{AB} = -\frac{P\ell}{8} = -\frac{8\times 5}{8} = -5.0 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BA} = +\frac{P\ell}{8} = \frac{8\times 5}{8} = +5.0 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{4\times 6^2}{12} = -12.0 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CB} = +\frac{w\ell^2}{12} = \frac{4\times 6^2}{12} = +12.0 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{w\ell^2}{12} = \frac{4\times 8^2}{12} = -21.33 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC} = +\frac{w\ell^2}{12} = \frac{4\times 8^2}{12} = +21.33 \text{ ton-m}$$

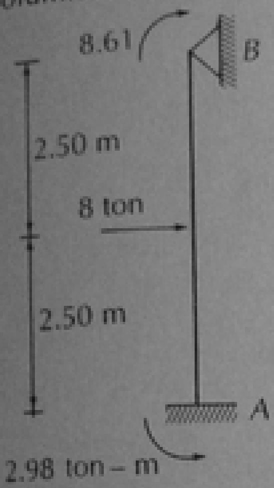
Paso *d*) Ejecución del método.

| Nudo | A | B | | C | | | D | | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CD | CE | DC | DF | EC | FD |
| FD | 0 | 0.705 | 0.295 | 0.276 | 0.414 | 0.310 | 0.500 | 0.500 | 1 | 0 |
| $\overline{M}$ | – 5.00 | +5.00 | –12.00 | +12.00 | –21.33 | 0 | +21.33 | 0 | 0 | 0 |
| 1a. Distr. | 0 | +4.94 | +2.06 | +2.58 | +3.86 | +2.89 | –10.66 | – 10.67 | 0 | 0 |
| 1er Transp. | +2.47 | 0 | +1.29 | +1.03 | – 5.33 | 0 | +1.93 | 0 | 0 | – 5.33 |
| 2a. Distr. | 0 | –0.91 | –0.38 | +1.19 | +1.78 | +1.33 | –0.97 | –0.96 | 0 | 0 |
| 2o. Transp. | – 0.45 | 0 | +0.60 | – 0.19 | – 0.48 | 0 | +0.89 | 0 | 0 | – 0.48 |
| 3a. Distr. | 0 | – 0.42 | – 0.18 | +0.18 | +0.28 | +0.21 | – 0.44 | – 0.45 | 0 | 0 |
| Momentos Finales | – 2.98 | +8.61 | – 8.61 | +16.79 | – 21.22 | +4.43 | +12.08 | – 12.08 | 0 | – 5.81 |

**EJEMPLO 8.2 *(continuación)***

Paso e) Obtención de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Columna *AB*.

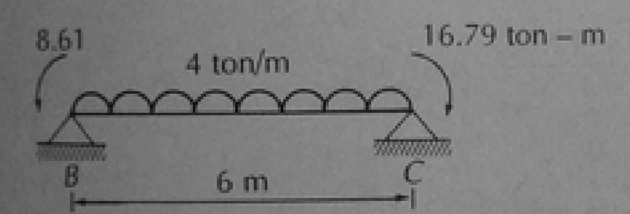



$$H_A = 4 - \frac{8.61 - 2.98}{5} = 2.87 \text{ ton}$$

$$H_B = 4 + \frac{8.61 - 2.98}{5} = 5.13 \text{ ton}$$

$$M(+) = -2.98 + 2.87 \times 2.50 = 4.19 \text{ ton-m}$$

Viga *BC*

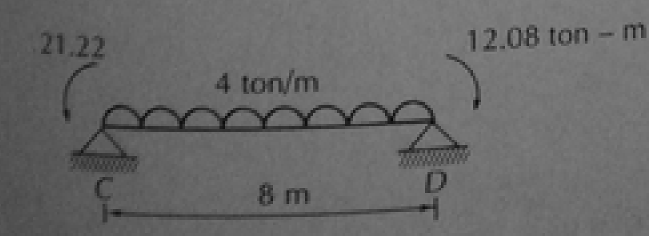



$$V_B = 4X3 - \frac{16.79 - 8.61}{6} = 10.64 \text{ ton}$$

$$V_{C1} = 4X3 + \frac{16.79 - 8.61}{6} = 13.36 \text{ ton}$$

$$M(+) = \frac{4 \times 6^2}{8} - \frac{16.79 + 8.61}{2} = 5.30 \text{ ton-m}$$

Viga *CD*



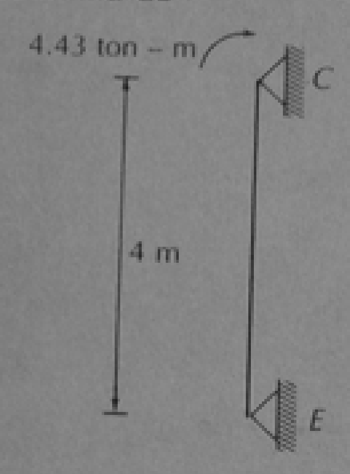

$$V_{C2} = 4X4 + \frac{21.22 - 12.08}{8} = 17.14 \text{ ton}$$

$$V_{C2} = 4X4 - \frac{21.22 - 12.08}{8} = 14.86 \text{ ton}$$

$$M(+) = \frac{4 \times 8^2}{8} - \frac{21.22 + 12.08}{2} = 15.34 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 8.2 *(continuación)***

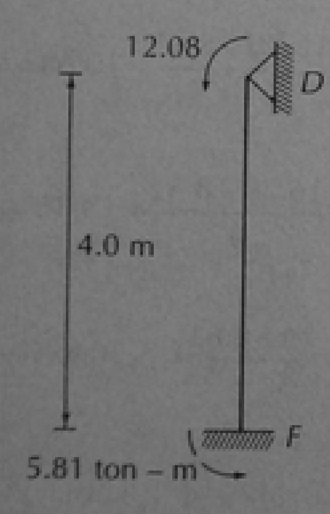
Columna *CE*




$$H_E = -\frac{4.43}{4} = -1.11\text{ton}$$

$$H_C = +\frac{4.43}{4} = +1.11\text{ton}$$

Columna *DF*




$$H_F = \frac{5.81+12.08}{4} = 4.47 \text{ ton}$$

$$H_D = -\frac{5.81+12.08}{4} = -4.47 \text{ ton}$$

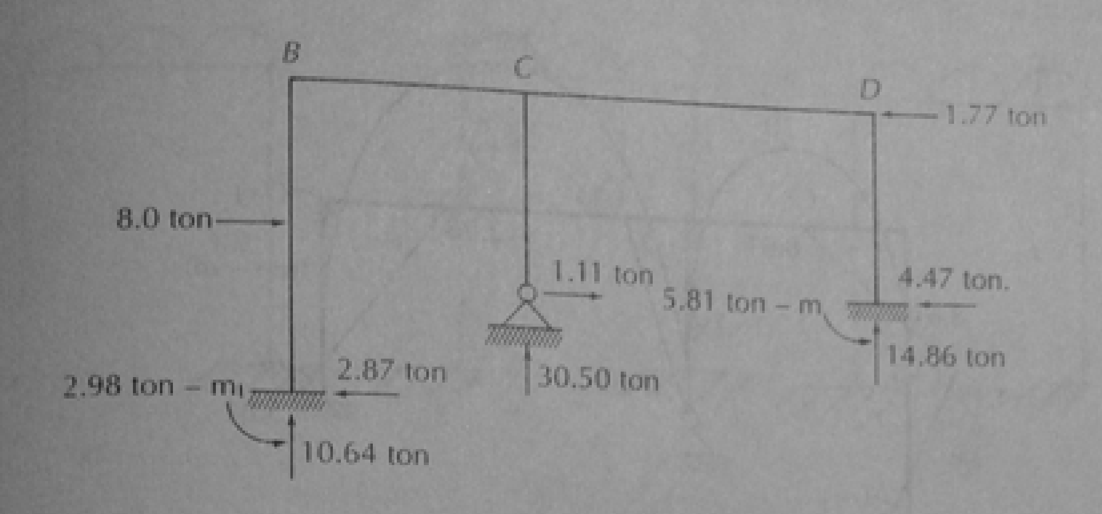
Cálculo de la reacción horizontal en $D, F_D$ :

$$\text{De } \Sigma F_x = 0; H_A + H_E + H_F + H_D = 0$$

$$+8.0 - 2.87 + 1.11 - 4.47 + F_D = 0$$

$$F_D = -1.77 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 8.2 *(continuación)***




Reacciones

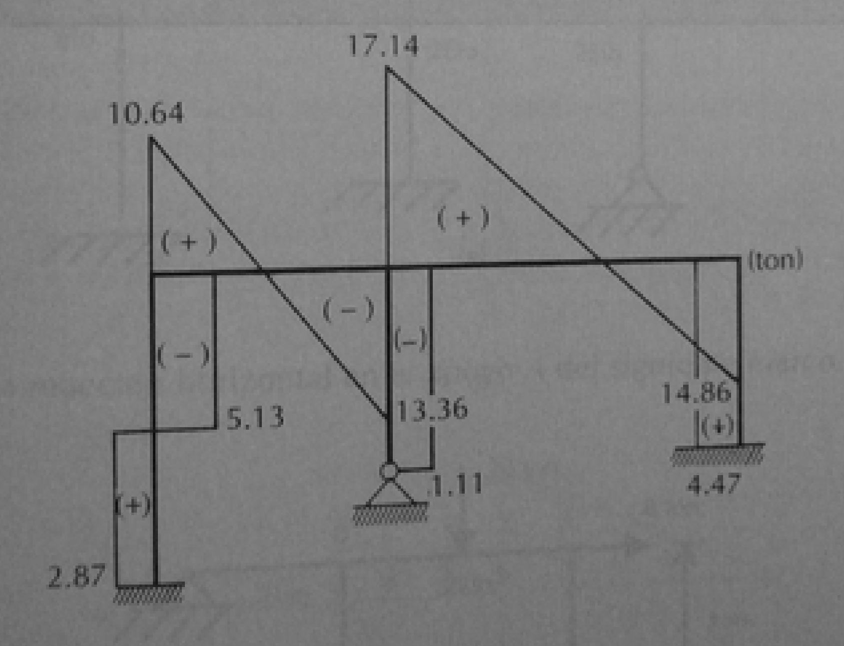



Diagrama de fuerza cortante.

**EJEMPLO 8.2 *(continuación)***

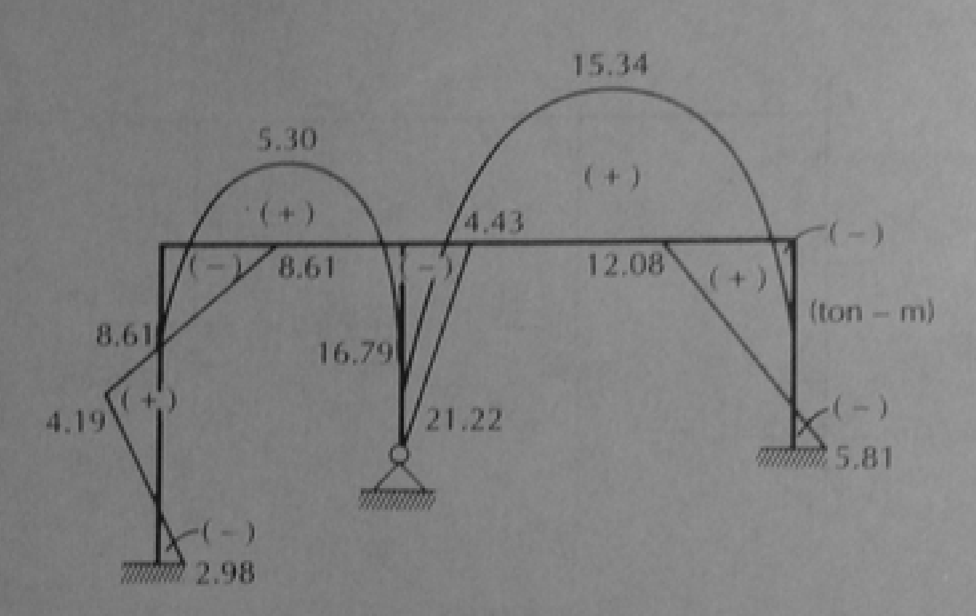



Diagrama de momento flexionante.

## PROBLEMAS

8.1 Indicar cuáles de los siguientes marcos tienen posibilidad de desplazamiento lateral.

2Elo, Elo, Elo

(a)

Elo, 2Elo, Elo

(b)

5 ton, 10 ton, Elo, Elo, Elo

(c)

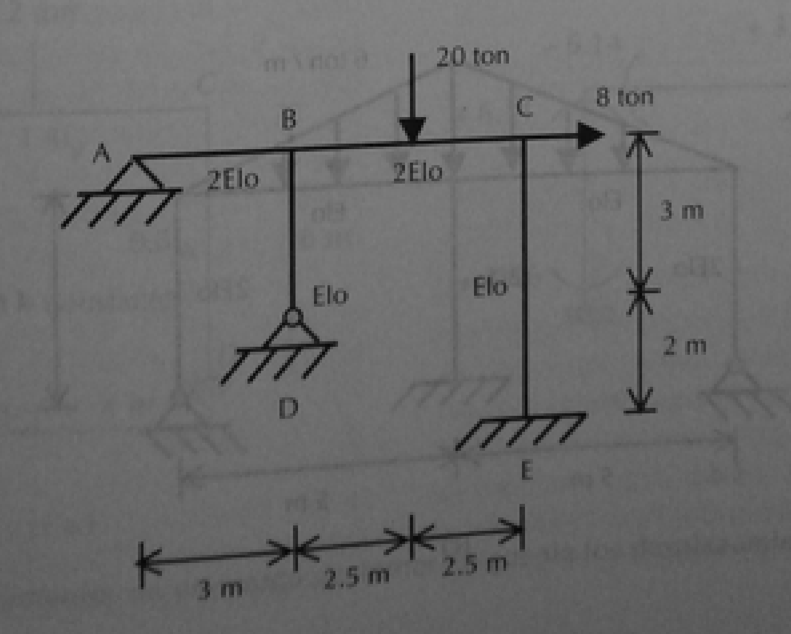
Elo, Elo, Elo

(d)

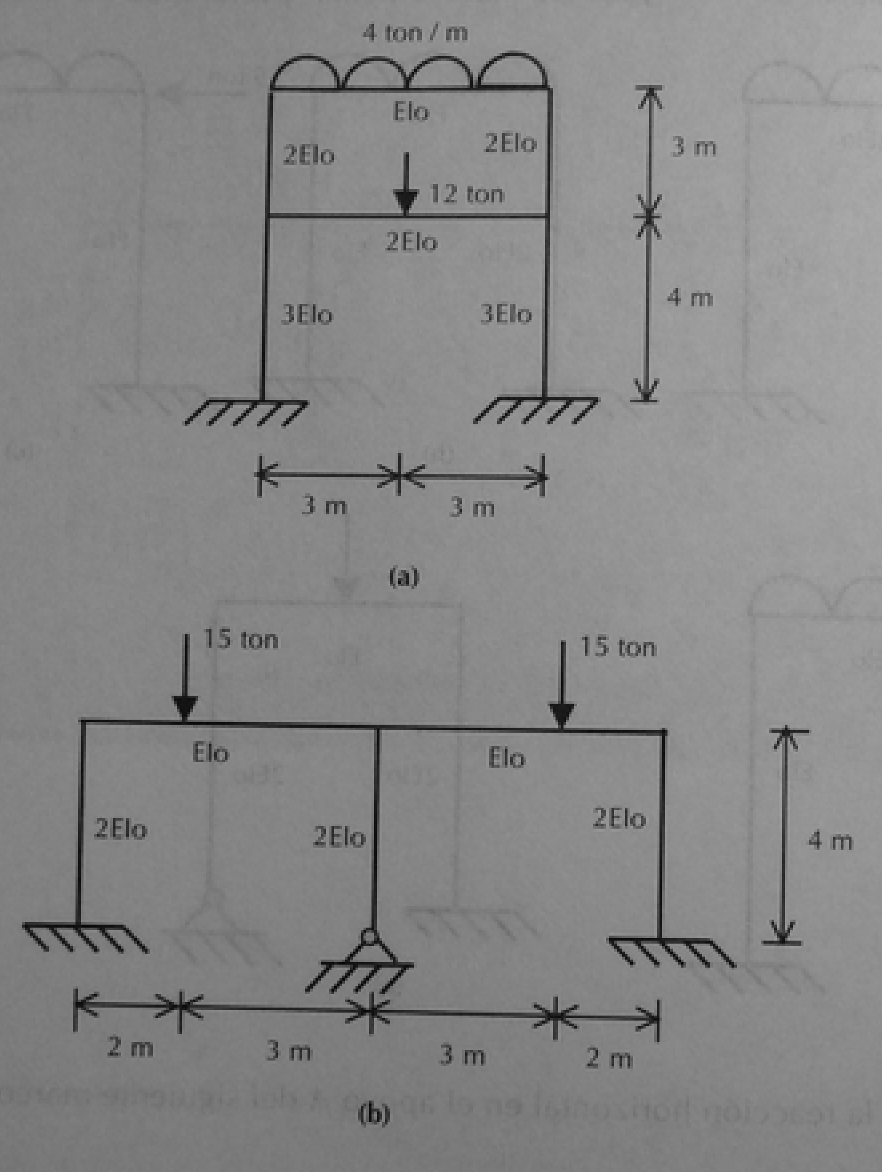
Elo, 2Elo, 2Elo

(e)

8.2 Calcular la reacción horizontal en el apoyo *A* del siguiente marco.

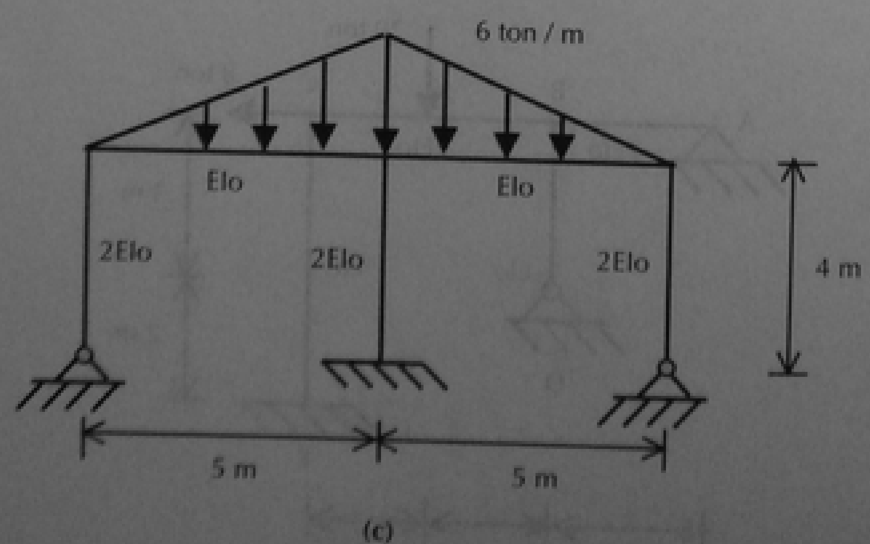


8.3 Analizar los siguientes marcos por el método de Cross, trazando los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.




(a)

(b)




(c)

# CAPÍTULO 9

# Método de Cross para marcos con desplazamiento lateral

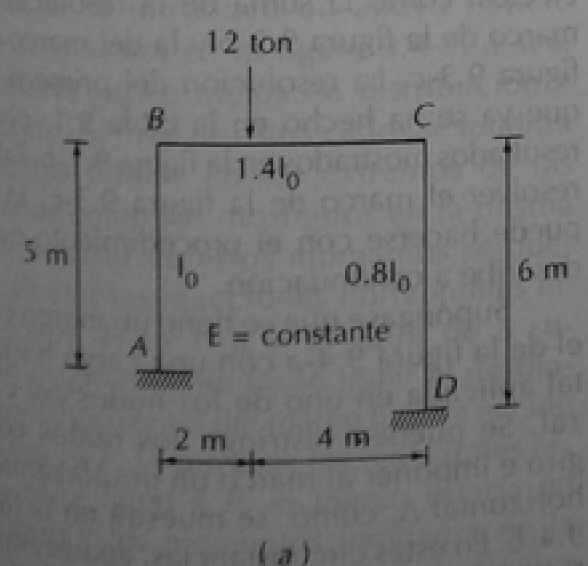


## 9.1 Introducción

En los ejemplos de vigas y de marcos sin desplazamiento lateral resueltos en los dos capítulos anteriores, bastaba con verificar que todos los nudos estuviesen en equilibrio para garantizar que la estructura en su conjunto también lo estuviese. En marcos con posibilidad de tener desplazamientos laterales se presenta un factor adicional que debe considerarse: el equilibrio de todas las fuerzas horizontales que actúan sobre el marco, incluyendo las reacciones horizontales en los apoyos. El problema que se presenta en este tipo de estructuras se ilustra a continuación. Se estudiarán primero marcos de un sólo nivel y después marcos de varios niveles en los cuales el problema es más complejo.

## 9.2 Marcos de un nivel

Considérese el marco mostrado en la figura 9.1-*a*. Es un marco asimétrico tanto en carga como en geometría. Por consiguiente, los nudos *B* y *C* pueden desplazarse horizontalmente al aplicar la carga indicada de 12 ton. Para comprobar esta posibilidad, se ha resuelto el marco en la Tabla 9.1 por el método presentado en el capítulo anterior, es decir, suponiendo que no hay desplazamientos horizontales (el cálculo de rigideces, factores de distribución y momentos de empotramiento perfecto no se muestra en la tabla, pero el lector puede realizarlos por separado). Los momentos de barra sobre apoyo obtenidos en el cálculo se muestran en la figura 9.1-*b*. Ahora bien, si a partir de



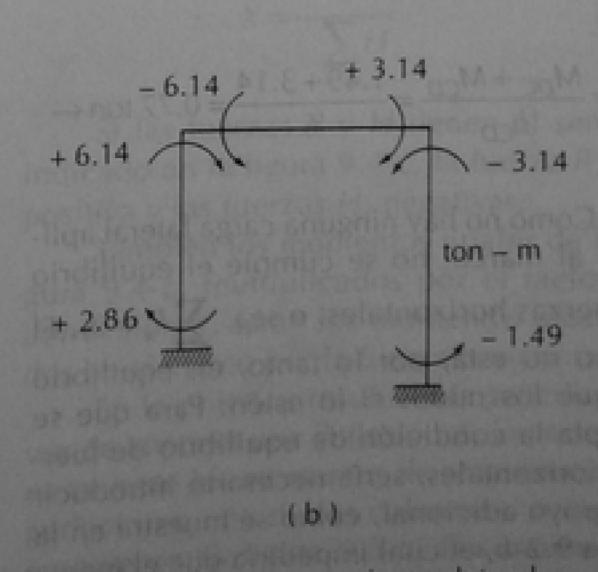




**Figura 9.1.** Momentos en un marco sin tomar en cuenta los desplazamientos laterales

**Tabla 9.1.** Resolución del marco de la figura. 9.1(a)

| Nudo | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| FD | 0 | 0.462 | 0.538 | 0.637 | 0.363 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | − 10.67 | +5.33 | 0 | 0 |
| 1ª Distr. | 0 | +4.93 | +5.74 | − 3.40 | − 1.93 | 0 |
| 1er Trans | +2.47 | 0 | − 1.70 | +2.87 | 0 | − 0.97 |
| 2ª Distr. | 0 | +0.79 | +0.91 | − 1.83 | − 1.04 | 0 |
| 2º Trans. | +0.39 | 0 | − 0.91 | + 0.46 | 0 | − 0.52 |
| 3ª Distr. | 0 | +0.42 | +0.49 | − 0.29 | − 0.17 | 0 |
| Mom. Finales | +2.86 | +6.14 | − 6.14 | +3.14 | − 3.14 | − 1.49 |

los momentos en las columnas se calculan las reacciones horizontales en los apoyos *A* y *D*, se obtienen los valores mostrados en la figura 9.2-*a*. Así, en la columna *AB*:

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{h_{AB}} = \frac{2.86 + 6.14}{5} = 1.80 \text{ ton} \rightarrow$$

y en la columna *DC*:

$$H_D = \frac{M_{DC} + M_{CD}}{h_{CD}} = \frac{1.49 + 3.14}{6} = 0.77 \text{ ton} \leftarrow$$

Como no hay ninguna carga lateral aplicada al marco, no se cumple el equilibrio de fuerzas horizontales, o sea, $\sum F_x \neq 0$. El marco no está, por lo tanto, en equilibrio aunque los nudos sí lo estén. Para que se cumpla la condición de equilibrio de fuerzas horizontales, sería necesario introducir un apoyo adicional, como se muestra en la figura 9.2-*b*, el cual impediría que el marco se desplace horizontalmente hacia la derecha. En este apoyo se desarrollaría una reacción de derecha a izquierda de 1.03 ton, que es la diferencia entre las dos reacciones horizontales en los apoyos *A* y *D*.

La consideración anterior permite plantear un método para resolver marcos con desplazamiento lateral. La idea fundamental se ilustra en la figura 9.3. El marco asimétrico de la figura 9.3-*a* puede resolverse, aplicando el principio de superposición de causas y efectos, como la suma de la resolución del marco de la figura 9.3-*b* y la del marco de la figura 9.3-*c*. La resolución del primero es la que ya se ha hecho en la tabla 9.1, con los resultados mostrados en la figura 9.1-*b*. Faltaría resolver el marco de la figura 9.3-*c*, lo cual puede hacerse con el procedimiento que se describe a continuación.

Supóngase que se tiene un marco como el de la figura 9.4-*a* con una carga horizontal aplicada en uno de los nudos del cabezal. Se pueden restringir los nudos contra giro e imponer al marco un desplazamiento horizontal Δ, como se muestra en la figura 9.4-*b*. En estas circunstancias, aparecerán en los extremos de las columnas momentos de empotramiento perfecto que serán iguales a

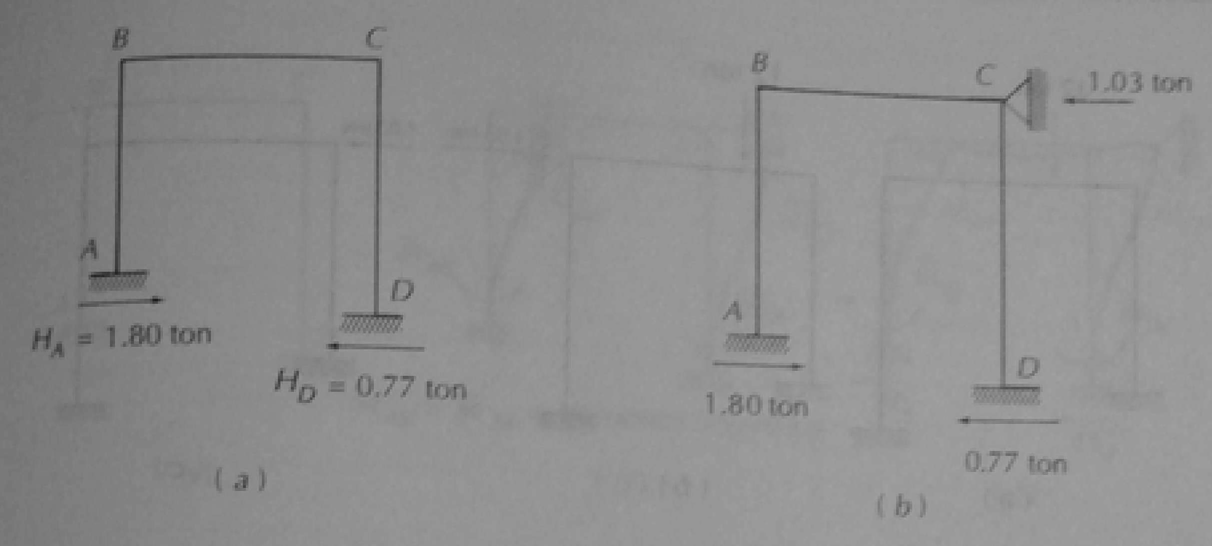



**Figura 9.2** Análisis de las reacciones horizontales en el marco de la figura 9.1

las rigideces lineales de las columnas multiplicadas por el valor de $\Delta$, ya que las columnas estarán en la situación ilustrada en las figuras 7.3 o 7.4, según el caso, pero con un desplazamiento $\Delta$ en vez de un desplazamiento unitario. Nótese que los momentos que aparezcan pueden ser diferentes en cada columna, si varían los valores de $EI$ y de $\ell$. Estos momentos en los extremos de las columnas son momentos de desequilibrio en cada nudo, y pueden equilibrarse ejecutando el método de Cross de la misma manera que se ha visto para marcos sin desplazamiento, si se introduce un apoyo ficticio como se muestra en la figura 9.4-*c*, o sea, ejecutando varios ciclos de distribución y transporte. Al final de estos ciclos se tendrán momentos finales en los extremos de las columnas como los mostrados en la misma figura. A partir de estos momentos se pueden calcular las reacciones horizontales en los apoyos, $H_A$ y $H_D$. Si el valor de $\Delta$ supuesto originalmente fuese igual al desplazamiento horizontal del marco bajo la acción de la fuerza $P$, la suma de las reacciones $H_A$ y $H_D$ sería igual a $P$, el marco estaría en equilibrio y los momentos indicados en la figura 9.4-*c* serían los momentos finales producidos en el marco por la carga $P$. Generalmente no es el caso. Sin embargo, como todos los momentos y las reacciones horizontales obtenidos son función lineal de $\Delta$, se puede calcular el valor correcto de $\Delta$ multiplicando la deformación impuesta por un factor de corrección, $X$, obtenido, a su vez, de la ecuación de equilibrio horizontal:

$$P + X\sum H = 0$$

de donde:

$$X = -\frac{P}{\sum H} \tag{9.3}$$

Si las fuerzas $P$ y $H$ tienen el sentido indicado en la figura 9.4-*c*, la fuerza $P$ será positiva y las fuerzas $H$, negativas.

También los momentos finales de la figura 9.4-*c*, multiplicados por el factor de corrección $X$, serán los momentos producidos en el marco por la fuerza horizontal $P$.

En la práctica resulta más sencillo, en vez de imponer una deflexión $\Delta$, imponer directamente los momentos de empotramiento perfecto en una de las columnas, como se muestra en la figura 9.5-*b*. Los momentos en las otras columnas pueden calcularse a

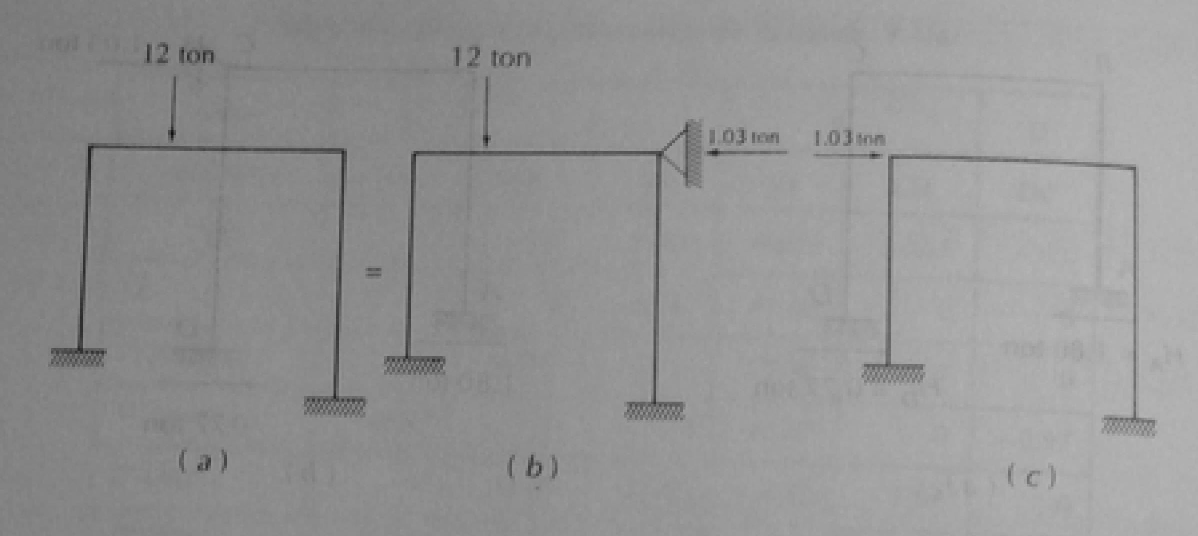



**Figura 9.3.** Resolución del marco de la figura (*a*) por superposición de los marcos de las figuras (*b*) y (*c*)

partir de las siguientes relaciones. Ya que el desplazamiento $\Delta$ es el mismo en todas las columnas, los momentos de empotramiento perfecto serán los siguientes:

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}_{BA} = \frac{6(EI)_{AB}\Delta}{\ell_{AB}^2} \tag{9.4}$$

$$\overline{M}_{DC} = \overline{M}_{CD} = \frac{6(EI)_{DC}\Delta}{\ell_{DC}^2} \tag{9.5}$$

Sacando la relación entre los momentos de las dos columnas se obtiene:

$$\frac{\overline{M}_{AB}}{\overline{M}_{DC}} = \frac{(EI)_{AB}\,\ell_{DC}^2}{(EI)_{DC}\,\ell_{AB}^2} \tag{9.6}$$

Esta expresión indica que la relación entre los momentos de empotramiento perfecto producidos por un desplazamiento lineal es directamente proporcional a los valores

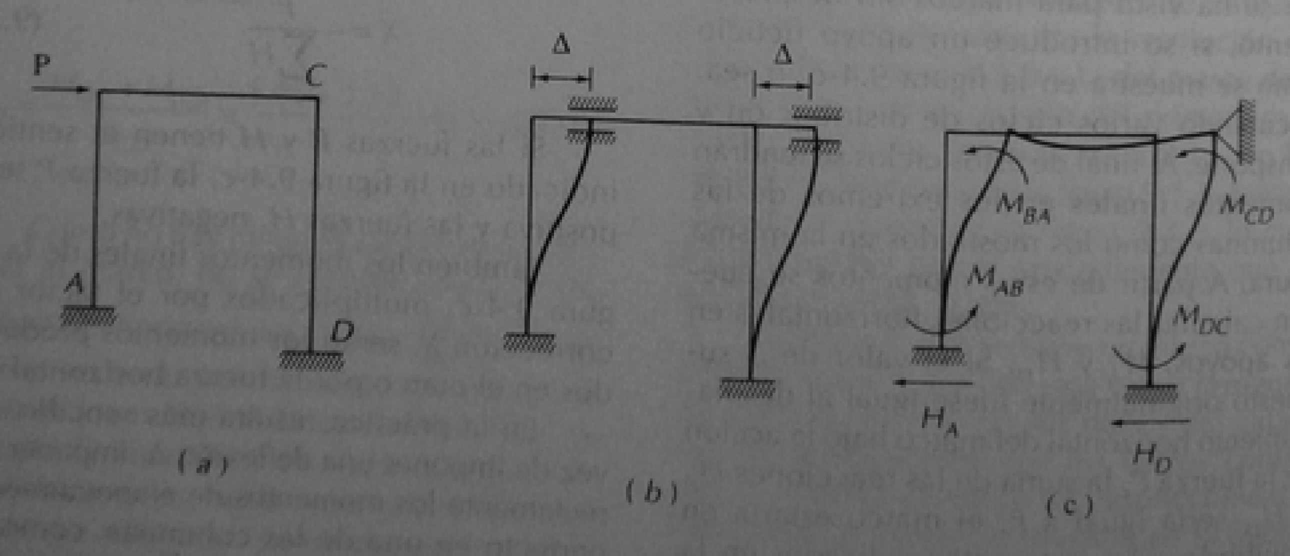



**Figura 9.4.** Procedimiento para resolver un marco con carga horizontal a partir de un desplazamiento impuesto $\Delta$

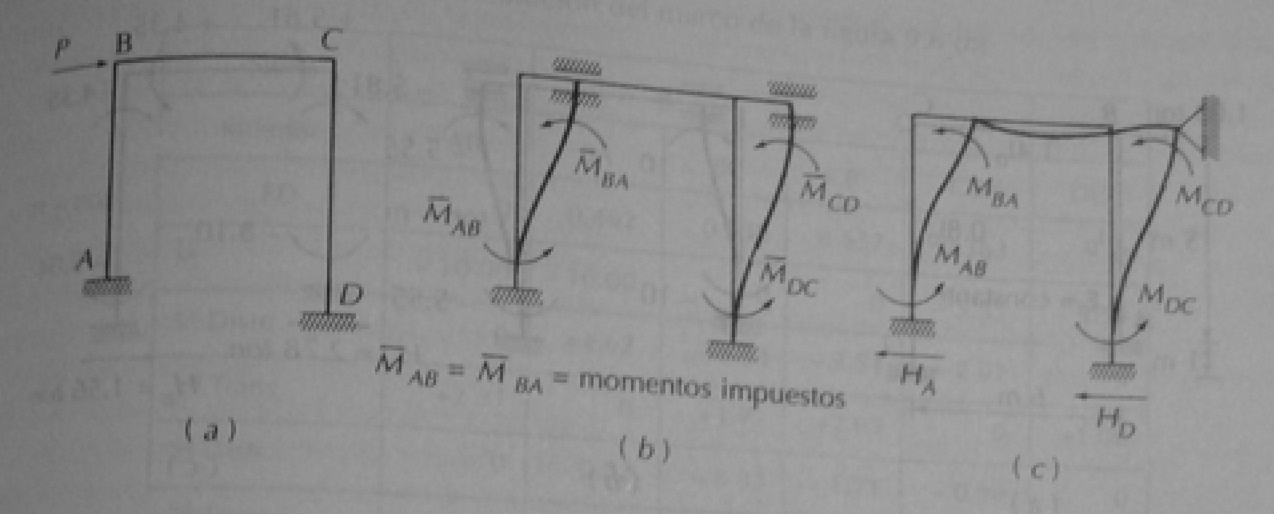



**Figura 9.5.** Procedimiento para resolver un marco con carga horizontal a partir de un momento impuesto

de $EI$ e inversamente proporcional a los cuadrados de las longitudes $\ell$ de las columnas. Si en el marco de la figura 9.5 se imponen los momentos de empotramiento perfecto $\overline{M}_{AB}$ y $\overline{M}_{BA}$, pueden calcularse los momentos correspondientes en la columna $CD$ utilizando la ecuación 9.6. Si el marco tiene varias crujías, se aplica la ecuación 9.6 entre la columna a la cual se impusieron los momentos y cada una de las otras columnas. Si una columna tiene un extremo articulado, se está en el caso de la figura 7.4, y su rigidez lineal es la mitad de la correspondiente a una columna con el extremo empotrado. Esto puede tomarse en cuenta usando la mitad del valor de $EI$ para la columna con extremo articulado.

Después de tener los momentos de empotramiento perfecto en las columnas, se procede de la misma manera explicada en relación a la figura 9.4, es decir, se equilibran los nudos con varios ciclos de distribución y transporte, se calculan las reacciones horizontales $H$, y el factor de corrección $X$ con la ecuación 9.3. Los momentos de la figura 9.5-*c*, multiplicados por el factor $X$ serán los momentos producidos en el marco por la fuerza horizontal $P$.

En las figuras 9.6 y 9.7, y en la tabla 9.2, se ilustra el procedimiento descrito para resolver el marco de la figura 9.3-*c*. En la figura 9.6-*a* se reproduce este marco con sus dimensiones y los momentos de inercia de sus miembros. En la figura 9.6-*b* se impone un momento de -10 ton-m a la columna $AB$, en ambos extremos; estos momentos están producidos por un desplazamiento del marco, cuya magnitud no interesa, como se muestra en la misma figura. Los momentos que aparecen en la columna $DC$ se calculan con la ecuación 9.6, asignándole el valor de 10 ton-m al momento $M_{AB}$ y despejando $M_{DC}$:

$$M_{DC} = M_{CD} = M_{AB}\frac{(EI)_{DC}\,\ell_{AB}^2}{(EI)_{AB}\,\ell_{DC}^2} \tag{9.7}$$

$$M_{DC} = M_{CD} = \frac{-10\times 0.8I_0\times 5^2}{I_0\times 6^2} = -5.55\text{ ton}-\text{m} \tag{9.8}$$

En realidad, no es necesario aplicar formalmente la ecuación 9.6. Basta con recordar que los momentos son proporcionales a

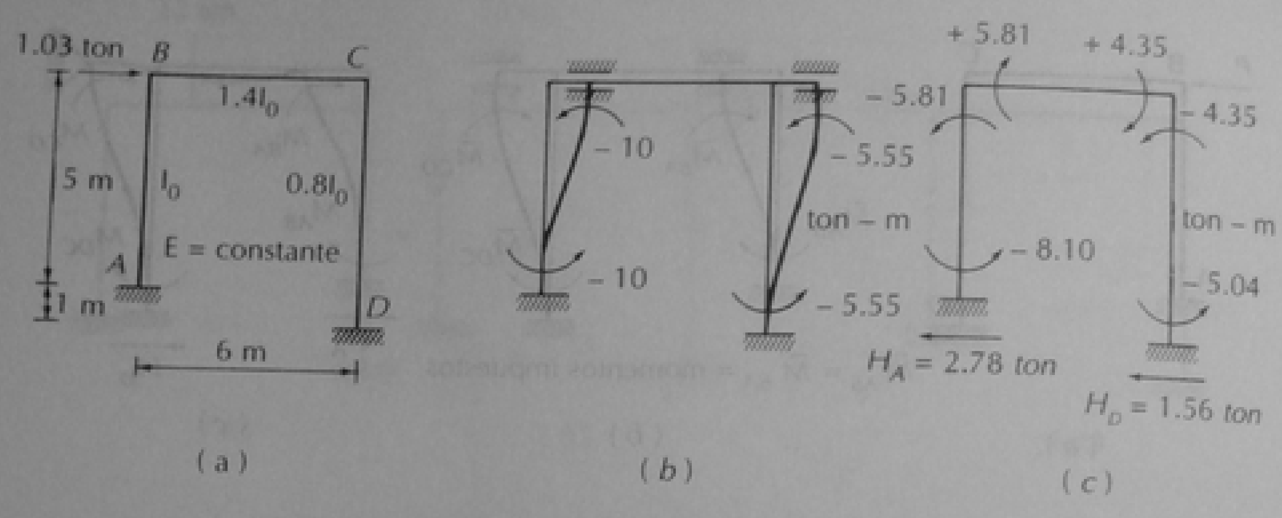



**Figura 9.6.** Corrección de los momentos de la figura (a) con un momento impuesto en la columna AB

los valores de *EI* de las columnas e inversamente proporcionales a los cuadrados de sus longitudes. Estas relaciones son las que están expresadas numéricamente en la ecuación 9.8. Es importante observar que el signo de estos momentos es negativo, ya que al introducir un desplazamiento hacia la derecha, como se muestra en la figura 9.6-*b*, ambas columnas giran en sentido horario (véase la figura 7.7 para esta convención de signos).

Ya teniendo los momentos de empotramiento perfecto en las columnas *AB* y *DC*, se liberan los empotramientos que se habían introducido en sus extremos, efectuando los ciclos necesarios de distribución y transporte. Esto se muestra en la tabla 9.2. Los factores de distribución son los mismos que se habían calculado para la tabla 9.1 y los momentos de empotramiento perfecto son los que se acaban de obtener. Después de tres ciclos, se obtuvieron los momentos

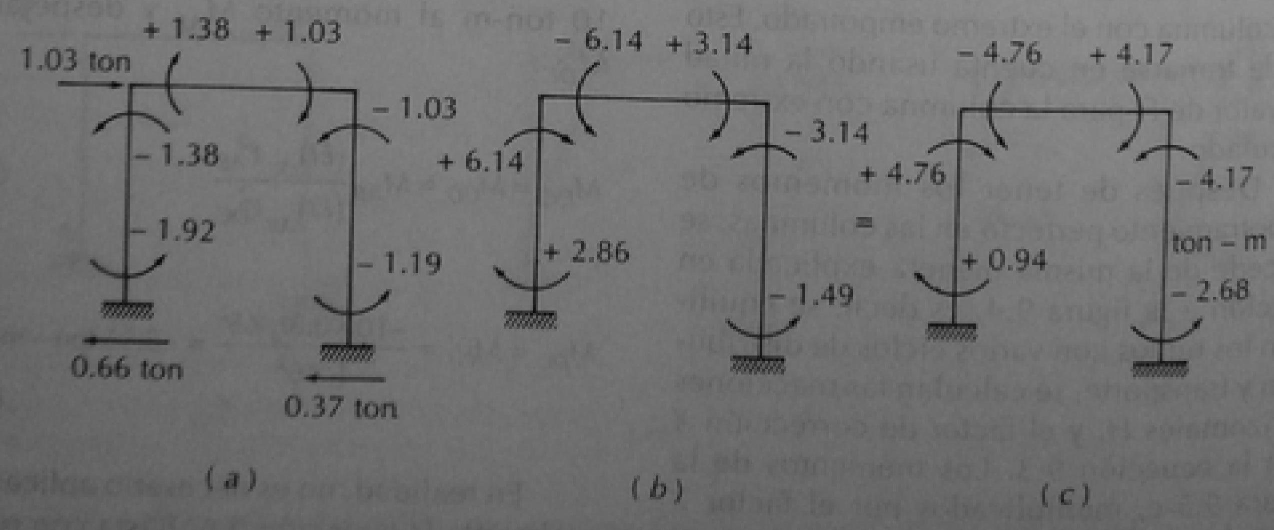



**Figura 9.7.** Corrección de los momentos de la figura 9.6 (c) y obtención de los momentos totales

**Tabla 9.2.** Resolución del marco de la figura 9.6 *(b)*

| Nudo | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| FD | 0 | 0.462 | 0.538 | 0.637 | 0.363 | 0 |
| $\overline{M}$ | − 10.00 | − 10.00 | 0 | 0 | − 5.55 | − 5.55 |
| 1ª Distr. | 0 | +4.62 | +5.38 | − 3.54 | + 2.01 | 0 |
| 1er Trans | +2.31 | 0 | +1.77 | +2.69 | 0 | +1.00 |
| 2ª Distr. | 0 | − 0.82 | − 0.95 | − 1.71 | − 0.98 | 0 |
| 2º Trans. | +0.41 | 0 | − 0.85 | − 0.47 | 0 | − 0.49 |
| 3ª Distr. | 0 | +0.39 | +0.46 | + 0.30 | +0.17 | 0 |
| Mom. Finales | − 8.10 | − 5.81 | +5.81 | +4.35 | − 4.35 | − 5.04 |
| Mom. Correg. | − 1.92 | − 1.38 | + 1.38 | +1.03 | − 1.03 | − 1.19 |
| Mom. Totales | +0.94 | +4.76 | − 4.76 | +4.17 | − 4.17 | − 2.68 |

finales del antepenúltimo renglón de la tabla, mismos que se muestran también en la figura 9.6-c. Ahora bien, si se calculan las reacciones horizontales $H_A$ y $H_D$ a partir de los momentos en las columnas *AB* y *DC*, se obtienen los valores:

$$H_A = \frac{8.10 + 5.81}{5} = 2.78 \text{ ton} \leftarrow$$

$$H_D = \frac{5.04 + 4.35}{6} = 1.56 \text{ ton} \leftarrow$$

Estos valores, que también se muestran en la figura 9.6-*c*, nos indican que el marco no está en equilibrio de fuerzas horizontales, pues si lo estuviese, la suma de estas fuerzas debería ser igual y se signo contrario a la fuerza horizontal de 1.03 ton que se ha aplicado al marco, figura 9.6-*a*. Se debe introducir entonces el factor correctivo de la ecuación 9.3, que en este caso vale:

$$X = -\frac{P}{\sum H} = -\frac{1.03}{-2.78 - 1.56} = 0.237$$

Si todos los momentos obtenidos en el antepenúltimo renglón de la tabla 9.2 se multiplican por este factor, se obtienen los momentos corregidos del penúltimo renglón, los cuales se muestran en la figura 9.7-*a*. Las reacciones horizontales $H_A$ y $H_D$ correspondientes a estos momentos, que también se muestran en esta figura, sí equilibran ahora a la fuerza horizontal aplicada de 1.03 ton. Sumando estos momentos a los calculados en la tabla 9.1, que se reproducen en la figura 9.7-*b*, se obtienen los momentos totales que aparecen en el último renglón de la tabla 9.2 y en la figura 9.7-*c*.

Se puede ver que si se hubiesen impuesto a la columna *AB* momentos distintos a los de 10 ton-m que se impusieron, el factor de corrección *X* hubiese tenido un valor también diferente, pero los momentos corregi-

dos y los momentos totales hubiesen sido los mismos. Inclusive se pudieron haber impuesto momentos de signo contrario, correspondientes a un desplazamiento del marco hacia la izquierda. Al aplicar la ecuación 9.3, o al plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales, el valor de $X$ hubiese resultado negativo.

Obsérvese que el procedimiento seguido desde el planteamiento del marco en la figura 9.6-a, hasta la obtención de los momentos corregidos en el penúltimo renglón de la tabla 9.2, es aplicable también al análisis de marcos sujetos únicamente a cargas horizontales en los nudos. Esto es importante, porque es frecuente que los marcos se analicen para cargas verticales y para cargas horizontales en forma separada. Las primeras representan las cargas vivas y muertas permanentes, y las segundas, las cargas accidentales de viento o sismo. Ya que las cargas vivas y los factores de carga suelen ser diferentes para los dos tipos de acciones, conviene hacer el análisis por separado y luego obtener las envolventes de momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas normales sumando los resultados parciales. Aún más, como las fuerzas horizontales de viento o sismo pueden actuar en los dos sentidos, o sea, tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, si se hace el análisis por separado, basta cambiar el signo de las acciones calculadas para un sentido, para tener los valores correspondientes al sentido opuesto.

**Ejemplo 9.1** Se resuelve un marco de dos crujías y un solo nivel con diferentes alturas, momentos de inercia y condiciones de apoyo de sus columnas. Por ser asimétrico y por tener una fuerza horizontal aplicada en en el nudo *B*, tiene posibilidad de desplazamiento lateral.

Los pasos *a*, *b* y *c* se han llevado a cabo de la misma manera que en ejemplos anteriores. Después, en la primera etapa, se ha resuelto el marco suponiendo que se ha impedido el desplazamiento lateral mediante la introducción de un apoyo lateral en el nudo *D*. Los cálculos correspondientes se han hecho en la tabla A del paso *d*, y en la figura que está inmediatamente antes de la tabla se muestran los momentos finales correspondientes a esta etapa y las reacciones horizontales en las columnas. Estas reacciones se calcularon sumando los momentos en los extremos de cada columna y dividiendo la suma entre la altura de la columna. Por ejemplo, la reacción en el apoyo *A*, de 3.74 ton, es la suma de los momentos de 15.03 y 7.39 ton-m de la columna *AB* dividida entre los 6 m de altura. La suma de las reacciones horizontales es una fuerza de 1.55 ton de izquierda a derecha; por lo tanto, para que el marco esté en equilibrio, es necesario introducir un apoyo en el nudo *D*, el cual proporcionaría una reacción de derecha a izquierda igual a la fuerza de desequilibrio.

En la segunda etapa se resuelve el marco con una fuerza horizontal aplicada en el nudo *B*, de tal magnitud que elimina a la reacción en el nudo *D* que apareció en la primera etapa. El problema se puede resolver de dos maneras. En la primera alternativa, se aplica una fuerza horizontal que es igual a la suma de la fuerza de 10 ton que actúa en el marco original y de una fuerza de 1.55 ton que hay que aplicar para eliminar a la reacción de la primera etapa; ambas fuerzas están aplicadas simultáneamente. En la segunda alternativa, se aplican las mismas fuerzas, pero en forma separada. Es claro que en ambas alternativas el marco queda en equilibrio de fuerzas horizontales. La segunda alternativa permite obtener por separado el efecto de las cargas verticales y de la fuerza horizontal, ya que los momentos de la primera etapa, sumados a los momentos que se obtengan al aplicar la fuerza de 1.55 ton, serán los momentos producidos por cargas verticales, y los momentos que se obtengan al aplicar la fuerza de 10

ton serán los producidos por esta misma fuerza en el marco original. En este ejemplo, con fines de ilustración, se han resuelto las dos alternativas. Se verá que el trabajo numérico se incrementa ligeramente.

Para continuar con la segunda etapa, se imponen a una de las columnas, momentos arbitrarios derivados de un desplazamiento cuya magnitud no interesa conocer, como se explicó anteriormente en esta misma sección. En el ejemplo, se impuso un momento de –10 ton-m a la columna *AB* y se calcularon los momentos en las otras columnas, sobre la base de que son proporcionales al valor de *EI* e inversamente proporcionales a los cuadrados de las longitudes de las columnas, ecuación 9.6. En el caso de la columna *EC*, hay que tomar en cuenta que su rigidez lineal es 1/2 de la rigidez lineal de las otras columnas, porque uno de sus extremos está articulado. De esta manera se obtuvieron los momentos de empotramiento perfecto mostrados en el croquis dibujado arriba de la Tabla B, mismos que aparecen en el cuarto renglón de esta tabla.

Los cálculos correspondientes a la liberación de los nudos se han efectuado en la Tabla B, obteniéndose los momentos finales mostrados en el último renglón. Las reacciones horizontales en los apoyos de las columnas aparecen calculadas a continuación de la tabla. Se observa que la resultante de estas reacciones es una fuerza de 7.30 ton que actúa de derecha a izquierda. Por lo tanto, la fuerza horizontal que produciría los desplazamientos laterales correspondientes a estos momentos finales tendría este mismo valor, pero actuaría de izquierda a derecha. Para calcular los momentos que corresponden a las fuerzas de 11.55, 1.55 ton y 10 ton, es necesario corregir los momentos finales multiplicándolos por los factores de corrección calculados al final del paso *e*). Así, si los momentos finales de la Tabla B corresponden a una fuerza horizontal de 7.30 ton, los momentos que correspondan a una fuerza de 11.55 ton serán iguales a los de la Tabla B multiplicados por 11.55/7.30. De esta manera se han calculado los factores de corrección para la fuerzas de 11.55 ton (alternativa 1), y para 1.55 ton y 10 ton por separado (alternativa 2).

Los momentos totales se han calculado en la Tabla C del paso *f*. En el renglón (1) se reproducen los momentos calculados en la Tabla A, o sea, con el desplazamiento lateral impedido. Los momentos que aparecen en el renglón (2) se han obtenido multiplicando los momentos de la Tabla B, que corresponden a una fuerza horizontal de 7.30 ton, por el factor correctivo $X_1$ , para obtener los momentos que corresponden a una fuerza de 11.55 ton. En el renglón (3) aparece la suma de los momentos de los renglones (1) y (2), que representa los momentos para carga vertical y horizontal simultáneas, ya que son la suma de los momentos con desplazamiento lateral impedido y de los momentos que corresponden a una fuerza horizontal de 11.55 ton; valor este último que equivale a la fuerza aplicada de 10 ton y a la fuerza de 1.55 ton que anula a la reacción en el apoyo *D* que impide el desplazamiento lateral, como se ve en la figura que está al principio de la primera etapa. En el renglón (4) se muestran los momentos que corresponden a una fuerza horizontal de 1.55 ton, ya que son los de la Tabla B multiplicados por el factor correctivo $X_2$. Estos momentos, sumados a los del renglón (1), proporcionan los momentos totales para carga vertical únicamente, renglón (5), ya que son la suma de los momentos con desplazamiento lateral restringido y de los momentos producidos por la fuerza horizontal de 1.55 ton. Por último, en el renglón (6) se presentan los momentos producidos por una fuerza horizontal de 10 ton.

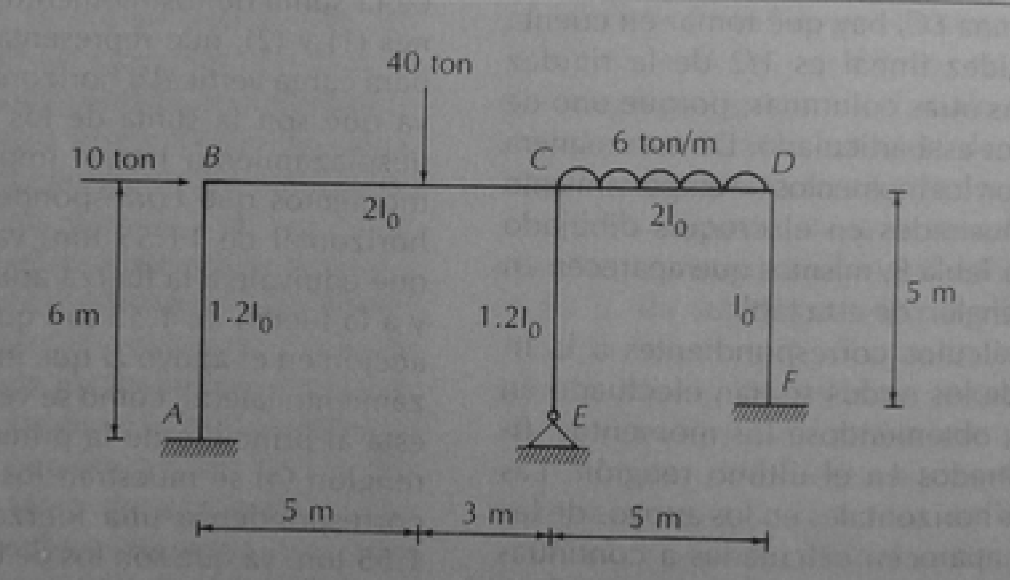
En el paso *g* se calculan y se trazan los diagramas de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante. Sólo se presentan las acciones que corresponden al caso de fuerza horizontal de 10 ton sin cargas

verticales. Por esta razón, al calcular las reacciones en los extremos de los miembros no aparecen cargas transversales entre los extremos. Obsérvese que la fuerza normal en la columna *AB* es la reacción en el extremo *B* del miembro *BC*; esta reacción tiene signo negativo, o sea, que la columna tiende a levantarse, por lo que trabaja a tensión y el diagrama tiene signo positivo. La fuerza normal en la columna *EC* es la suma de las reacciones en el extremo *C* de las vigas *BC* y *CD*. Esta columna también trabaja a tensión. En cambio la columna *FD* trabaja a compresión, con una fuerza igual a la reacción en el extremo *D* de la viga *CD*.

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se han trazado de la manera usual y con la misma convención de signos de considerar a los extremos inferiores de las columnas como equivalentes a los extremos izquierdos de las vigas. Obsérvese que como no hay cargas transversales en ningún miembro para la condición de carga considerada, los diagramas de momento varían linealmente de un extremo al otro en cada miembro.

**EJEMPLO 9.1. ANÁLISIS DE UN MARCO DE DOS CRUJÍAS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL**

DATOS:




**Paso *a*) Cálculo de las rigideces angulares simplificadas.**

$$K_{AB} = \frac{1.2\,I_0}{6} = 0.20\,I_0$$

$$K_{BC} = \frac{2\,I_0}{8} = 0.25\,I_0$$

$$K_{CD} = \frac{2I_0}{5} = 0.40I_0$$

**EJEMPLO 9.1 *(continuación)***

$$K'_{CE} = \frac{3}{4} K_{CE} = \frac{3 \times 1.2\, I_0}{4 \times 5} = 0.18\, I_0$$

$$K_{DF} = \frac{I_0}{5} = 0.20\, I_0$$

Paso *b*) Cálculo de los factores de distribución.

$$FD_{BA} = \frac{0.20}{0.20 + 0.25} = 0.444$$

$$FD_{BC} = \frac{0.25}{0.20 + 0.25} = 0.556$$

$$FD_{CB} = \frac{0.25}{0.25 + 0.40 + 0.18} = 0.301$$

$$FD_{CD} = \frac{0.40}{0.25 + 0.40 + 0.18} = 0.482$$

$$FD_{CE} = \frac{0.18}{0.25 + 0.40 + 0.18} = 0.217$$

$$FD_{DC} = \frac{0.40}{0.40 + 0.20} = 0.667$$

$$FD_{DF} = \frac{0.20}{0.40 + 0.20} = 0.333$$

Paso *c*) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto.

$$\overline{M}_{BC} = -\frac{Pab^2}{\ell^2} = -\frac{40 \times 5 \times 3^2}{8^2} = -28.12 \text{ ton-m}$$

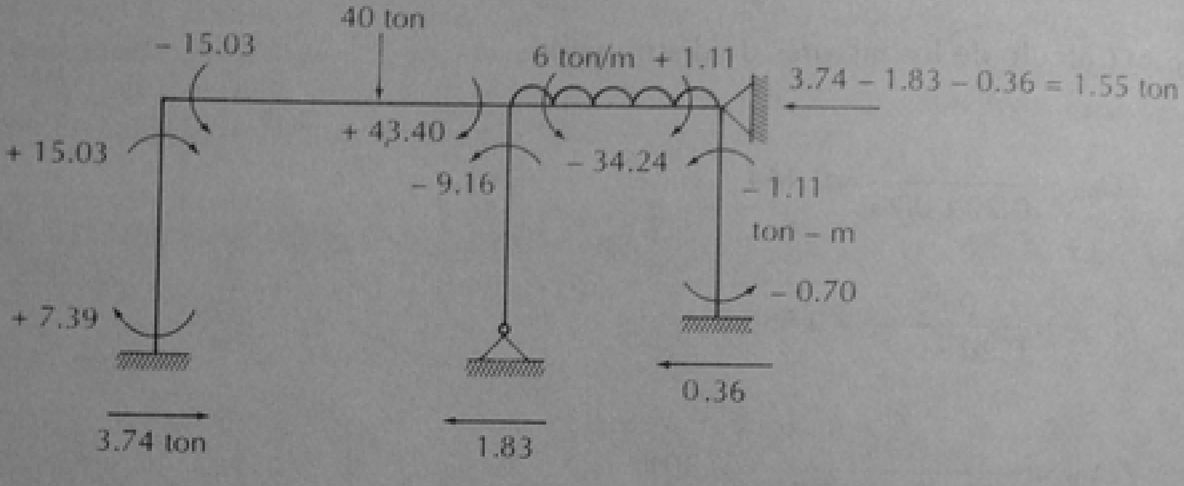
$$\overline{M}_{CB} = +\frac{Pa^2b}{\ell^2} = +\frac{40 \times 5^2 \times 3}{8^2} = +46.87 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 9.1 *(continuación)***

$$\overline{M}_{CD} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{6 \times 5^2}{12} = -12.50 \text{ ton-m}$$

$$\overline{M}_{DC} = +\frac{w\ell^2}{12} = +\frac{6 \times 5^2}{12} = +12.50 \text{ ton-m}$$

PRIMERA ETAPA (SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL).




Notas: Momentos obtenidos en la tabla A del paso *d*).

Reacciones horizontales = $\frac{\Sigma M}{h}$

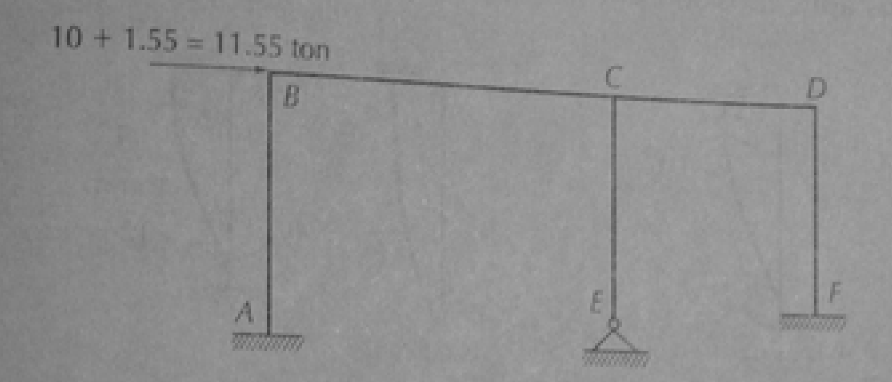
Paso *d*) Ejecución del método.

Tabla A. Momentos con desplazamiento lateral restringido.

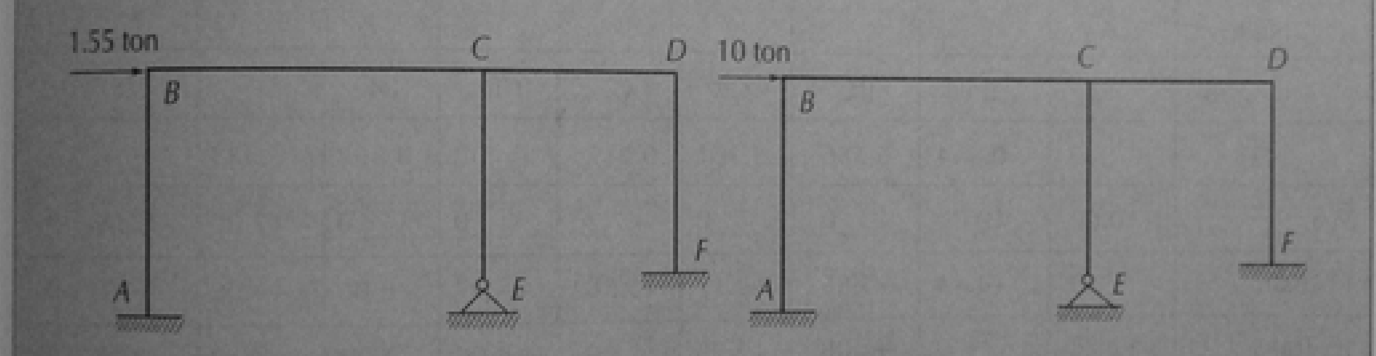
| Nudo | A | B | | C | | | D | | F | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CE | CD | DC | DF | FD | EC |
| FD | 0 | 0.444 | 0.556 | 0.301 | 0.217 | 0.482 | 0.667 | 0.333 | 0 | 1 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | – 28.12 | +46.87 | 0 | – 12.50 | +12.50 | 0 | 0 | 0 |
| 1ª Distr. | 0 | +12.49 | +15.63 | – 10.35 | – 7.46 | – 16.56 | – 8.34 | – 4.16 | 0 | 0 |
| 1er Trans | +6.24 | 0 | – 5.17 | +7.81 | 0 | – 4.17 | – 8.28 | 0 | – 2.08 | 0 |
| 2ª Distr. | 0 | +2.30 | +2.87 | – 1.10 | – 0.79 | – 1.75 | +5.52 | +2.76 | 0 | 0 |
| 2º Trans. | +1.15 | 0 | – 0.55 | +1.43 | 0 | +2.76 | – 0.87 | 0 | +1.38 | 0 |
| 3ª Distr. | 0 | +0.24 | +0.31 | – 1.26 | – 0.91 | – 2.02 | +0.58 | +0.29 | 0 | 0 |
| Mom. Finales | +7.39 | +15.03 | – 15.03 | +43.40 | – 9.16 | – 34.24 | +1.11 | – 1.11 | -0.70 | 0 |

## EJEMPLO 9.1 *(continuación)*

SEGUNDA ETAPA




Alternativa para obtener los momentos por cargas verticales y horizontales simultáneamente.




Alternativas para obtener por separado los momentos por cargas verticales y horizontales.

Paso e) Se impone a la columna *AB* un momento arbitrario (en este caso –10 ton-m) y se calculan los momentos en las otras columnas.

$$M_{EC} = 0$$

$$M_{CE} = \frac{1}{2} \times \frac{(-10) \times 1.2\, I_0 \times 6^2}{1.2\, I_0 \times 5^2} = -7.2 \text{ ton-m}$$

$$M_{FD} = M_{DF} = \frac{(-10)\, I_0 \times 6^2}{1.2\, I_0 \times 5^2} = -12 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 9.1** ***(continuación)***

Los momentos aplicados son por lo tanto:

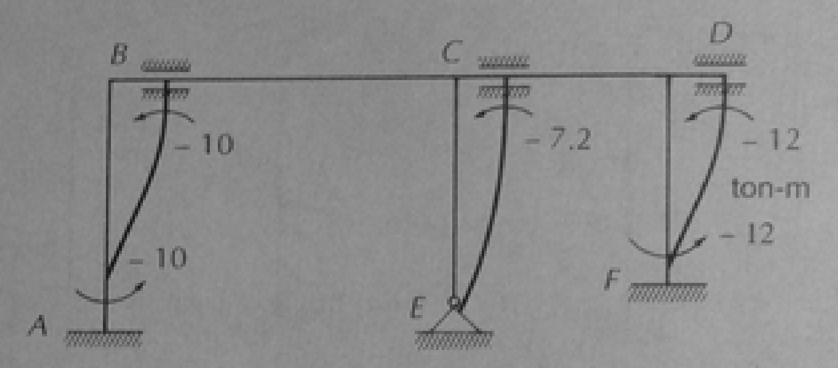



Tabla B. Obtención de los momentos al liberar los nudos.

| Nudo | A | B | | C | | | D | | F | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CE | CD | DC | DF | FD | EC |
| FD | 0 | 0.444 | 0.556 | 0.301 | 0.217 | 0.482 | 0.667 | 0.333 | 0 | 1 |
| $\overline{M}$ | – 10.00 | – 10.00 | 0 | 0 | – 7.2 | 0 | 0 | – 12.00 | – 12.00 | 0 |
| 1ª Distr. | 0 | +4.44 | +5.56 | +2.17 | +1.56 | +3.47 | +8.00 | +4.00 | 0 | 0 |
| 1er Trans | +2.22 | 0 | +1.08 | +2.78 | 0 | +4.00 | +1.73 | 0 | +2.00 | 0 |
| 2ª Distr. | 0 | – 0.48 | – 0.60 | – 2.04 | – 1.47 | – 3.27 | – 1.15 | – 0.58 | 0 | 0 |
| 2º Trans. | – 0.24 | 0 | – 1.02 | –0.30 | 0 | – 0.57 | – 1.63 | 0 | – 0.20 | 0 |
| 3ª Distr. | 0 | +0.45 | +0.57 | +0.26 | +0.19 | +0.42 | +1.09 | +0.54 | 0 | 0 |
| Mom. Finales | – 8.02 | – 5.59 | +5.59 | +2.87 | – 6.92 | +4.05 | +8.04 | – 8.04 | – 10.20 | 0 |

Cálculo de reacciones horizontales.

$$H_A = \frac{8.02 + 5.59}{6} = 2.27$$

$$H_E = \frac{6.92}{5} = 1.38$$

$$H_F = \frac{8.04 + 10.20}{5} = 3.65$$

$$\Sigma H = 7.30$$

**EJEMPLO 9.1 *(continuación)***

Cálculo de factores de corrección.

Para una carga horizontal de 11.55 ton:

$$X_1 = \frac{11.55}{7.30} = 1.582$$

Para una carga horizontal de 1.55 ton:

$$X_2 = \frac{1.55}{7.30} = 0.212$$

Para una carga horizontal de 10 ton:

$$X_3 = \frac{10}{7.30} = 1.370$$

Paso *f*) Cálculo de momentos totales.

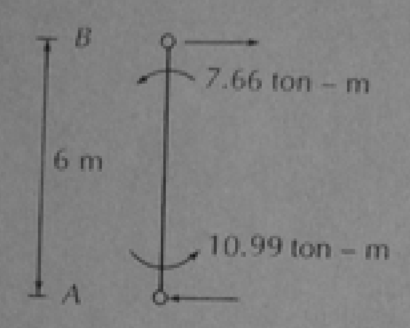
Tabla C. Obtención de momentos corregidos y momentos totales.

| Nudo | A | B | | C | | | D | | F | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miembro | AB | BA | BC | CB | CE | CD | DC | DF | FD | EC |
| (1) | +7.39 | +15.03 | – 15.03 | +43.40 | – 9.16 | – 34.24 | +1.11 | – 1.11 | – 0.70 | 0 |
| (2) | – 12.69 | – 8.84 | +8.84 | +4.54 | – 10.95 | +6.41 | +12.72 | – 12.72 | – 16.14 | 0 |
| (3) | – 5.30 | +6.19 | – 6.19 | +47.94 | – 20.11 | – 27.83 | +13.83 | – 13.83 | – 16.84 | 0 |
| (4) | – 1.70 | – 1.18 | +1.18 | +0.61 | – 1.47 | +0.86 | +1.70 | – 1.70 | – 2.16 | 0 |
| (5) | +5.69 | +13.85 | – 13.85 | +44.01 | – 10.63 | – 33.38 | +2.81 | – 2.81 | – 2.86 | 0 |
| (6) | – 10.99 | – 7.66 | +7.76 | +3.93 | – 9.48 | +5.55 | +11.01 | – 11.01 | – 13.97 | 0 |

(1) Momentos finales sin desplazamiento (Tabla A)
(2) Momentos finales de la Tabla B multiplicados por $X_1$
(3) Momentos totales para cargas verticales y horizontales simultáneas, (1) + (2)
(4) Momentos finales de la Tabla B multiplicados por $X_2$
(5) Momentos totales para cargas verticales únicamente (1) + (4)
(6) Momentos finales de la Tabla B multiplicados por $X_3$ =momentos totales para carga horizontal únicamente.

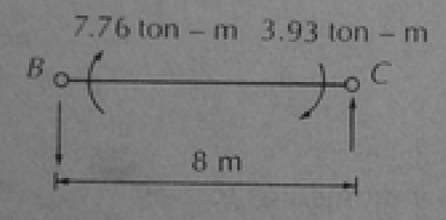
**EJEMPLO 9.1** ***(continuación)***

Paso g) Diagramas de fuerza cortante, momento flexionante y fuerza normal. (Sólo se obtienen para la carga horizontal de 10 ton).



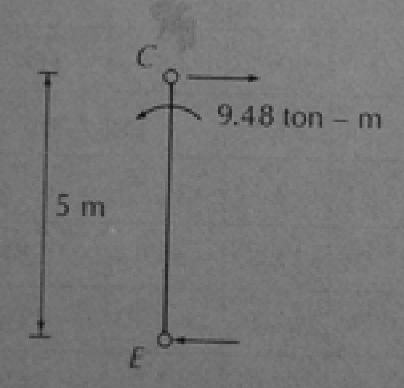

$$H_{AB} = \frac{10.99 + 7.66}{6} = 3.11 \text{ ton}$$

$$H_{BA} = -H_{AB} = -3.11 \text{ ton}$$




$$V_{BC} = -\frac{7.76 + 3.93}{8} = -1.46 \text{ ton}$$

$$V_{CB} = -V_{BC} = +1.46 \text{ ton}$$




$$H_{EC} = \frac{9.48}{5} = 1.90 \text{ ton}$$

$$H_{CE} = -H_{EC} = -1.90 \text{ ton}$$

5.55 ton – m 11.01 ton – m

C D

5 m

$$V_{CD} = -\frac{5.55 + 11.01}{5} = -3.31 \text{ ton}$$

$$V_{DC} = -V_{CD} = +3.31 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 9.1 *(continuación)***

D
11.01 ton − m
13.97 ton − m
F

$$H_{FD} = \frac{11.01+13.97}{5} = 5.00 \text{ ton}$$

$$H_{DF} = -H_{FD} = -5.00 \text{ ton}$$

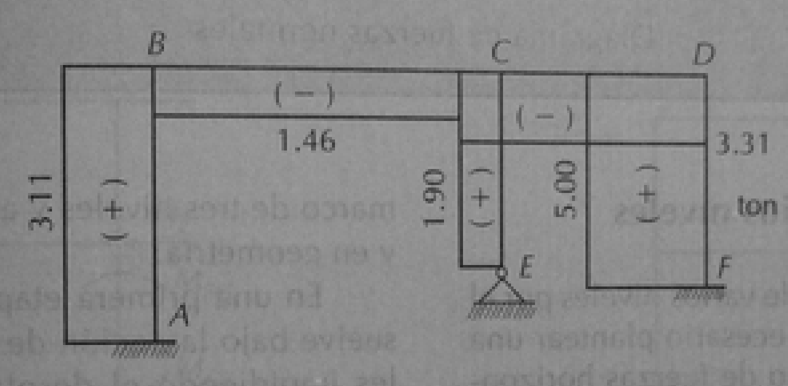



Diagrama de fuerza cortante

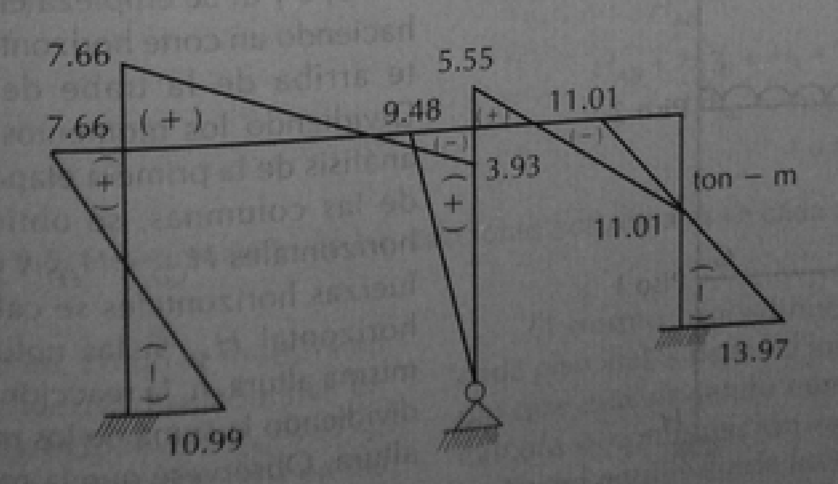



Diagrama de momentos flexionantes.

**EJEMPLO 9.1** ***(continuación)***

Diagrama de fuerzas normales

## 9.3 Marcos de varios niveles

Para resolver marcos de varios niveles por el método de Cross es necesario plantear una ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales en cada piso del marco. El procedimiento se ilustra en referencia al marco mostrado en la figura 9.8. Se trata de un marco de tres niveles y asimétrico en carga y en geometría.

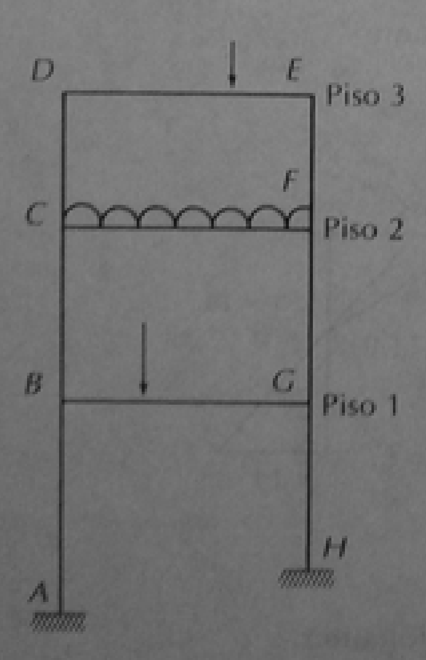
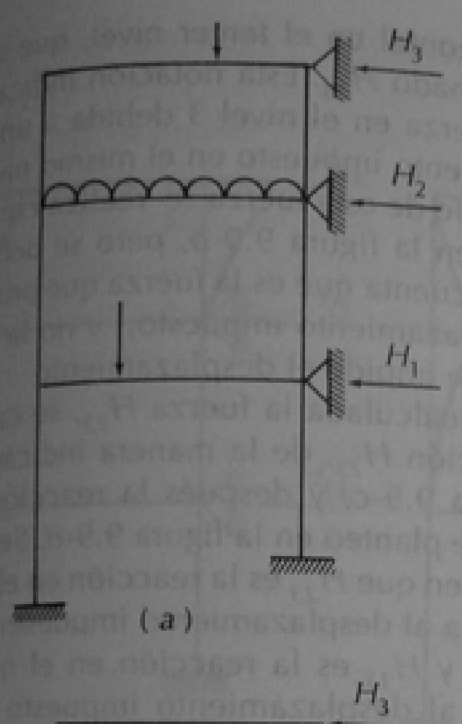
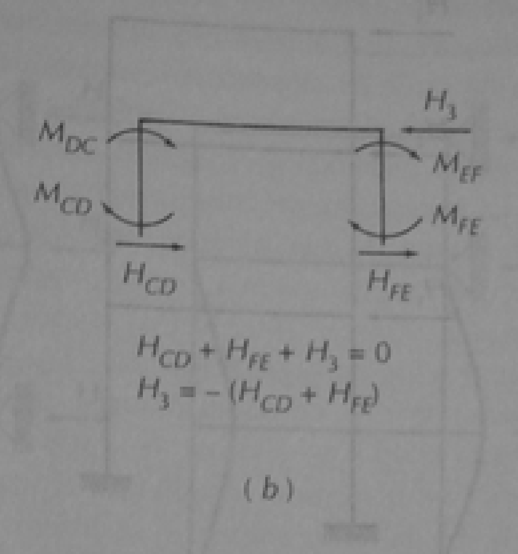


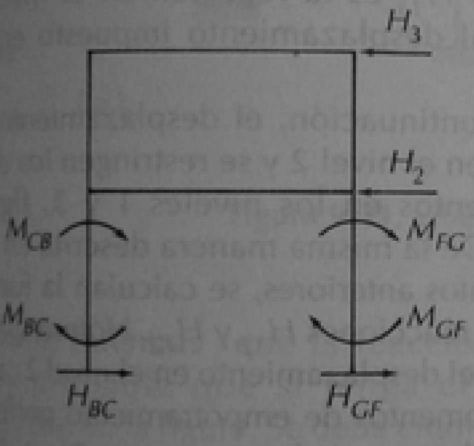

**Figura 9.8.** Marco de varios pisos con posibilidad de desplazamiento lateral

En una primera etapa, el marco se resuelve bajo la acción de las cargas verticales impidiendo el desplazamiento lateral, como se muestra en la figura 9.9-*a*. Esta etapa es semejante a la correspondiente a marcos de un nivel, pero ahora, en cada piso aparece una reacción horizontal. El cálculo de estas reacciones se muestra en las figuras 9.9-*b*, *c* y *d*. Se empieza en el piso superior, haciendo un corte horizontal inmediatamente arriba de la trabe del segundo piso. Dividiendo los momentos obtenidos en el análisis de la primera etapa entre las alturas de las columnas, se obtienen las fuerzas horizontales $H_{CD}$ y $H_{FE}$, y por equilibrio de fuerzas horizontales se calcula la reacción horizontal $H_3$. Si las columnas son de la misma altura, $h$, la reacción puede obtenerse dividiendo la suma de los momentos entre la altura. Obsérvese que la reacción tiene signo contrario a la resultante de las fuerzas horizontales en las columnas.

A continuación se establece el equilibrio de fuerzas horizontales en los dos pisos



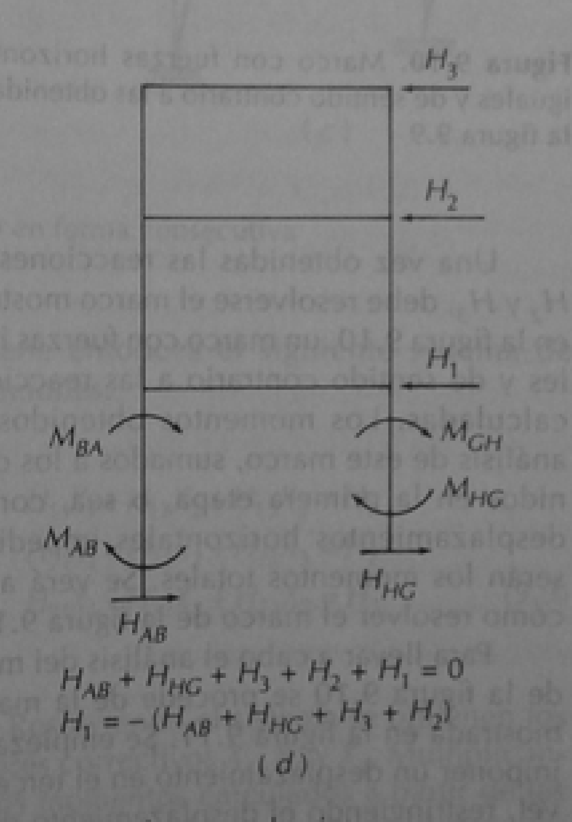




**Figura 9.9.** Determinación de las reacciones horizontales en cada piso

superiores en conjunto, como se muestra en la figura 9.9-*c*. Las fuerzas horizontales en las columnas del segundo nivel, $H_{BC}$ y $H_{GF}$, se calculan a partir de los momentos en las columnas *BC* y *GF*. Después se plantea la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales y, como ya se conoce el valor de $H_3$, puede obtenerse el valor de la reacción $H_2$.

El mismo procedimiento se repite en cada piso, hasta llegar al inferior. En el ejemplo que está sirviendo como ilustración, se calcula a continuación la reacción $H_1$, a partir del equilibrio de fuerzas horizontales en el primer piso y del valor ya calculado de las reacciones $H_2$ y $H_3$, como se muestra en la figura 9.9-*d*.

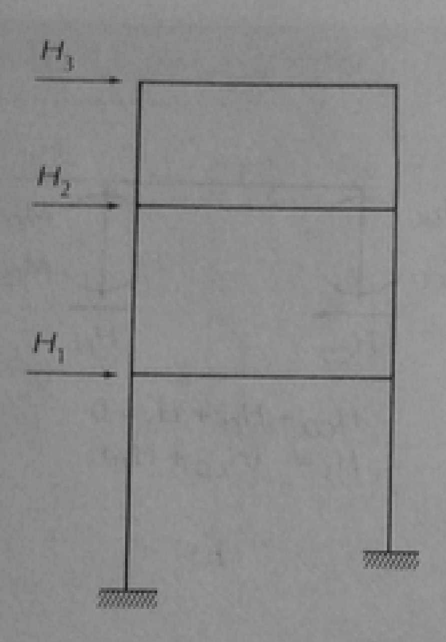



**Figura 9.10.** Marco con fuerzas horizontales iguales y de sentido contrario a las obtenidas en la figura 9.9

Una vez obtenidas las reacciones $H_1$, $H_2$ y $H_3$, debe resolverse el marco mostrado en la figura 9.10, un marco con fuerzas iguales y de sentido contrario a las reacciones calculadas. Los momentos obtenidos del análisis de este marco, sumados a los obtenidos en la primera etapa, o sea, con los desplazamientos horizontales impedidos, serán los momentos totales. Se verá ahora cómo resolver el marco de la figura 9.10.

Para llevar a cabo el análisis del marco de la figura 9.10 se procede de la manera mostrada en la figura 9.11. Se empieza por imponer un desplazamiento en el tercer nivel, restringiendo el desplazamiento de los otros niveles, figura 9.11-*a*. Esto se hace de la misma manera que en marcos de un nivel, es decir, introduciendo momentos de empotramiento perfecto arbitrarios en una de las columnas del nivel, calculando los momentos en las otras columnas de acuerdo a su rigidez lineal y llevando a cabo los ciclos de distribución y transporte de momentos. Una vez terminados los ciclos de distribución y transporte, se calcula la fuerza horizontal en el tercer nivel, que se ha denominado $H_{33}$. Esta notación indica que es la fuerza en el nivel 3 debida a un desplazamiento impuesto en el mismo nivel 3. El cálculo de esta fuerza se realiza como se indicó en la figura 9.9-*b*, pero se debe tomar en cuenta que es la fuerza que produce el desplazamiento impuesto, y no la reacción que impide el desplazamiento.

Ya calculada la fuerza $H_{33}$, se calcula la reacción $H_{23}$, de la manera indicada en la figura 9.9-*c*, y después la reacción $H_{13}$ como se planteó en la figura 9.9-*d*. Se debe reparar en que $H_{23}$ es la reacción en el nivel 2 debida al desplazamiento impuesto en el nivel 3 y $H_{13}$ es la reacción en el nivel 1 debida al desplazamiento impuesto en el nivel 3.

A continuación, el desplazamiento se impone en el nivel 2 y se restringen los desplazamientos en los niveles 1 y 3, figura 9.11-*b*. De la misma manera descrita en los dos párrafos anteriores, se calculan la fuerza $H_{22}$ y las reacciones $H_{32}$ y $H_{12}$. Nótese que al imponer el desplazamiento en el nivel 2, aparecen momentos de empotramiento perfecto en las columnas de los entrepisos 2 y 3. Para llevar a cabo los cálculos de esta etapa, se fija el momento de empotramiento perfecto en cualquiera de las columnas afectadas y se calculan los momentos en las otras columnas de acuerdo con su rigidez lineal.

Como paso siguiente, el desplazamiento se impone en nivel 1 y se calculan la fuerza $H_{11}$ y las reacciones $H_{21}$ y $H_{31}$, figura 9.11-*c*. En marcos de un mayor número de niveles habrá que repetir el procedimiento tantas veces como número de pisos tenga el marco.

En la figura 9.11 se han dibujado todas las fuerzas $H_{ij}$ de derecha a izquierda, pero al hacer los cálculos reales no resultan todas del mismo signo. Así, la fuerza $H_{33}$ en la figura 9.11-*a* seguramente tendría un sentido de izquierda a derecha, ya que es la que produce un desplazamiento en este mismo

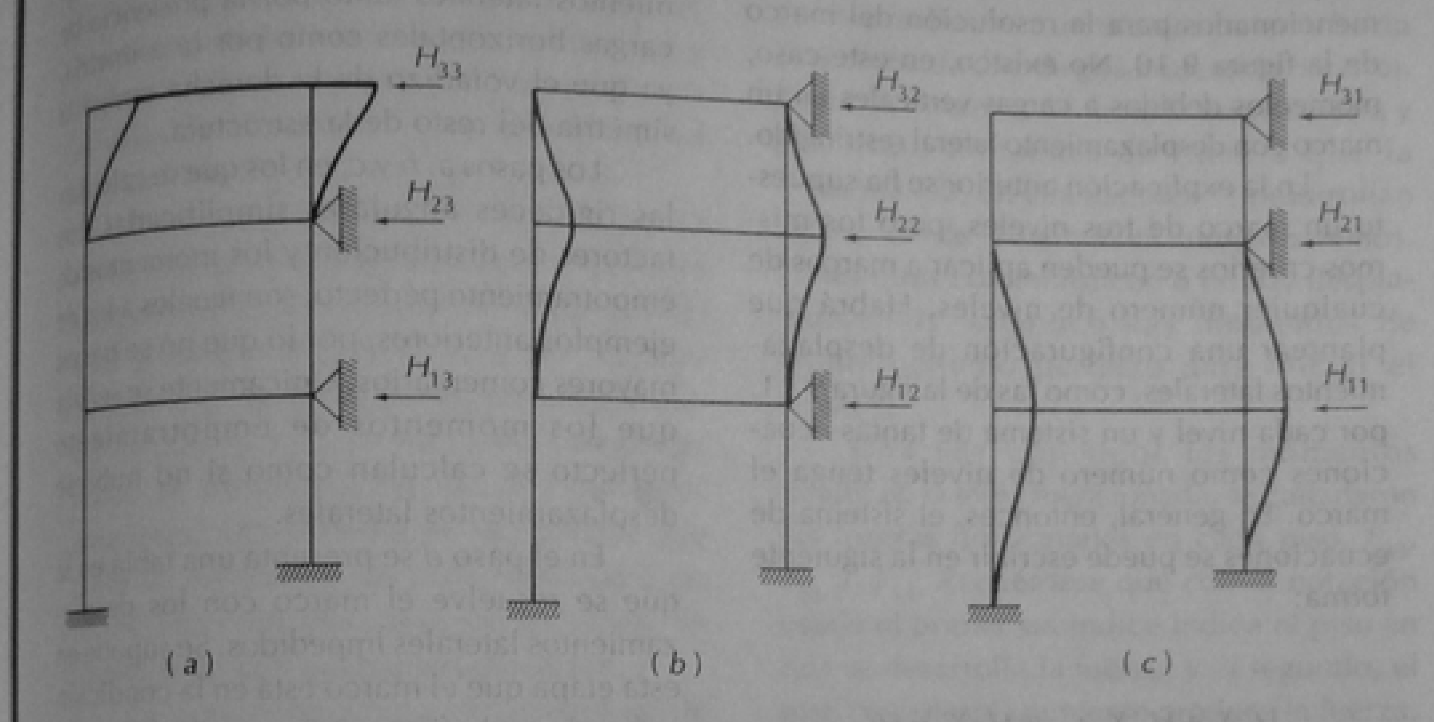



**Figura 9.11.** Liberación de cada piso en forma consecutiva

sentido, mientras que la reacción $H_{23}$ es muy probable que sí tenga el sentido mostrado en la figura. Se debe entonces establecer una convención de signos consistente, por ejemplo, que todas las fuerzas de izquierda a derecha sean positivas y las de derecha a izquierda, negativas.

Una vez realizados los cálculos indicados esquemáticamente en la figura 9.11, se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales, como se hizo para marcos de un nivel, pero ahora se debe plantear una ecuación para cada nivel. Estas ecuaciones representan que las fuerzas horizontales del marco de la figura 9.10 y las de los marcos de la figura 9.11 deben ser iguales. Pero las de los marcos de la figura 9.11 deben estar multiplicadas por factores $X_3$, $X_2$ y $X_1$, ya que los desplazamientos o los momentos de empotramiento perfecto impuestos en las figuras 9.11-*a*, *b* y *c*, respectivamente, fueron arbitrarios. Planteando estas ecuaciones de equilibrio se obtiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
H_{11}X_1 + H_{12}X_2 + H_{13}X_3 &= H_1 \\
H_{21}X_1 + H_{22}X_2 + H_{23}X_3 &= H_2 \\
H_{31}X_1 + H_{32}X_2 + H_{33}X_3 &= H_3
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

Resolviendo el sistema se obtienen los factores correctivos $X_1$, $X_2$ y $X_3$. Multiplicando los momentos calculados a partir de las configuraciones de las figuras 9.11-*c*, *b* y *a*, respectivamente, por estos factores, y sumando los resultados correspondientes, se tiene la resolución del marco de la figura 9.10. Los momentos calculados de esta manera deben sumarse a los obtenidos en la resolución del marco de la figura 9.9-*a*, o sea, a los correspondientes al marco sin desplazamiento lateral, para tener los momentos totales.

Cuando se trate de resolver un marco sujeto únicamente a cargas laterales, es cla-

ro que sólo deben realizarse los cálculos mencionados para la resolución del marco de la figura 9.10. No existen, en este caso, momentos debidos a cargas verticales en un marco con desplazamiento lateral restringido.

En la explicación anterior se ha supuesto un marco de tres niveles, pero los mismos criterios se pueden aplicar a marcos de cualquier número de niveles. Habrá que plantear una configuración de desplazamientos laterales, como las de la figura 9.11, por cada nivel y un sistema de tantas ecuaciones como número de niveles tenga el marco. En general, entonces, el sistema de ecuaciones se puede escribir en la siguiente forma:

$$H_{11}X_1 + H_{12}X_2 + \ldots + H_{1n}X_n = H_1$$
$$H_{21}X_1 + H_{22}X_2 + \ldots + H_{2n}X_n = H_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{n1}X_1 + H_{n2}X_2 + \ldots + H_{nn}X_n = H_n$$

(9.10)

La solución del sistema de ecuaciones, usando la notación matricial, es:

$$\{X\}=[H]^{-1}\{h\} \qquad (9.11)$$

donde $\{X\}$ es una matriz columna formada por los factores correctivos $X_1, X_2,\ldots X_n$; $[H]^{-1}$ es la matriz inversa de la matriz cuadrada formada por las fuerzas $H_{11}, H_{12},\ldots H_{1n}, H_{21}, H_{22},\ldots H_{2n},\ldots, H_{n1}, H_{n2},\ldots H_{nn}$; y $\{h\}$ es una matriz columna formada por las fuerzas horizontales $H_1, H_2,\ldots, H_n$.

**Ejemplo 9.2** Se resuelve un marco de una crujía y tres niveles sujeto a cargas verticales y horizontales. El marco tiene desplazamientos laterales tanto por la presencia de cargas horizontales como por la asimetría, ya que el voladizo de la derecha rompe la simetría del resto de la estructura.

Los pasos *a*, *b* y *c*, en los que se calculan las rigideces angulares simplificadas, los factores de distribución y los momentos de empotramiento perfecto, son iguales a los de ejemplos anteriores, por lo que no se hacen mayores comentarios. Únicamente se señala que los momentos de empotramiento perfecto se calculan como si no hubiese desplazamientos laterales.

En el paso *d* se presenta una tabla en la que se resuelve el marco con los desplazamientos laterales impedidos. Se supone en esta etapa que el marco está en la condición indicada en la figura 9.9-*a*, es decir, que se han introducido apoyos a nivel de cada piso que evitan los desplazamientos laterales del marco. Después de obtener los momentos del último renglón de la tabla, se calculan las reacciones que tendrían que desarrollarse en estos apoyos. Como se explicó en relación a las figuras 9.9-*b*,- *c* y -*d*, hay que empezar por el nivel superior calculando la fuerza $F_3$; la fuerza horizontal en cada columna se obtiene dividiendo la suma de los momentos en los extremos de la columna entre su altura. Así, la fuerza $F_{CD}$ de 1. 9611 es igual a la suma de los momentos $M_{CD}$ y $M_{DC}$ del último renglón de la tabla (2.5971 y 3.2863) entre la altura de 3m. La reacción $F_3$ es igual y de sentido opuesto a la suma de las fuerzas en las columnas, para que el cuerpo libre esté en equilibrio.

Después se analizan los dos niveles superiores como cuerpo libre para determinar la fuerza $F_2$. Para ello, se calculan primero las fuerzas horizontales en las columnas cortadas al trazar el cuerpo libre; por ejemplo, $F_{BC}$ es igual a la suma de $M_{BC}$

y de $M_{CB}$, obtenidos en el último renglón de la tabla, entre la altura de 3m. A partir de los valores de las fuerzas en las columnas y de la reacción ya calculada $F_3$, se determina el valor de la fuerza $F_2$ por equilibrio del cuerpo libre ($F_2 + F_3 + F_{BC} + F_{GF} = 0$).

De manera similar se calcula la fuerza $F_1$. En este caso el diagrama de cuerpo libre comprende los tres niveles de la estructura, y al plantear el equilibrio de fuerzas horizontales se debe tomar en cuenta que las fuerzas $F_2$ y $F_3$ ya han sido calculadas como se describió en los dos párrafos anteriores. Obviamente es importante que tanto las fuerzas en las columnas como las reacciones en los apoyos ficticios se introduzcan con sus signos correctos.

La siguiente etapa del proceso de análisis consiste en resolver un marco con fuerzas laterales iguales y de sentido opuesto a las reacciones $F$ determinadas anteriormente, tal como se explicó en relación a la figura 9.3. Pero como en este ejemplo existen cargas laterales adicionales a las verticales, las fuerzas laterales totales deben ser iguales a la suma de las reacciones con signo cambiado y las fuerzas laterales reales. Por ejemplo, la fuerza $H_3$ en el croquis que está antes del paso *e*, es igual a la fuerza lateral real de 8 ton que aparece en los datos del ejemplo más una fuerza de 2.1907 ton, esta última igual y de sentido opuesto a la reacción $F_3$. De igual manera se calcularon $H_2$ y $H_1$.

En el paso *e* se inicia la resolución del marco mencionado en el párrafo anterior. En la tabla de este paso se analiza un marco al que se ha impuesto un desplazamiento en el piso 3, manteniendo restringidos los desplazamientos en los otros pisos, como en la figura 9.11-*a*. Para esto se supusieron momentos de -10 ton-m en la columna *CD*, correspondientes a un desplazamiento hacia la derecha (la cuerda gira en sentido horario). Como la columna *EF* tiene la misma altura y el mismo momento de inercia que la columna *CD*, en ella también se desarrollan momentos de -10 ton-m en ambos extremos. En las otras columnas, como no hay desplazamientos, tampoco hay momentos de empotramiento perfecto para iniciar el análisis.

Una vez obtenidos los momentos finales en la tabla mencionada, se calcularon las fuerzas horizontales en cada piso, $F_{33}$, $F_{23}$ y $F_{13}$. Recuérdese que con la notación usada el primer subíndice indica el piso en que se desarrolla la fuerza, y el segundo, el piso cuyo desplazamiento produce la fuerza. Igual que para el cálculo de las fuerzas $F$ explicado en el paso *d*, es necesario empezar con el diagrama de cuerpo libre del entrepiso superior, y calcular $F_{33}$. Después trazar el diagrama de cuerpo libre de los dos niveles superiores y calcular $F_{23}$; y así sucesivamente.

A continuación, en el paso *f*, se impone un desplazamiento hacia la derecha en el nivel 2 manteniendo restringido el de los niveles 1 y 3. Este esquema corresponde al de la figura 9.11-*b*. En este caso se supuso un momento de + 10 ton-m en la columna *CD* (la cuerda gira en sentido antihorario) y se calcularon los momentos en las otras columnas. Como la columna *EF* tiene la misma longitud y el mismo momento de inercia, también desarrolla momentos de + 10 ton-m en sus extremos. En las columnas *BC* y *FG*, los momentos se obtuvieron con la ecuación 9.6, que indica que los momentos en los extremos son proporcionales a los momentos de inercia e

inversamente proporcionales a los cuadrados de las longitudes. Así,

$$\frac{M_{BC}}{M_{CD}} = \frac{3I_0(3)^2}{2I_0(2)^2}$$

$$M_{BC} = 10\frac{3}{2} = 15$$

Como la cuerda $BC$ gira en sentido horario, contrario a la cuerda $CD$, este momento de 15 ton-m es negativo, como se ve en la tabla del paso $f$.

El desarrollo de la tabla y el cálculo de las fuerzas en los pisos, $F_{32}$, $F_{22}$ y $F_{12}$ son similares a los del paso anterior, por lo que no ameritan más comentarios.

En el paso siguiente se impone el desplazamiento lateral al piso 1, como en el esquema de la figura 9.11-*c*. A la columna $BC$ se le asignó un momento de 10 ton-m, positivo porque la cuerda gira en sentido antihorario, y se calculó con la ecuación 9.6 el momento resultante en las columnas $AB$ y $GH$:

$$\frac{M_{AB}}{M_{BC}} = \frac{4I_0(3)^2}{3I_0(4)^2}$$

$$M_{AB} = \frac{10X3}{4} = 7.5$$

Las columnas $AB$ y $GH$ giran en sentido horario, por lo que sus momentos son negativos. A partir de estos momentos se desarrolló la tabla de cálculo del paso $g$ y se calcularon las fuerzas $F_{31}$, $F_{21}$ y $F_{11}$ como ya se ha explicado para los pasos anteriores.

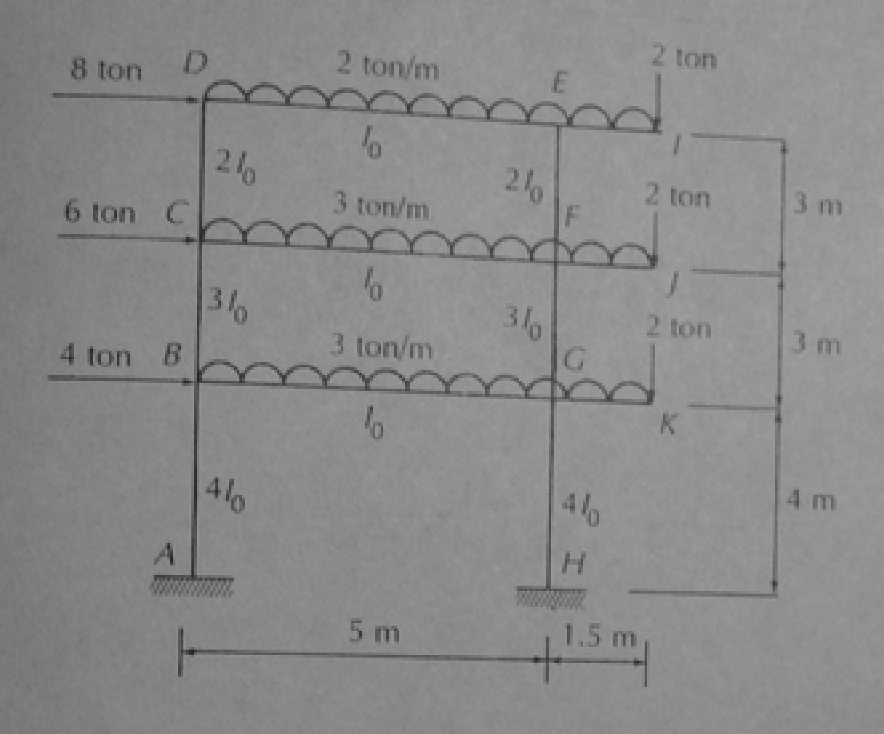
Ya habiendo calculado todas las fuerzas $F_{ij}$ se sustituyeron sus valores en el sistema de ecuaciones 9.10, como fuerzas $H_{ij}$. De la misma manera, las fuerzas que aparecen en el croquis anterior al paso $e$ son las fuerzas $H_i$ del sistema de ecuaciones, o sea, los términos independientes. Se resolvió el sistema de ecuaciones y se determinaron las incógnitas $X_1$, $X_2$ y $X_3$ , que representan los factores correctivos por los cuales deben multiplicarse los momentos obtenidos en las tablas de los pasos $g$, $f$ y $e$, respectivamente. En el ejemplo, estas incógnitas resultaron con valores de 7.886, 11.379 y 16.457. En este caso, todas resultaron con valores positivos, pero en otros ejemplos algunas pueden ser negativas, o también pueden serlo si los desplazamientos se imponen en otro sentido.

En el paso $i$ se calculan los momentos finales. Primero se multiplicaron los momentos obtenidos cuando se impuso el desplazamiento al piso 1 por el valor resultante de $X_1$ ($\Delta 1X_1$), después se hizo lo mismo para el piso 2 ($\Delta 2X_2$), y a continuación para el piso 3 ($\Delta 3X_3$). Los momentos así obtenidos se sumaron a los del paso $d$, o sea, a los que corresponden a desplazamientos laterales restringidos ($\Delta$ = 0 en la tabla). La suma de todos estos momentos representa los momentos finales en el marco mostrado al principio del ejemplo, bajo la acción de cargas verticales y horizontales.

Nótese que si cambian las fuerzas horizontales aplicadas al marco, lo único que se requiere modificar son los términos independientes del sistema de ecuaciones. Si el marco hubiese estado sometido a cargas laterales únicamente, no se hubiesen calculado los momentos correspondientes a la etapa de desplazamientos restringidos, paso $d$, ya que todos son nulos. Y si el marco hubiese tenido cargas verticales únicamente, los términos independientes del sistema de ecuaciones serían las fuerzas laterales obtenidas al final del paso $d$.

## EJEMPLO 9.2. RESOLUCIÓN DE UN MARCO CON TRES NIVELES Y UNA CRUJÍA CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

DATOS




Paso *a*) Cálculo de las rigideces angulares simplificadas

$$K_{AB} = K_{GH}\frac{4\,I_0}{4} = I_0 \qquad K_{CB} = K_{FG} = \frac{3\,I_0}{3} = I_0 \qquad K_{DC} = K_{EF}\,\frac{2\,I_0}{3} = 0.6667\,I_0$$

$$K_{DE} = K_{CF} = K_{BG} = \frac{I_0}{5} = 0.2\,I_0$$

Paso *b*) Cálculo de los factores de distribución

$$FD_{AB} = 0$$

$$FD_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BG} + K_{BC}} = \frac{I_0}{I_0 + 0.2\,I_0 + I_0} = 0.4545$$

$$FD_{BG} = \frac{K_{BG}}{K_{BA} + K_{BG} + K_{BC}} = \frac{0.2I_0}{I_0 + 0.20\,I_0 + I_0} = 0.0909$$

**EJEMPLO 9.2 *(continuación)***

$$FD_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BG} + K_{BC}} = \frac{I_0}{I_0 + 0.2\,I_0 + I_0} = 0.4545$$

$$FD_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CF} + K_{CD}} = \frac{I_0}{I_0 + 0.2\,I_0 + 0.6667\,I_0} = 0.5357$$

$$FD_{CF} = \frac{K_{CF}}{K_{CB} + K_{CF} + K_{CD}} = \frac{0.2\,I_0}{I_0 + 0.2\,I_0 + 0.6667 I_0} = 0.1071$$

$$FD_{CD} = \frac{K_{CD}}{K_{CB} + K_{CF} + K_{CD}} = \frac{0.6667\,I_0}{I_0 + 0.2\,I_0 + 0.6667\,I_0} = 0.3571$$

$$FD_{DC} = \frac{K_{DC}}{K_{DC} + K_{DE}} = \frac{0.6667\,I_0}{0.6667\,I_0 + 0.2\,I_0} = 0.7692$$

$$FD_{DE} = \frac{K_{DE}}{K_{DC} + K_{DE}} = \frac{0.2\,I_0}{0.6667\,I_0 + 0.2\,I_0} = 0.2308$$

$$FD_{EJ} = 0$$

**EJEMPLO 9.2 *(continuación)***

Por simetría

$$FD_{EI} = FD_{FJ} = FD_{GK}; \quad FD_{DE} = FD_{ED}; \quad FD_{DC} = FD_{EF}; \quad FD_{CD} = FD_{FE}; \quad FD_{CF} = FD_{FC}$$
$$FD_{CB} = FD_{FG}; \quad FD_{BC} = FD_{GF}; \quad FD_{BG} = FD_{GB}; \quad FD_{BA} = FD_{GH}; \quad FD_{AB} = FD_{HG}$$

Paso c) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto para Cross sin desplazamiento lateral

$$\overline{M}_{DE} = -\frac{w\ell^2}{12} = \frac{2\times 5^2}{12} = -4.1667$$

$$\overline{M}_{ED} = \frac{w\ell^2}{12} = \frac{2\times 5^2}{12} = 4.1667$$

$$\overline{M}_{CF} = -\frac{w\ell^2}{12} = -\frac{3\times 5^2}{12} = -6.25$$

$$\overline{M}_{FC} = \frac{w\ell^2}{12} = \frac{3\times 5^2}{12} = 6.25$$

$$\overline{M}_{BG} = \overline{M}_{CF}; \quad \overline{M}_{GB} = \overline{M}_{FC}$$

$$\overline{M}_{EI} = -\frac{w\ell^2}{2} - P\ell = -\frac{2\times 1.5^2}{2} - 2\times 1.5 = -5.25$$

$$\overline{M}_{FJ} = -\frac{w\ell^2}{12} - P\ell = -\frac{3\times 1.5^2}{2} - 2\times 1.5 = -6.375$$

$$\overline{M}_{GK} = \overline{M}_{FJ}$$

**EJEMPLO 9.2 *(continuación)***

Paso *d*) Cross sin desplazamientos laterales

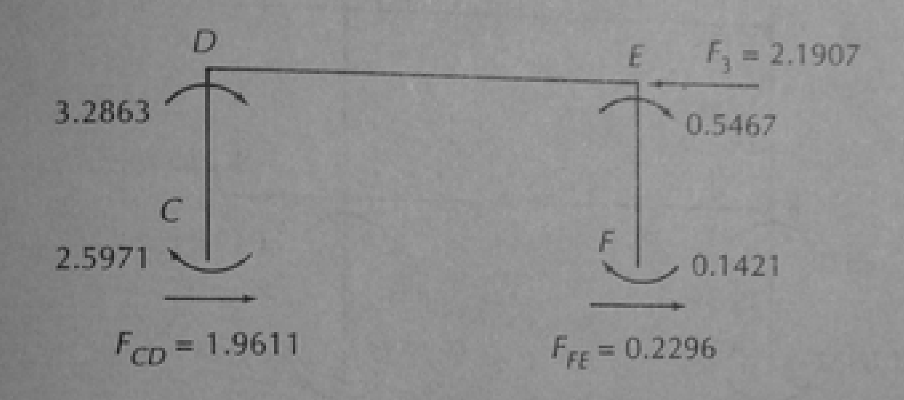
| NUDO | A | B | | | C | | | D | | E | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | AB | BA | BG | BC | CB | CF | CD | DC | DE | ED | EF | EI |
| FD | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0.5357 | 0.1071 | 0.3571 | 0.7692 | 0.2308 | 0.2308 | 0.7692 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | –6.25 | 0 | 0 | –6.25 | 0 | 0 | –4.167 | 4.1667 | 0 | –5.25 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 2.8409 | 0.5682 | 2.8409 | 3.3482 | 0.6696 | 2.2321 | 3.2051 | 0.9615 | 0.25 | 0.8333 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 1.4205 | 0 | 0.0057 | 1.6741 | 1.4205 | 0.0067 | 1.6026 | 1.1161 | 0.125 | 0.4808 | 0.0223 | 0 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0 | –0.764 | –0.153 | –0.764 | –1.623 | –0.325 | –1.082 | –0.955 | –0.286 | –0.116 | –0.387 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | –0.382 | 0 | –0.014 | –0.812 | –0.382 | –0.042 | –0.477 | –0.541 | –0.058 | –0.143 | –0.139 | 0 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 0.3754 | 0.0751 | 0.3754 | 0.4826 | 0.0965 | 0.3217 | 0.4608 | 0.1382 | 0.0652 | 0.2173 | 0 |
| M TOTALES | 1.0387 | 2.4528 | –5.768 | 3.3154 | 3.2465 | –5.844 | 2.5971 | 3.2863 | –3.286 | 4.7033 | 0.5467 | –5.25 |

| NUDO | F | | | | G | | | | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | FE | FC | FG | FJ | GF | GB | GH | GK | HG |
| FD | 0.3571 | 0.1071 | 0.5357 | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 6.25 | 0 | –6.375 | 0 | 6.25 | 0 | –6.375 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 0.0446 | 0.0134 | 0.067 | 0 | 0.0568 | 0.0114 | 0.0568 | 0 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 0.4167 | 0.3348 | 0.0284 | 0 | 0.0335 | 0.2841 | 0 | 0 | 0.0284 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | –0.279 | –0.084 | –0.418 | 0 | –0.144 | –0.029 | –0.144 | 0 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | –0.193 | –0.162 | –0.072 | 0 | –0.209 | –0.076 | 0 | 0 | –0.072 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0.1528 | 0.0459 | 0.2293 | 0 | 0.1297 | 0.0259 | 0.1297 | 0 | 0 |
| M TOTALES | 0.1421 | 6.3982 | –0.165 | –6.375 | –0.133 | 6.4662 | 0.0421 | –6.375 | –0.044 |

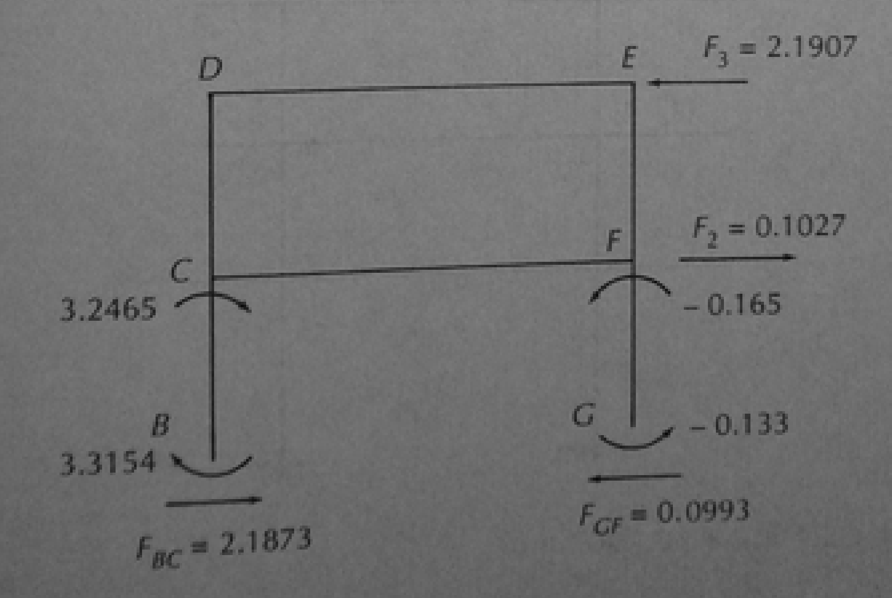
## EJEMPLO 9.2 *(continuación)*

REACCIONES NECESARIAS PARA IMPEDIR LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES.

Fuerza $F_3$

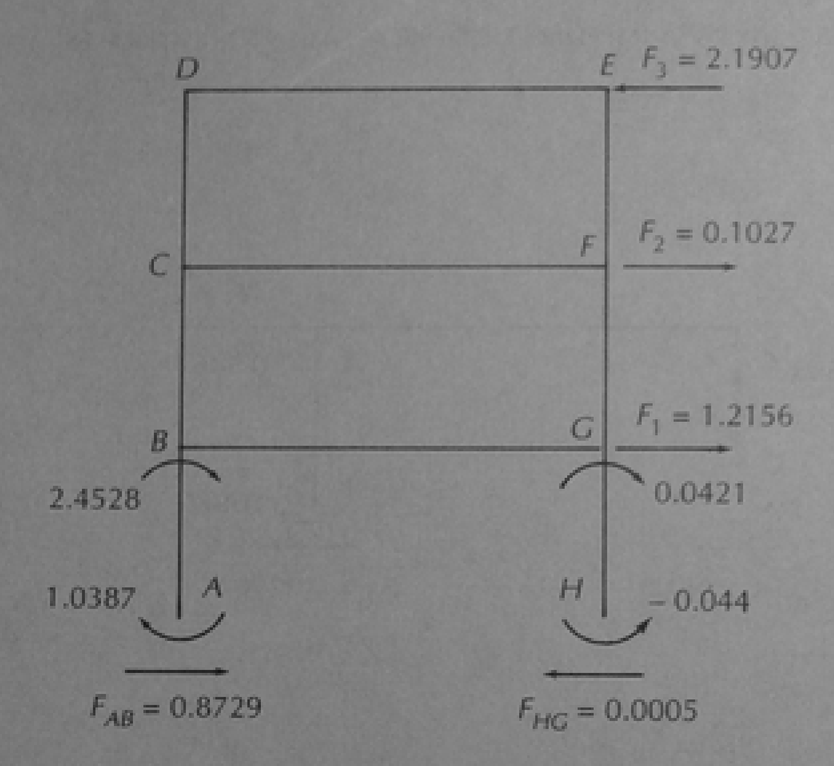



Fuerza $F_2$

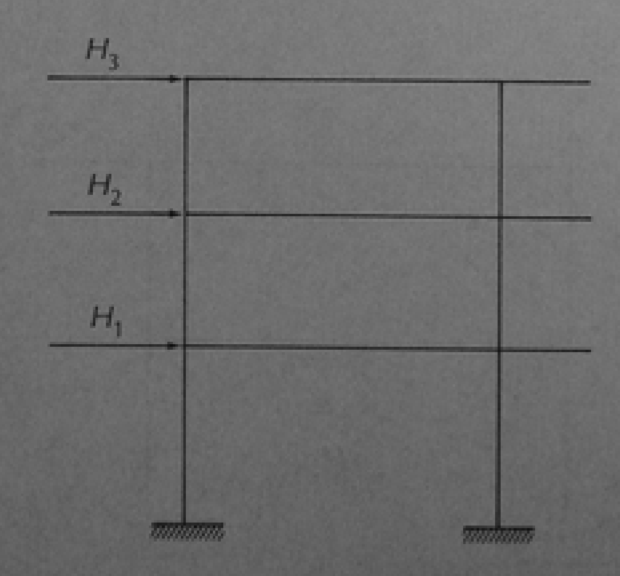


**EJEMPLO 9.2 (continuación)**

Fuerza $F_1$




MARCO A RESOLVER CON FUERZAS LATERALES TOTALES




$H_3 = 8 + 2.1907 = 10.1907$ ton

$H_2 = 6 - 0.1027 = 5.8973$ ton

$H_1 = 4 - 1.2156 = 2.7844$ ton

## EJEMPLO 9.2 *(continuación)*

Paso *e*) Cross con imposición de momentos en el nivel 3

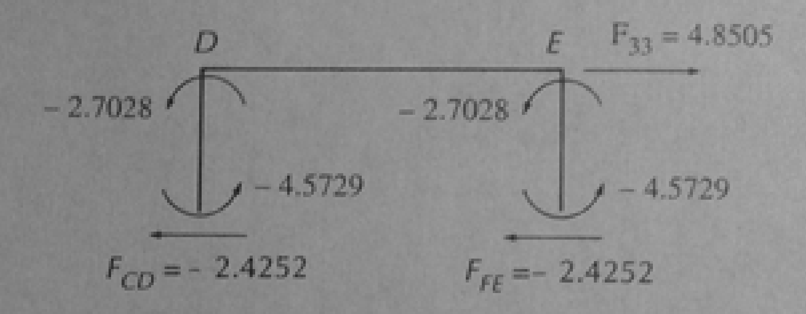
| NUDO | A | B | | | C | | | D | | E | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | AB | BA | BG | BC | CB | CF | CD | DC | DE | ED | EF | EI |
| FD | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0.5357 | 0.1071 | 0.3571 | 0.7692 | 0.2308 | 0.2308 | 0.7692 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −10 | −10 | 0 | 0 | −10 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 0 | 0 | 0 | 5.3571 | 1.0714 | 3.5714 | −7.6923 | 2.3077 | 2.3077 | 7.6923 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 0 | 0 | 0 | 2.6786 | 0 | 0.5357 | 3.8462 | 1.7857 | 1.1538 | 1.1538 | 1.7857 | 0 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0 | −1.218 | −0.244 | −1.218 | −2.347 | −0.469 | −1.565 | −2.261 | −0.678 | −0.678 | −2.261 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | −0.609 | 0 | −0.122 | −1.174 | −0.609 | −0.235 | −1.131 | −0.782 | −0.339 | −0.339 | −0.782 | 0 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 0.5888 | 0.1178 | 0.5888 | 1.0576 | 0.2115 | 0.705 | 0.8628 | 0.2588 | 0.2588 | 0.8628 | 0 |
| MOM. FINALES | −0.609 | −0.629 | −0.247 | 0.8762 | 3.4585 | 1.1144 | −4.573 | −2.703 | 2.7028 | 2.7028 | −2.703 | 0 |

| NUDO | F | | | | G | | | | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | FE | FC | FG | FJ | GF | GB | GH | GK | HG |
| FD | 0.3571 | 0.1071 | 0.5357 | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0 | 0 |
| $\overline{M}$ | −10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 3.5714 | 1.0714 | 5.3571 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 3.8462 | 0.5357 | 0 | 0 | 2.6786 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | −1.565 | −0.469 | −2.347 | 0 | −1.218 | − 0.244 | −1.218 | 0 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | −1.131 | −0.235 | −0.609 | 0 | −1.174 | − 0.122 | 0 | 0 | −0.609 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0.705 | 0.2115 | 1.0576 | 0 | 0.5888 | 0.1178 | 0.5888 | 0 | 0 |
| MOM. FINALES | −4.573 | 1.1144 | 3.4585 | 0 | 0.8762 | − 0.247 | −0.629 | 0 | −0.609 |

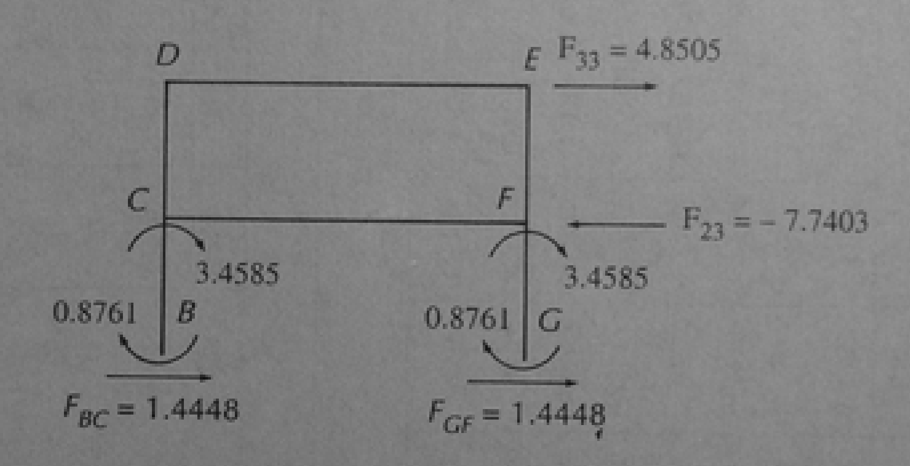
**EJEMPLO 9.2 (continuación)**

Fuerzas horizontales debidas al desplazamiento en el nivel 3.

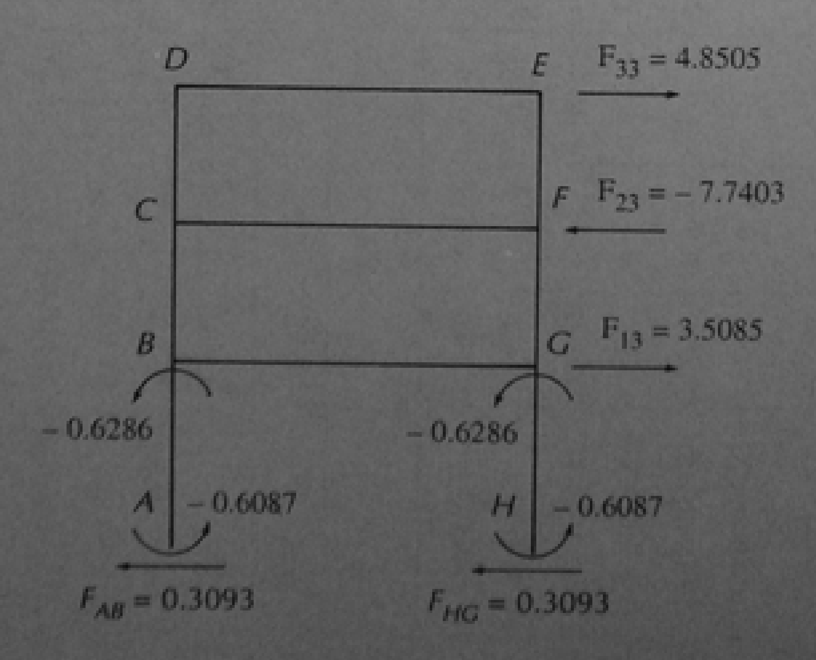
Fuerza $F_{33}$




Fuerza $F_{23}$




Fuerza $F_{13}$



**EJEMPLO 9.2 (continuación)**

*Paso f)* Cross con imposición de momentos en el nivel 2

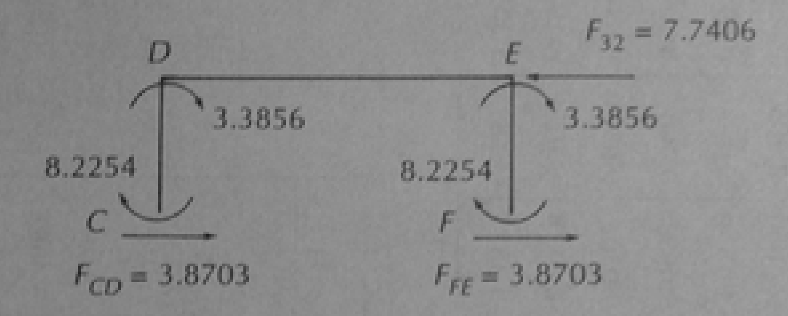
| NUDO | A | B | | | C | | | D | | E | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | AB | BA | BG | BC | CB | CF | CD | DC | DE | ED | EF | EI |
| FD | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0.5357 | 0.1071 | 0.3571 | 0.7692 | 0.2308 | 0.2308 | 0.7692 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | 0 | –15 | –15 | 0 | 10 | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 6.8175 | 1.3635 | 6.8175 | 2.6785 | 0.5355 | 1.7855 | –7.6920 | –2.3080 | –2.3080 | –7.6920 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 3.4087 | 0 | 0.6817 | 1.3392 | 3.4087 | 0.2677 | –3.8460 | 0.8927 | –1.1540 | –1.1540 | 0.8927 | 0 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0 | –0.9185 | –0.1832 | –0.9185 | 0.0908 | 0.0181 | 0.0606 | 0.2010 | 0.0603 | 0.0603 | 0.2010 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | –0.4592 | 0 | –0.0916 | 0.0454 | –0.4592 | 0.0091 | 0.1005 | 0.0303 | 0.0301 | 0.0301 | 0.0303 | 0 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 0.0210 | 0.0004 | 0.0210 | 0.1873 | 0.0374 | 0.1248 | –0.0464 | –0.0139 | –0.0139 | –0.0464 | 0 |
| MOM. FINALES | 2.9495 | 5.9200 | 1.7703 | –7.6954 | –9.0939 | 0.8678 | 8.2254 | 3.3856 | –3.3855 | –3.3855 | 3.3856 | 0 |

| NUDO | F | | | | G | | | | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | FE | FC | FG | FJ | GF | GB | GH | GK | HG |
| FD | 0.3571 | 0.1071 | 0.5357 | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0 | 0 |
| $\overline{M}$ | 10 | 0 | –15 | 0 | –15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 1.7855 | 0.5355 | 2.6785 | 0 | 6.8175 | 1.3635 | 6.8175 | 0 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | –3.8460 | 0.2677 | 3.4087 | 0 | 1.3392 | 0.6817 | 0 | 0 | 3.4087 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0.0606 | 0.0181 | 0.0908 | 0 | –0.9185 | –0.1832 | –0.9185 | 0 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | 0.1005 | 0.0091 | –0.4592 | 0 | 0.0454 | –0.0916 | 0 | 0 | –0.4592 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0.1248 | 0.0374 | 0.1873 | 0 | 0.0210 | 0.0004 | 0.0210 | 0 | 0 |
| MOM. FINALES | 8.2254 | 0.8678 | –9.0939 | 0 | –7.6954 | 1.7703 | 5.9200 | 0 | 2.9495 |

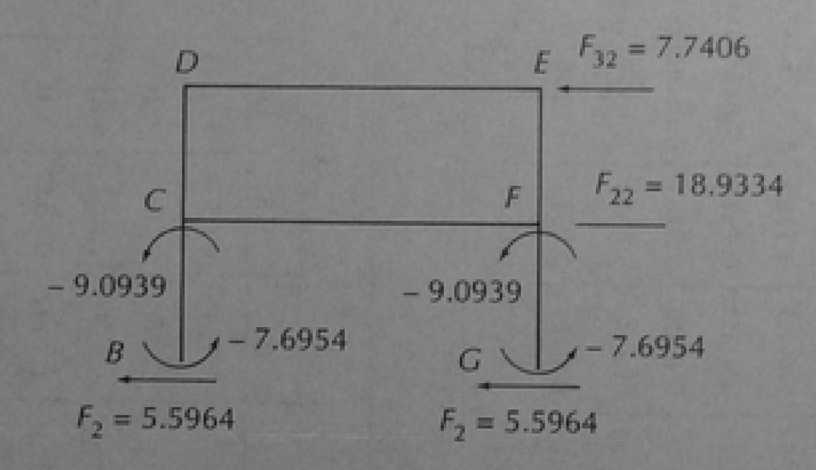
**EJEMPLO 9.2 *(continuación)***

Cálculo de fuerzas horizontales debidas al desplazamiento en el nivel 2.

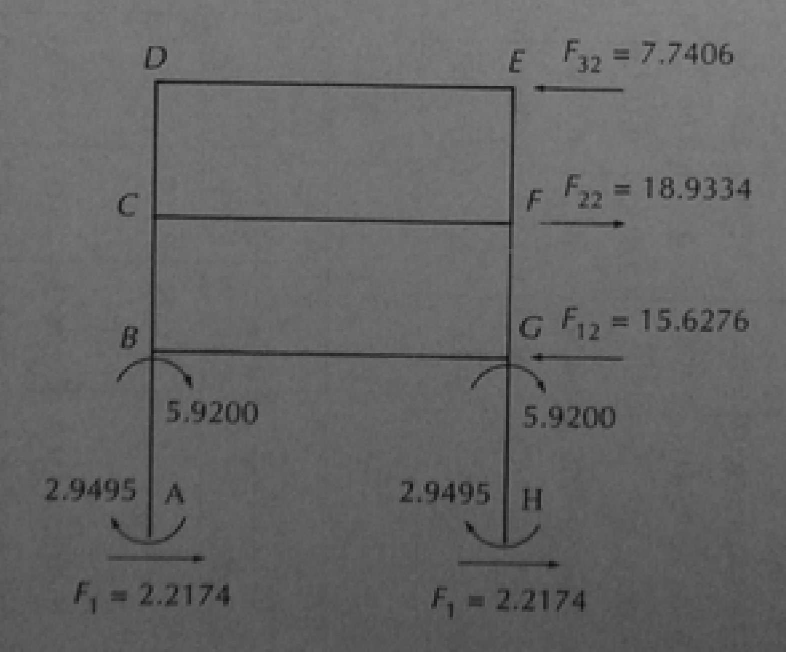
Fuerza $F_{32}$




Fuerza $F_{22}$




Fuerza $F_{12}$



## EJEMPLO 9.2 *(continuación)*

*Paso g)* Cross con imposición de momentos en el nivel 1

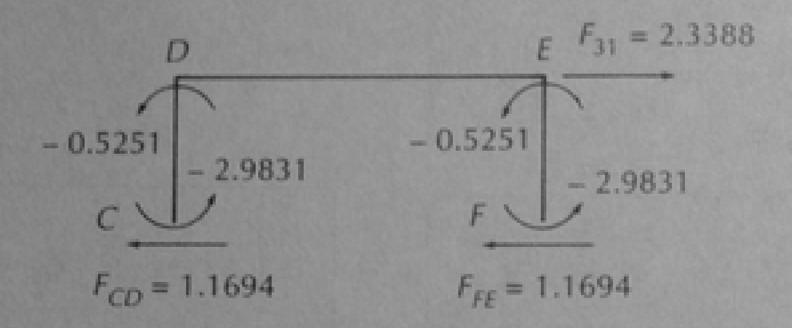
| NUDO | A | B | | | C | | | D | | E | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | AB | BA | BG | BC | CB | CF | CD | DC | DE | ED | EF | EI |
| FD | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0.5357 | 0.1071 | 0.3571 | 0.7692 | 0.2308 | 0.2308 | 0.7692 | 0 |
| $\overline{M}$ | –7.50 | –7.50 | 0 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | 0 | –1.1362 | –0.2272 | –1.1362 | –5.3570 | –1.0710 | –3.5710 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | –0.5681 | 0 | –0.1136 | –2.6785 | –0.5681 | –0.5355 | 0 | –1.7855 | 0 | 0 | –1.7855 | 0 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0 | 1.2690 | 0.2538 | 1.2690 | 0.5912 | 0.1182 | 0.3941 | 1.3734 | 0.4121 | 0.4121 | 1.3734 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | 0.6345 | 0 | 0.1269 | 0.2956 | 0.6345 | 0.0591 | 0.6867 | 0.1970 | 0.2060 | 0.2060 | 0.1970 | 0 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | 0 | –0.1920 | –0.0384 | –0.1920 | –0.7394 | –0.1478 | –0.4929 | –0.3100 | –0.0930 | –0.0930 | –0.3100 | 0 |
| MOM. FINALES | –7.4336 | –7.5592 | 0.0015 | 7.5579 | 4.5612 | –1.5770 | –2.9831 | –0.5251 | 0.5251 | 0.5251 | –0.5251 | 0 |

| NUDO | F | | | | G | | | | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | FE | FC | FG | FJ | GF | GB | GH | GK | HG |
| FD | 0.3571 | 0.1071 | 0.5357 | 0 | 0.4545 | 0.0909 | 0.4545 | 0 | 0 |
| $\overline{M}$ | 0 | 0 | 10 | 0 | 10 | 0 | –7.50 | 0 | –7.50 |
| 1a. DISTRIBUCIÓN | –3.5710 | –1.0710 | –5.3570 | 0 | –1.1362 | –0.2272 | –1.1362 | 0 | 0 |
| 1er. TRANSPORTE | 0 | –0.5355 | –0.5681 | 0 | –2.6785 | –0.1136 | 0 | 0 | –0.5681 |
| 2a. DISTRIBUCIÓN | 0.3941 | 0.1182 | 0.5912 | 0 | 1.2690 | 0.2538 | 1.2690 | 0 | 0 |
| 2o. TRANSPORTE | 0.6867 | 0.0591 | 0.6345 | 0 | 0.2956 | 0.1269 | 0 | 0 | 0.6345 |
| 3a. DISTRIBUCIÓN | –0.4929 | –0.1478 | –0.7394 | 0 | –0.1920 | –0.0384 | –0.1920 | 0 | 0 |
| MOM. FINALES | –2.9831 | –1.5770 | 4.5612 | 0 | 7.5579 | 0.0015 | –7.5592 | 0 | –7.4336 |

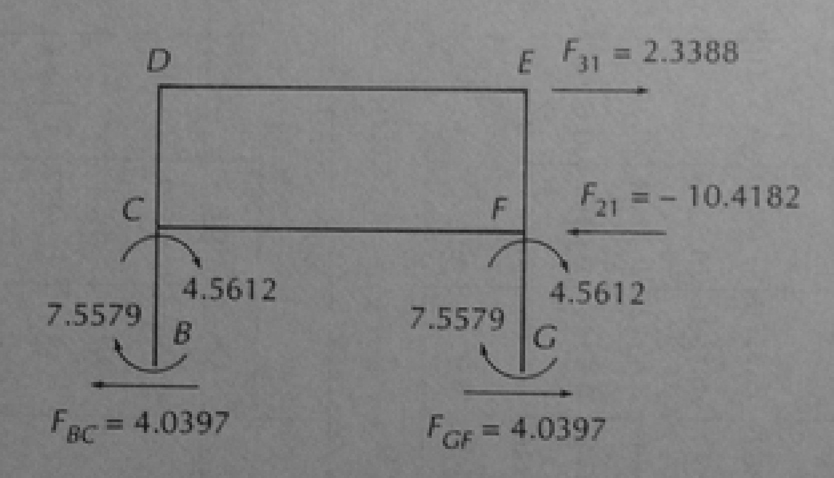
**EJEMPLO 9.2 (continuación)**

Fuerzas horizontales debidas al desplazamiento en el nivel 1.

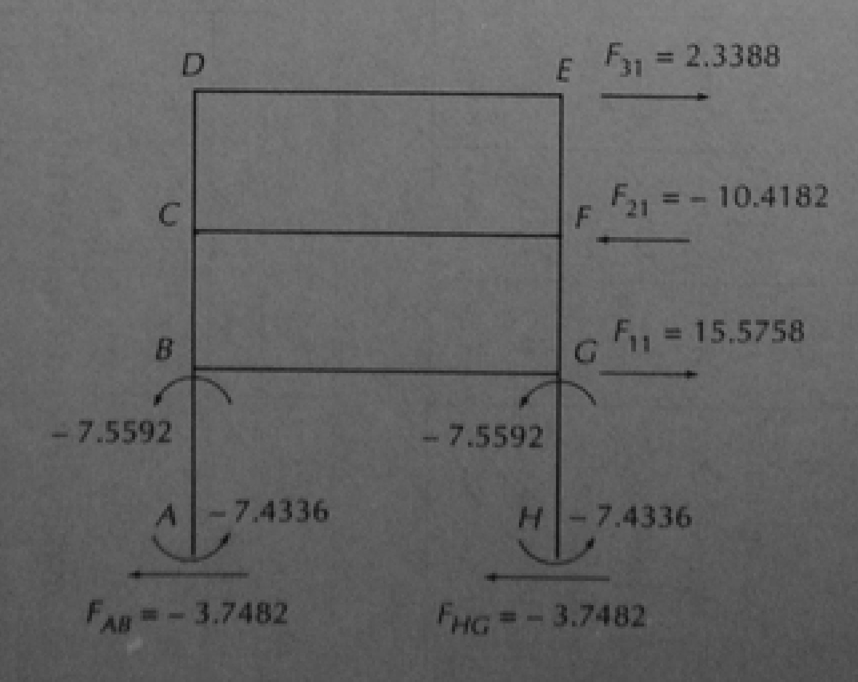
Fuerza $F_{31}$




Fuerza $F_{21}$




Fuerza $F_{11}$



**EJEMPLO 9.2 *(continuación)***

*Paso h)* Cálculo de los factores de modificación

$$15.5758X_1 - 15.6276\,X_2 + 3.5085\,X_3 = 2.7844$$

$$-10.4182X_1 + 18.9334\,X_2 - 7.7403\,X_3 = 5.8973$$

$$2.3388X_1 - 7.7406\,X_2 + 4.8505\,X_3 = 10.1907$$

La solución es: $X_1 = 7.886$
$X_2 = 11.379$
$X_3 = 16.457$

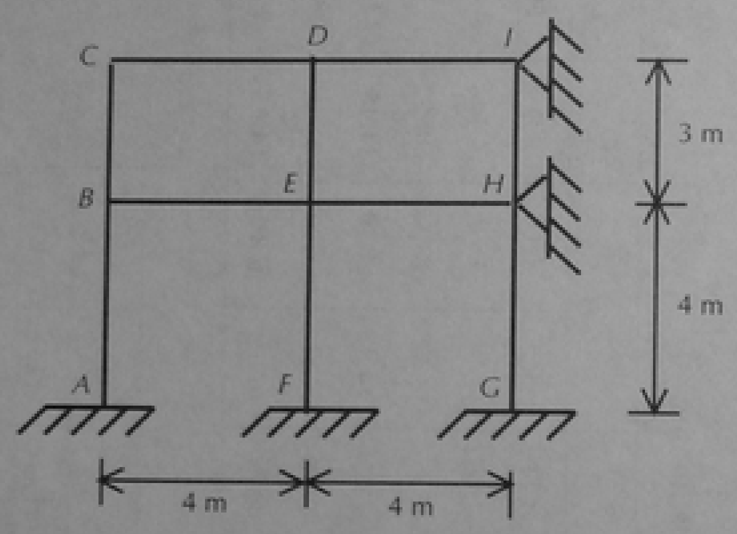
Paso *i)* Cálculo de los momentos finales

| NUDO | A | B | | | C | | | D | | E | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | AB | BA | BG | BC | CB | CF | CD | DC | DE | ED | EF | EI |
| $(\Delta 1)(X_1)$ | −58.62 | −59.61 | 0.01 | 59.60 | 35.97 | −12.44 | −23.52 | −4.14 | 4.14 | 4.14 | −4.14 | 0 |
| $(\Delta 2)(X_2)$ | 33.56 | 67.36 | 20.14 | −87.56 | −103.48 | 9.87 | 93.60 | 38.52 | −38.52 | −38.52 | 38.52 | 0 |
| $(\Delta 3)(X_3)$ | −10.02 | −10.35 | −4.06 | 14.42 | 56.92 | 18.34 | −75.26 | −44.48 | 44.48 | 44.48 | −44.48 | 0 |
| M $(\Delta = 0)$ | 1.04 | 2.45 | −5.77 | 3.31 | 3.25 | −5.84 | 2.60 | 3.29 | −3.29 | 4.70 | 0.55 | −5.25 |
| M FINALES | −34.04 | −0.15 | 10.32 | −10.23 | −7.34 | 9.93 | −2.58 | −6.81 | 6.81 | 14.80 | −9.55 | −5.25 |

| NUDO | F | | | | G | | | | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MIEMBRO | FE | FC | FG | FJ | GF | GB | GH | GK | HG |
| $(\Delta 1)(X_1)$ | −23.52 | −12.44 | 35.97 | 0 | 59.60 | 0.01 | −59.61 | 0 | −58.62 |
| $(\Delta 2)(X_2)$ | 93.60 | 9.87 | −103.48 | 0 | −87.56 | 20.14 | 67.36 | 0 | 33.56 |
| $(\Delta 3)(X_3)$ | −75.26 | 18.34 | 56.92 | 0 | 14.42 | −4.06 | −10.35 | 0 | −10.02 |
| M $(\Delta = 0)$ | 0.14 | 6.40 | −0.16 | −6.37 | −0.13 | 6.47 | 0.04 | −6.37 | −0.04 |
| M FINALES | −5.04 | 22.17 | −10.75 | −6.37 | −13.67 | 22.56 | −2.56 | −6.37 | −35.12 |

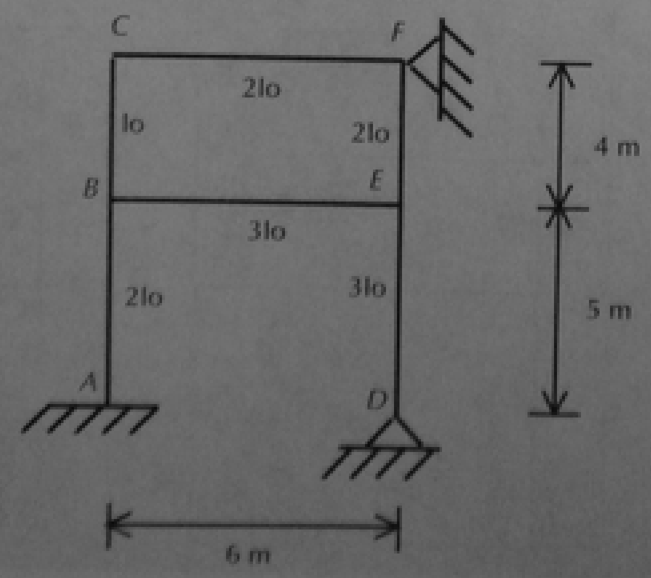
## PROBLEMAS

9.1 Se ha analizado el marco mostrado, por el método de Cross, suponiendo que hay apoyos en los nudos *I* y *H* que impiden el desplazamiento lateral. Los momentos en los extremos de las columnas obtenidos bajo esta hipótesis son los que aparecen en la tabla en ton-m. Calcular los valores de las reacciones en los nudos *I* y *H*.

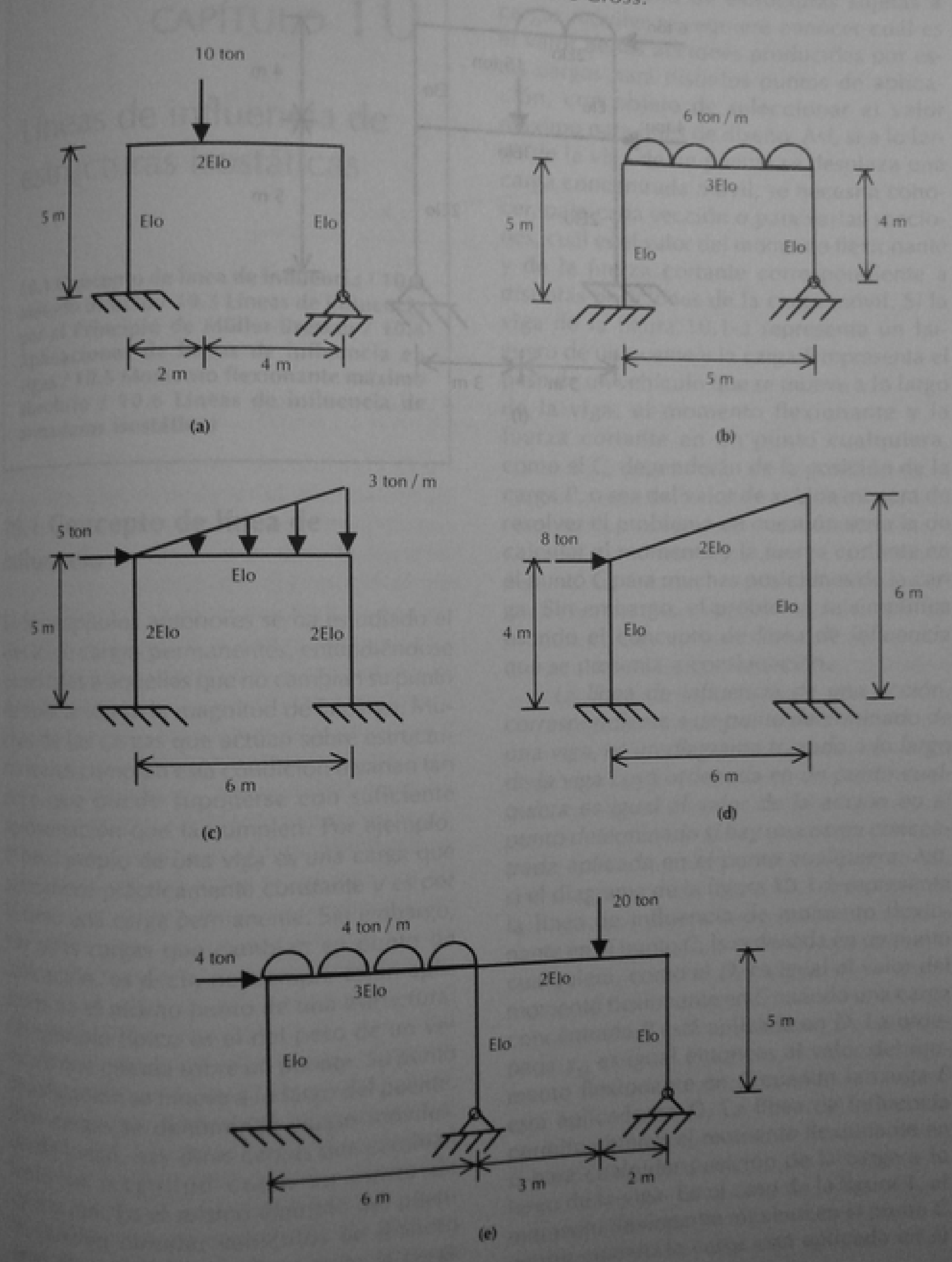


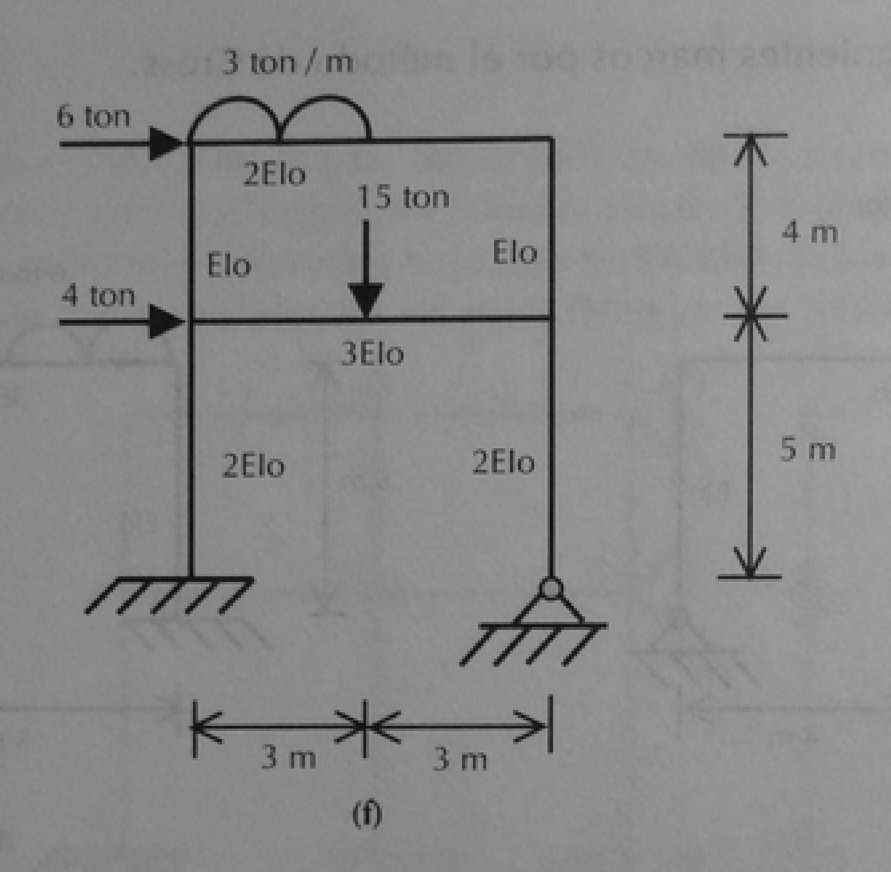

| $M_{AB}$ | $M_{BA}$ | $M_{BC}$ | $M_{CB}$ | $M_{DE}$ | $M_{ED}$ | $M_{EF}$ | $M_{FE}$ | $M_{IH}$ | $M_{HI}$ | $M_{HG}$ | $M_{GH}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +30 | +20 | +10 | +5 | +4 | +2 | −5 | −10 | +5 | +10 | +15 | +20 |

9.2 Durante la resolución del marco por el método de Cross, se restringe el desplazamiento lateral del piso superior y se aplica un desplazamiento al piso inferior de tal magnitud que produce en la columna AB momentos de -50 ton-m en sus extremos, manteniendo restringidos contra giro todos los nudos. Calcular los momentos que aparecen en los extremos de las otras columnas.



9.3 Resolver los siguientes marcos por el método de Cross.






(f)

# CAPÍTULO 10

# Líneas de influencia de estructuras isostáticas



## 10.1 Concepto de línea de influencia

En los capítulos anteriores se ha estudiado el efecto de cargas permanentes, entendiéndose como tales a aquellas que no cambian su punto de aplicación ni la magnitud de la carga. Muchas de las cargas que actúan sobre estructuras reales cumplen esta condición o varían tan poco que puede suponerse con suficiente aproximación que la cumplen. Por ejemplo, el peso propio de una viga es una carga que permanece prácticamente constante y es por lo tanto una carga permanente. Sin embargo, hay otras cargas que cambian su punto de aplicación, es decir, no siempre están aplicadas en el mismo punto de una estructura. Un ejemplo típico es el del peso de un vehículo que circula sobre un puente. Su punto de aplicación se mueve a lo largo del puente. Estas cargas se denominan cargas móviles. Desde luego, hay otras cargas que cambian tanto su magnitud como su punto de aplicación. En el mismo ejemplo del puente, pueden circular vehículos de distinto peso. En este último caso, se toma la carga de mayor magnitud para fines de diseño.

En el diseño de estructuras sujetas a cargas móviles se requiere conocer cuál es el valor de las acciones producidas por estas cargas para distintos puntos de aplicación, con objeto de seleccionar el valor máximo para fines de diseño. Así, si a lo largo de la viga de un puente se desplaza una carga concentrada móvil, se necesita conocer, para cada sección o para varias secciones, cuál es el valor del momento flexionante y de la fuerza cortante correspondiente a distintas posiciones de la carga móvil. Si la viga de la figura 10.1-*a* representa un larguero de un puente y la carga *P* representa el peso de un vehículo que se mueve a lo largo de la viga, el momento flexionante y la fuerza cortante en un punto cualquiera, como el *C*, dependerán de la posición de la carga *P*, o sea del valor de *x*. Una manera de resolver el problema en cuestión sería la de calcular el momento y la fuerza cortante en el punto *C* para muchas posiciones de la carga. Sin embargo, el problema se simplifica usando el concepto de *línea de influencia* que se presenta a continuación.

*La línea de influencia de una acción, correspondiente a un punto determinado de una viga, es un diagrama trazado a lo largo de la viga cuya ordenada en un punto cualquiera es igual al valor de la acción en el punto determinado si hay una carga concentrada aplicada en el punto cualquiera*. Así, si el diagrama de la figura 10.1-*b* representa la línea de influencia de momento flexionante en el punto *C*, la ordenada en un punto cualquiera, como el *D*, es igual al valor del momento flexionante en C cuando una carga concentrada *P* está aplicada en *D*. La ordenada $y_D$ es igual entonces al valor del momento flexionante en *C* cuando la carga *P* está aplicada en *D*. La línea de influencia permite obtener el momento flexionante en *C* para cualquier posición de la carga a lo largo de la viga. En el caso de la figura 1, el momento flexionante máximo en el punto *C* ocurre cuando la carga está aplicada en el

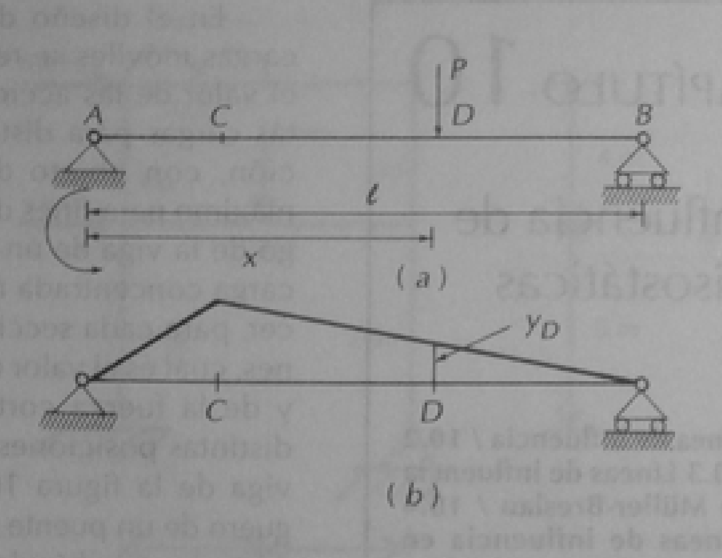
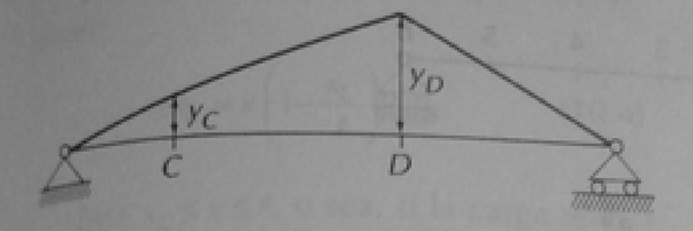



**Figura 10.1.** Concepto de línea de influencia

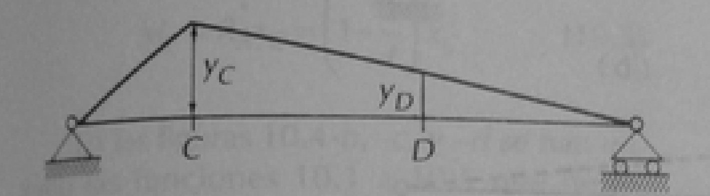
mismo punto, ya que ahí es máxima la ordenada de la línea de influencia; pero no siempre es así. Es importante observar que cada punto o sección de una viga tiene una línea de influencia diferente y la forma de la línea de influencia es también diferente para cada acción. En lo que queda de este capítulo se presentan métodos para determinar líneas de influencia en vigas y armaduras isostáticas.

Antes de proceder a la exposición de métodos para calcular líneas de influencia, es conveniente recalcar la diferencia entre diagramas de acciones y líneas de influencia. Por ejemplo, la ordenada de un diagrama de momentos flexionantes en un punto cualquiera es igual al valor de esta acción en el mismo punto por efecto de una carga determinada. Las ordenadas $y_C$ y $y_D$ en la figura 10.2-*a* representan el valor del momento flexionante en las secciones *C* y *D*, respectivamente, para la viga de la figura 10.1-*a* sujeta a la carga *P*. Por otra parte, la ordenada de la línea de influencia en un punto cualquiera es igual al valor del momento flexionante en un punto determinado cuando hay una carga concentrada aplicada en el punto cualquiera. La ordenada $y_D$ en la figura 10.2-*b* es igual al valor del momento flexionante en el punto *C* cuando hay una carga concentrada aplicada en el punto *D*. Puede ser que la carga esté aplicada en el mismo punto para el que se trazó la línea de influencia; sería el caso de la ordenada $y_C$ en la figura 10.2-*b* que proporciona el momento flexionante en *C* cuando la carga está aplicada también en *C*. En otras palabras, el diagrama de momentos flexionantes se calcula y se traza para una carga determinada y proporciona el valor de una acción en cualquier sección por efecto de esa carga. La línea de influencia se calcula y se traza para un punto determinado y para una acción determinada, y proporciona el valor de la acción en ese punto cuando hay una carga aplicada en un punto cualquiera. Una línea de influencia hay que trazarla para una determinada acción y para un punto o sección de una viga. Por ejemplo, la línea de influencia de la figura 10.1-*b* es sólo para momento flexionante y sólo para el punto *C*. Nótese que es necesario especificar tanto la acción como el punto o sección de la viga. En el ejemplo de la figura 10.1-*b*, la línea de influencia es *de momento flexionante* (acción) *en el punto C*.

En el párrafo anterior, por claridad de la exposición, se ha usado el caso de línea de influencia de momento flexionante en




(a) Diagrama de momentos flexionantes para la viga de la figura 10.1-*a* con la carga *P*.




(b) Línea de influencia de momento flexionante en el punto *C* de la viga de la figura 10.1-*a*.

**Figura 10.2.** Diferencia entre diagrama de acción y línea de influencia

una viga. También se calculan líneas de influencia para otras acciones, fuerza cortante y fuerza normal, y para otro tipo de estructuras, marcos o armaduras. Suelen calcularse líneas de influencia de reacciones, ya que es importante conocerlas para ciertas estructuras de puentes. También se ha supuesto en la explicación anterior que la carga aplicada tiene un valor cualquiera *P*. El cálculo de líneas de influencia se hace normalmente para cargas unitarias, y los valores para otras cargas se obtienen por simple multiplicación, ya que son directamente proporcionales al valor de la carga. Este capítulo se limita al caso de estructuras isostáticas.

## 10.2 Método directo

Supóngase que se desea calcular la línea de influencia de la reacción en *A* de la viga de la figura 10.3-*a*, obteniendo las ordenadas en las secciones señaladas. El método más obvio, pero no el más expedito, consiste en colocar una carga unitaria en las distintas secciones y calcular el valor correspondiente de la reacción en *A*, $R_A$. Por ejemplo, se coloca una carga en la sección 1, figura 10.3-*b*, se calcula el valor de $R_A$ correspondiente, y este valor será la ordenada de la línea de influencia en la sección 1, figura 10.3-*c*, de acuerdo con la definición de línea de influencia. Después se coloca la carga unitaria en el punto 2, figura 10.3-*d*, se calcula el valor de $R_A$ correspondiente que será la ordenada de la línea de influencia en el punto 2, figura 10.3-*e*. Se repite este cálculo colocando la carga unitaria en las otras secciones mostradas en la figura, y cada valor de $R_A$ será la ordenada de la línea de influencia en el punto de colocación de la carga. De esta manera se tendrían las ordenadas en todas las secciones de la viga seleccionadas y uniéndolas se tendría la línea de influencia, como la mostrada con línea punteada en las figuras 10.3-c y 10.3-e.

En vez de calcular las ordenadas de la línea de influencia punto por punto, como se acaba de explicar, resulta más sencillo plantear una ecuación para la reacción, o para cualquier acción, en función de la posición, *x*, de la carga unitaria. Supóngase, en referencia a la figura 10.1-*a*, que se desea calcular la línea de influencia para la reacción en el apoyo *A*, $R_A$, y para la fuerza cor-

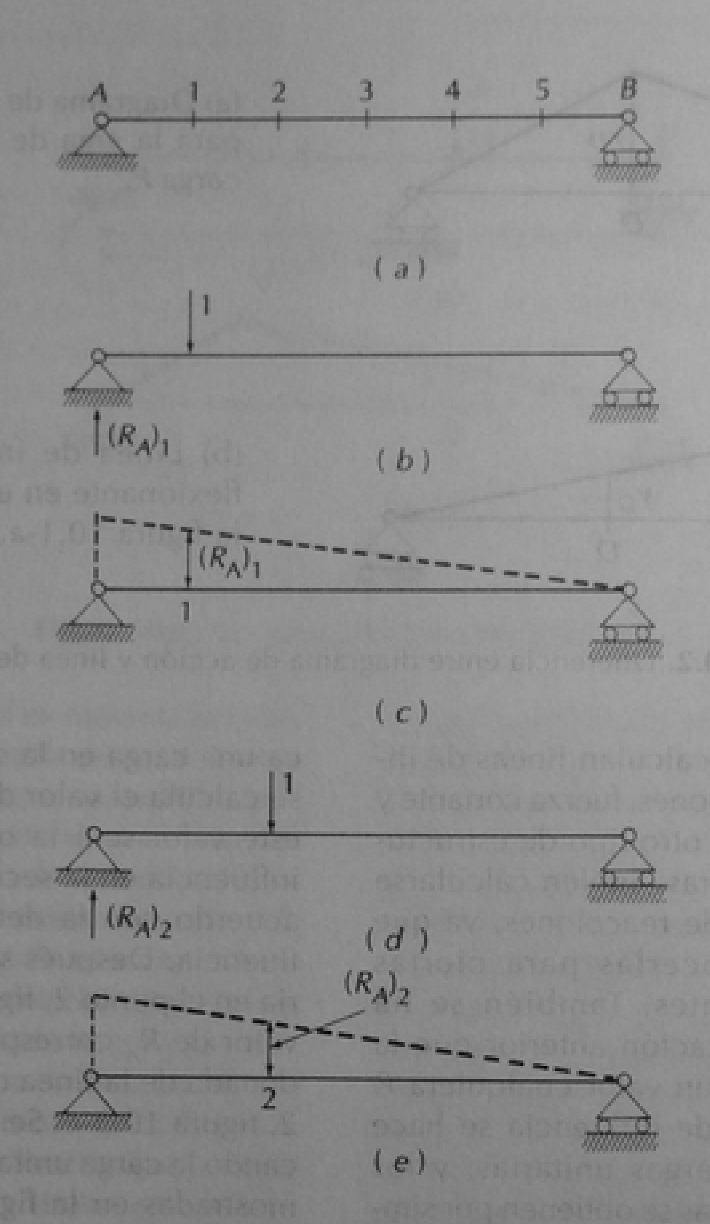



**Figura 10.3.** Línea de influencia de una reacción calculada punto por punto

tante y el momento flexionante en el punto $C$, que se denominarán $V_C$ y $M_C$, respectivamente. Se coloca una carga unitaria en un punto cualquiera $D$, figura 10.4-*a*, localizado a una distancia $x$ del apoyo $A$, y se plantean las siguientes ecuaciones, en función de $x$, para $R_A$, $V_C$ y $M_C$.

$$R_A = \frac{(1)(\ell - x)}{\ell} = 1 - \frac{x}{\ell} \tag{10.1}$$

Para $0 \leq x \leq x_c$, o sea, si la carga unitaria se coloca entre los puntos $A$ y $C$:

$$V_C = R_A - 1 = -\frac{x}{\ell} \tag{10.2}$$

Para $x_C \leq x \leq \ell$, o sea, si la carga unitaria se coloca entre los puntos $C$ y $B$:

$$V_C = R_A = 1 - \frac{x}{\ell} \tag{10.3}$$

Para $0 \leq x \leq x_C$, o sea, si la carga unitaria se coloca entre los puntos $A$ y $C$:

$$M_C = R_A x_C - (1)(x_C - x)$$

Sustituyendo el valor de $R_A$ y simplificando:

$$M_C = x\left(1-\frac{x_C}{\ell}\right) \qquad (10.4)$$

Para $x_C \leq x \leq \ell$, o sea, si la carga unitaria se coloca entre los puntos $C$ y $B$:

$$M_C = R_A x_C = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)x_C \qquad (10.5)$$

En las figuras 10.4-*b*, -*c*, y –*d* se han trazado las funciones 10.1 a 10.5 que representan las líneas de influencia de la reacción en *A*, de la fuerza cortante en la sección *C* y del momento flexionante en la misma sección *C*, respectivamente. Se puede observar que las ecuaciones 10.1 a 10.5 son, todas, funciones de primer grado de la variable *x*. Por esta razón, las gráficas de las funciones, o sea, las líneas de influencia, son líneas rectas, como se ve en las figuras correspondientes. Esta propiedad puede generalizarse para cualquier estructura isostática lo que permite establecer un principio muy importante: *Las líneas de influencia de estructuras isostáticas son líneas rectas.* Este principio facilita mucho el trazado de líneas de influencia, ya que si se determinan las ordenadas en dos puntos, basta unirlas con una línea recta para tener toda la línea de influencia. Desde luego los dos puntos deben seleccionarse dentro de un tramo en que la línea de influencia tenga una sola función. Por ejemplo, si se trata de la línea de influencia de $V_C$ en la viga de la figura 10.4, se necesitarán dos puntos en el tramo *AC* y otros dos puntos en el tramo *CB*. Por lo general, la forma más sencilla de trazar líneas de influencia de estructuras isostáticas consiste en calcular las ordenadas en algunos puntos y aplicar el principio de que las líneas son rectas. En la mayoría de los casos, las ordenadas en algunos puntos son obvias o muy fáciles de calcular. Por ejemplo, para calcular la línea de influencia de $R_A$, se puede ver que si se coloca la carga sobre el apoyo *A*, la reacción $R_A$ vale 1, mientras que si se coloca la carga en el apoyo *B*, la reacción $R_A$ vale 0. Se tienen así dos puntos que definen la línea completa. En los siguientes ejemplos se ilustra el cálculo y trazado de líneas de influencia con este procedimiento.

**Ejemplo 10.1** Aunque ya se ha dicho que la determinación de las ordenadas de las líneas de influencia punto por punto no es el procedimiento más conveniente, este ejemplo está resuelto de esta manera para ayudar a la comprensión del concepto. Como se ve, basta colocar una carga unitaria en cada uno de los puntos en los que se desea conocer la ordenada, y calcular los valores de las acciones correspondientes, en este caso del momento flexionante y de la fuerza cortante en el empotramiento. Así, si se coloca una carga unitaria en el extremo del voladizo, punto 1, el momento flexionante vale –6 y la fuerza cortante, –1. De la misma manera se han calculado los valores para cada posición de la carga unitaria. Esta carga puede tener cualquier unidad; si es de 1 ton, la línea de influencia de $M_B$ tendrá unidades de ton-m y la de $V_B$, de ton. También puede dejarse la carga unitaria en forma adimensional; en este caso, $M_B$ tendrá unidades de m y $V_B$ será adimensional. Teniendo los valores de $M_B$ y de $V_B$ para cada posición de la carga, se marcan las ordenadas en cada punto, como se muestra en los dos diagramas del final del ejemplo, y ya se tienen las líneas de influencia.

A partir del conocimiento de que las líneas de influencia de estructuras isostáticas son líneas rectas, el problema se puede resolver más fácilmente determinando dos puntos de cada línea. Para la línea de influencia de $M_B$, se sabe que el momento en *B* vale –6 si la carga unitaria está aplicada en el punto 1, y

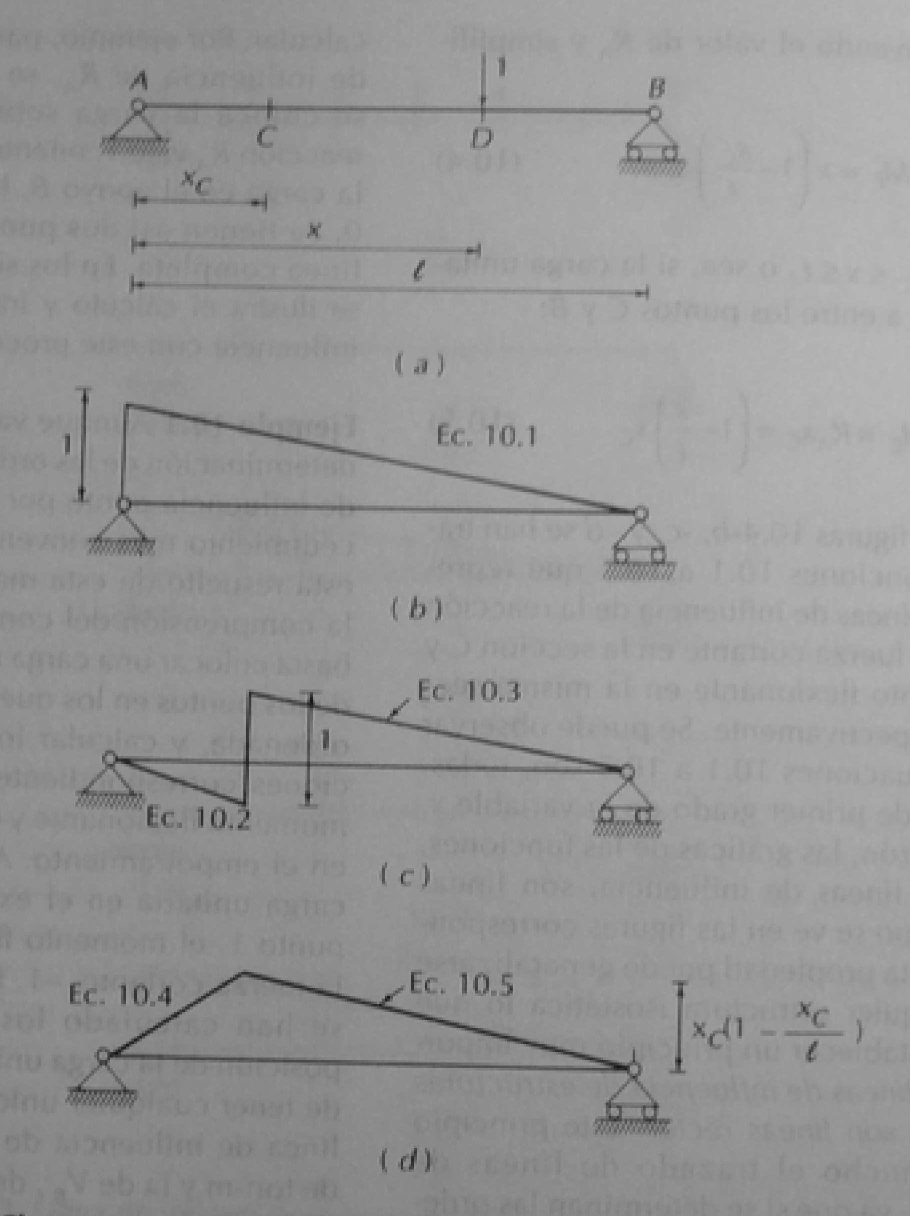


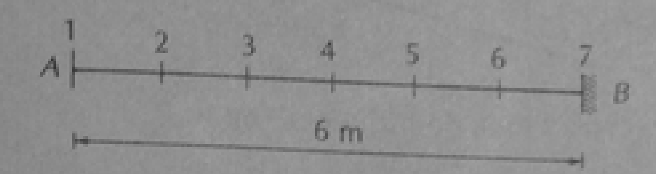

**Figura 10.4.** Líneas de influencia a partir de funciones

que vale 0 si está colocada en el punto 7, o sea, en el mismo empotramiento. También se sabe que la función de momento flexionante es una sola a lo largo de la viga. Entonces basta unir el valor de –6 en el punto 1 y el de 0 en el punto 7 para tener la línea completa. En cuanto a la línea de influencia de $V_B$ , si se coloca la carga unitaria en dos puntos cualesquiera de la viga, por ejemplo el 2 y el 5, el valor de la fuerza cortante es –1. Entonces a línea de influencia es una paralela al eje de la viga.

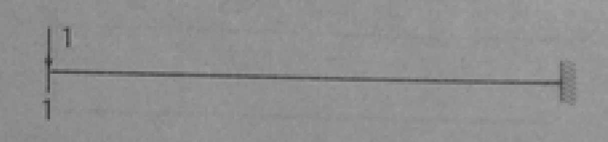
Como una primera aplicación del concepto de líneas de influencia, supóngase que una carga concentrada de 8 ton se desplaza a lo largo de la viga y que se desea calcular el momento flexionante en el empotramiento para distintas posiciones de esta carga. Basta multiplicar la ordenada de la línea de influencia de $M_B$ en el punto de aplicación por el valor de la carga, para tener el momento de empotramiento. Por ejemplo, si la carga está en el punto 3, el momento flexionante en el empotramiento valdrá (–4) (8) = –32 ton-m. La fuerza cortante en el empotramiento, para cualquier posición de la carga, será de –8 ton.

## EJEMPLO 10.1. CALCULAR LAS ORDENADAS DE LA LÍNEA DE INFLUENCIA, EN LOS PUNTOS MOSTRADOS, DE MOMENTO FLEXIONANTE Y DE FUERZA CORTANTE EN EL EMPOTRAMIENTO MEDIANTE EL PROCEDIMIENTO DE PUNTO POR PUNTO

DATOS




CÁLCULOS




$M_B = -6$

$V_B = -1$

$M_B = -5$

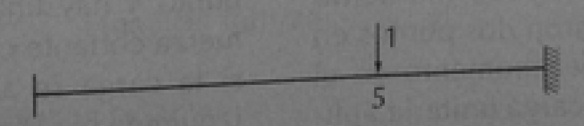
$V_B = -1$

$M_B = -4$

$V_B = -1$

$M_B = -3$

$V_B = -1$




$M_B = -2$

$V_B = -1$

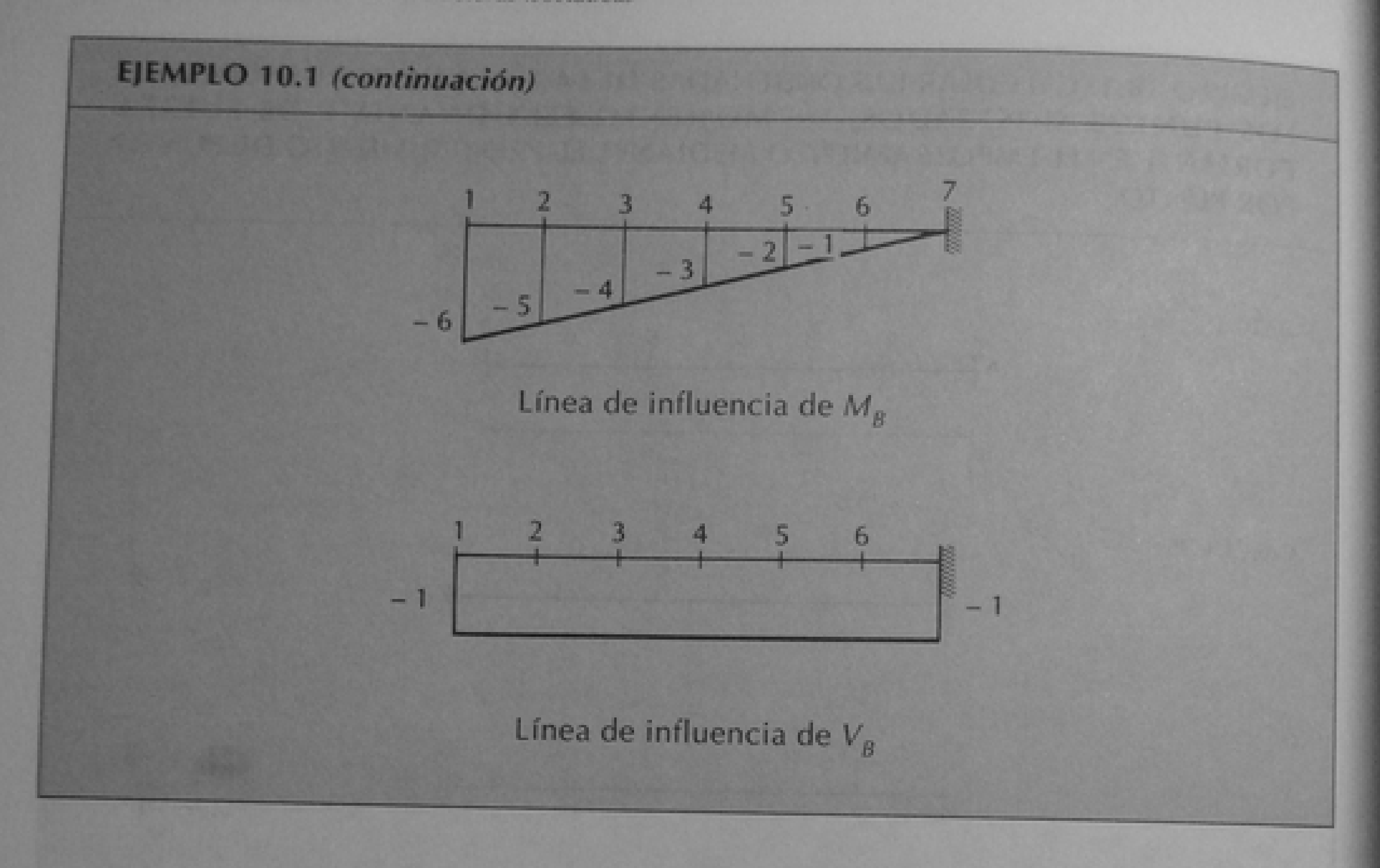
$M_B = -1$

$V_B = -1$

$M_B = 0$

$V_B = -1$

**EJEMPLO 10.1** ***(continuación)***




Línea de influencia de $M_B$

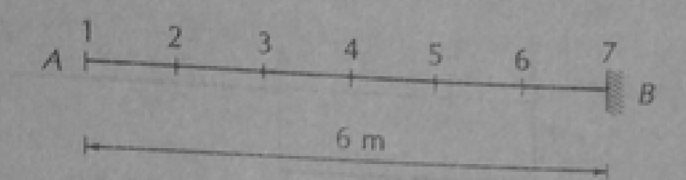
Línea de influencia de $V_B$

**Ejemplo 10.2** Se trata del mismo voladizo del ejemplo anterior, pero ahora se piden las líneas de influencia de momento flexionante y fuerza cortante en el centro del claro, o sea, en el punto 4. El problema se ha resuelto determinando dos puntos en cada tramo en que las funciones son las mismas. Así, para la línea de influencia de momento flexionante, se determinaron dos puntos en el tramo 1-4: el valor del momento en el punto 4 cuando hay una carga unitaria aplicada en el punto 1, que es la ordenada $y_1$, y cuando hay una carga aplicada en el punto 4, que es la ordenada $y_4$. De esta manera se tiene la línea recta que va de −3, en el punto 1, a 0 en el punto 4. Por simple inspección puede verse que para cualquier posición de la carga unitaria entre los puntos 4 y 7, el momento flexionante en el punto 4 es nulo, y por lo tanto todas las ordenadas en este tramo valen 0. Pero si no se viese, se calcula el momento en 4 cuando la carga está en 7, que es la ordenada $y_7$ que también vale cero.

De manera semejante se determinó la línea de influencia de fuerza cortante en el punto 4. Si se aplica una carga unitaria en el punto 1, la fuerza cortante en el punto 4 vale −1; por lo tanto, la ordenada en el punto 1 es −1. En el punto 4 hay una discontinuidad, ya que la fuerza cortante cambia bruscamente de valor si la carga se aplica inmediatamente a la izquierda o a la derecha del punto. Por eso se han calculado dos valores. Si la carga está ligeramente a la izquierda, la fuerza cortante en 4 vale −1, pero si está ligeramente a la derecha, vale 0, ya que no hay fuerzas a la izquierda de la sección. Si la carga unitaria está aplicada en cualquier punto, entre el situado ligeramente a la derecha del punto 4 y el punto 7, la fuerza cortante en el punto 4 es 0, ya que no hay fuerzas a la izquierda de la sección. Por eso, las ordenadas de la línea de influencia son todas nulas.

**EJEMPLO 10.2. CALCULAR LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE MOMENTO FLEXIONANTE Y DE FUERZA CORTANTE EN EL PUNTO 4 DEL VOLADIZO DEL EJEMPLO ANTERIOR**

DATOS




CÁLCULOS

Línea de influencia de momento flexionante

Si la carga está en el punto 1:

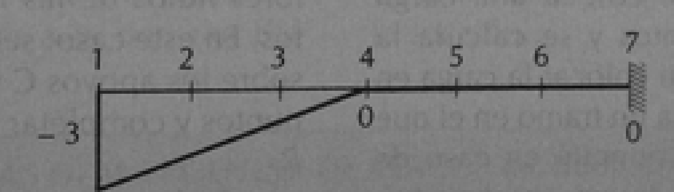
$$M_4 = y_1 = (-1)(3) = -3$$

Si la carga está en el punto 4:

$$M_4 = y_4 = 0$$

Si la carga está en el punto 7:

$$M_4 = y_7 = 0$$




Línea de influencia de $M_4$

Línea de influencia de fuerza cortante:

Si la carga está en el punto 1:

$$V_4 = y_1 = -1$$

Si la carga está ligeramente a la izquierda del punto 4:

$$V_4 = y_{4i} = -1$$

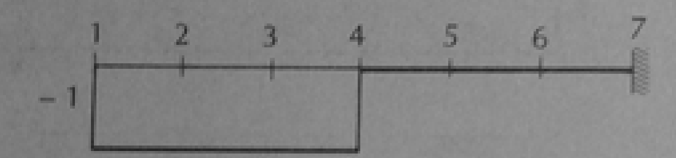
Si la carga está ligeramente a la derecha del punto 4:

$$V_4 = y_{4d} = 0$$

**EJEMPLO 10.2 *(continuación)***

Si la carga está en el punto 7:

$V_4 = y_7 = 0$




Línea de influencia de $V_4$

**Ejemplo 10.3** Se ilustra la obtención de líneas de influencia en una viga con tres apoyos y una articulación interior, por lo cual es isostática. Primero se ha obtenido la línea de influencia de la reacción en el apoyo *C*. El principio de solución es el mismo de los ejemplos anteriores: se coloca una carga unitaria en ciertos puntos y se calcula la reacción en *C*. Basta con colocar la carga en puntos que pertenecen a un tramo en el que no cambia la función, aunque en caso de duda, puede colocarse en más puntos. Así, entre el punto 1 y el punto 3, la función de $R_C$ es continua. Si se coloca la carga en el punto 1, o sea, sobre el apoyo *A*, la reacción en *C* vale 0, ya que toda la carga es tomada por el apoyo *A*. Si se coloca en el punto 3, la reacción en *C* puede calcularse como se muestra en el diagrama de cuerpo libre entre los puntos 3 y 9; resulta un valor de la reacción de 1.5 hacia arriba. Como la línea de influencia es una línea recta, por el principio ya demostrado, se pueden unir las ordenadas de 0 en el punto 1, y de 1.5 en el punto 3, para tener el diagrama entre estos dos puntos. Desde luego que también pudo colocarse la carga unitaria en el punto 2 y calcular $R_C$, tanto para comprobación como para tener la ordenada en otro punto que no sean el 1 y el 3. Siempre conviene colocar la carga unitaria en aquellos puntos que conduzcan a un cálculo más directo del valor buscado. Por ejemplo, colocarla sobre los apoyos con mucha frecuencia produce valores nulos de las funciones en otros puntos. En este caso, se colocó la carga unitaria sobre los apoyos *C* y *D* para tener otros dos puntos y completar la línea de influencia de $R_C$.

La línea de influencia de $M_C$ se obtuvo de manera semejante. Se colocó la carga unitaria en los mismos puntos del caso anterior y se calculó el valor del momento en *C* para cada posición de la carga. Obsérvese que la función de momento en *C* no cambia si la carga se aplica entre cualquier pareja de estos puntos. Por ejemplo, si se coloca entre los puntos 5 y 9, la viga trabaja como una libremente apoyada en *C* y en *D*, y el momento en *C* siempre vale 0 porque es un apoyo libre.

A continuación se calculó la línea de influencia de fuerza cortante en *C*. Aquí hay que notar que la fuerza cortante cambia bruscamente de un punto situado inmediatamente a la izquierda del apoyo a un punto

situado inmediatamente a la derecha, por el efecto de la reacción. Por lo tanto, a menos que se especifique para qué punto se pide la línea de influencia, se debe calcular una línea para cada punto. Así se hizo en el ejemplo.

Para el punto situado inmediatamente a la izquierda de *C*, se colocó primero la carga unitaria en el punto 1. Para esta posición, la reacción en *A* también vale 1, la suma de fuerzas a la izquierda de la sección es 0 y, por lo tanto, también la ordenada de la línea de influencia es nula. Si la carga se aplica en el punto 3, o en cualquier punto entre el 3 y la sección situada ligeramente a la izquierda de *C*, la suma de fuerzas a la izquierda de la sección es −1, y ésta es la ordenada de la línea de influencia en todos estos puntos. Al pasar la carga unitaria a la derecha del apoyo *C*, ya no hay ninguna carga a la izquierda de la sección localizada inmediatamente a la izquierda de dicho apoyo, y por lo tanto las ordenadas de la línea de influencia son nulas entre los puntos 5 y 9.

La línea de influencia para el punto localizado inmediatamente a la derecha del apoyo *C* se pudo calcular de la manera ya descrita, pero en el ejemplo se siguió un procedimiento más expedito. Se aprovechó la circunstancia de que ya se tenían las líneas de influencia del punto situado a la izquierda de *C* y de la reacción $R_C$, y se observó que la fuerza cortante a la derecha de *C* es igual a la fuerza cortante a la izquierda más el valor de la reacción. Entonces basta con sumar las dos líneas de influencia ya obtenidas para tener la buscada. Así, en el punto 1, ambas son 0 y la buscada será también nula. En el punto 3, una vale −1 y la otra, +1.5, por lo que el resultado es +0.5; y de la misma manera en los otros puntos. Cuando se piden varias líneas de influencia de una misma viga, es frecuente poder aprovechar, como en este ejemplo, una línea ya obtenida para calcular las demás. Si se tiene la de una reacción, por poner un caso, y se pide la de un momento flexionante en cierta sección, se puede calcular la segunda multiplicando la línea de influencia de la reacción por la distancia a la sección, y en su caso también la carga unitaria por la distancia a la sección.

**EJEMPLO 10.3. LÍNEAS DE INFLUENCIA DE REACCIÓN, MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE EN EL PUNTO C DE LA VIGA CON ARTICULACIÓN INTERIOR MOSTRADA EN LA FIGURA**

DATOS:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

A B C D

8 @ 1 m = 8 m

**EJEMPLO 10.3 *(continuación)***

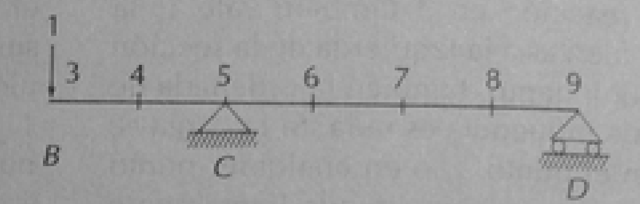
LÍNEA DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN *C*

Si la carga unitaria se aplica en 1: $R_C = 0$

Si la carga unitaria se aplica en 3:

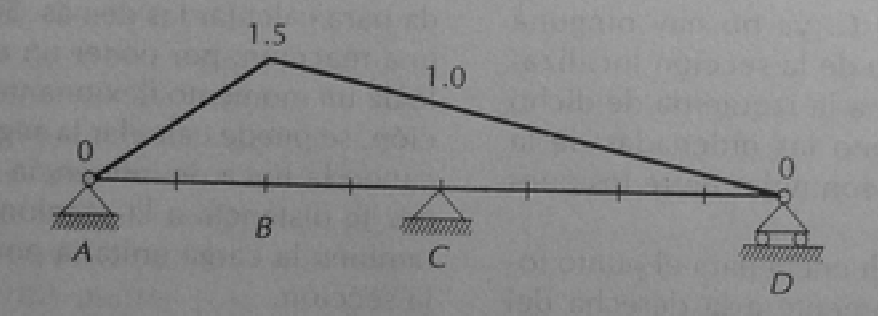
De $\sum M_D = 0$,

$$R_C = \frac{(1)(6)}{4} = 1.5\uparrow$$




Si la carga unitaria se aplica en 5: $R_C = 1\uparrow$

Si la carga unitaria se aplica en 9: $R_C = 0$

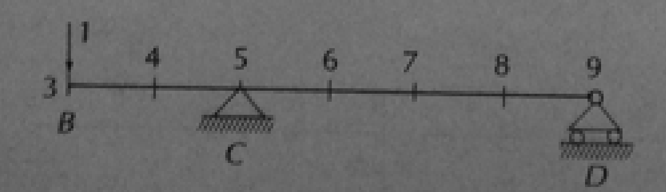



Línea de influencia de $R_C$

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO EN *C*

Si la carga unitaria se aplica en 1: $M_C = 0$

Si la carga unitaria se aplica en 3:

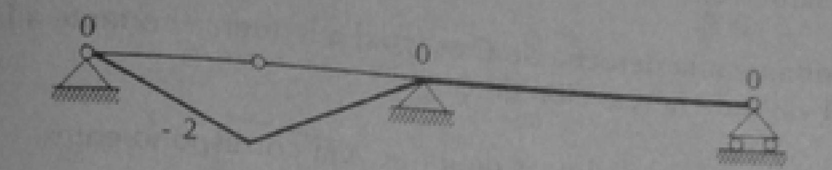



$M_C = -1 \times 2 = -2$

Si la carga unitaria se aplica en 5: $M_C = 0$

Si la carga unitaria se aplica en 9: $M_C = 0$

**EJEMPLO 10.3 (*continuación*)**



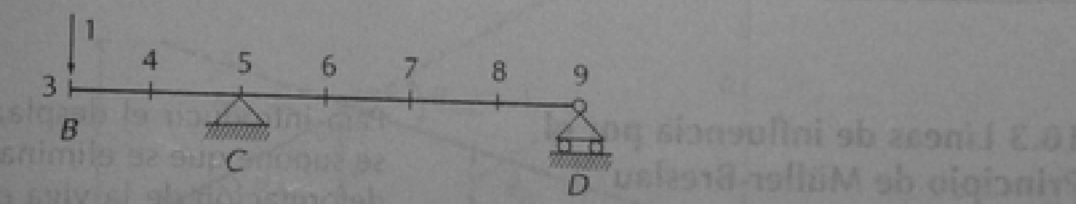

Línea de influencia de $M_C$

LÍNEA DE INFLUENCIA DE FUERZA CORTANTE EN C

a) Ligeramente a la izquierda.

Si la carga unitaria se aplica en 1: $R_A = 1, \quad V_C = 0$

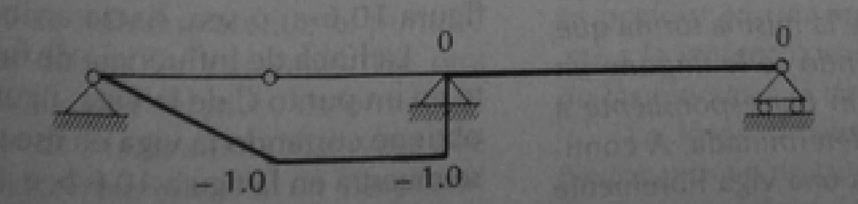
Si la carga unitaria se aplica en 3: $V_C = -1$




Si la carga unitaria se aplica entre el punto 3 y un punto a la izquierda de 5: $V_C = -1$

Si la carga unitaria se aplica a la derecha del punto 5: $V_C = 0$

Si la carga unitaria se aplica en 9: $V_C = 0$



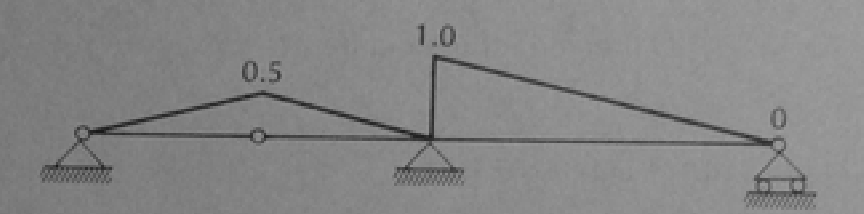

Línea de influencia de $V_C$ (ligeramente a la izquierda)

**EJEMPLO 10.3** ***(continuación)***

*b)* Ligeramente a la derecha

La fuerza cortante a la derecha de *C* es igual a la fuerza cortante a la izquierda de *C* más el valor de la reacción en *C*.

Se suman los diagramas de líneas de influencia correspondientes.




Línea de influencia de $V_C$ (ligeramente a la derecha).

## 10.3 Líneas de influencia por el Principio de Müller-Breslau

Otro método para construir líneas de influencia consiste en la aplicación de un principio, que se demuestra más adelante, conocido con el nombre de Principio de Müller-Breslau, ingeniero alemán que lo estableció en 1886. Se puede enunciar de la siguiente manera: *la línea de influencia de una reacción o de una acción (momento flexionante o fuerza cortante) tiene la misma forma que la viga deformada cuando se le impone un desplazamiento unitario correspondiente a la reacción o acción determinada.* A continuación se ilustra para una viga libremente apoyada, con referencia a la figura 10.5

La línea de influencia de la reacción en *A* se obtiene introduciendo un desplazamiento unitario a la viga en dirección de la reacción, figura 10.5-*b*. La forma de la viga deformada es la línea de influencia de $R_A$. Para introducir el desplazamiento unitario, se supone que se elimina la restricción a la deformación de la viga en el apoyo, como se muestra en la figura 10.6-*a*, y no se permite otro tipo de deformación, por ejemplo, debido a flexión o a fuerza cortante. Por esta última razón la viga permanece recta. Se puede comparar esta línea de influencia con la de la figura 10.4-*b*. El sentido del desplazamiento en la figura 10.5-*b*, corresponde al sentido positivo de la reacción $R_A$ en la figura 10.6-a, o sea, hacia arriba.

La línea de influencia de fuerza cortante en un punto *C* de la viga, figura 10.5-*c*, se obtiene cortando la viga en ese punto, como se muestra en la figura 10.6-*b*, e introduciendo un desplazamiento unitario correspondiente a fuerza cortante. La forma de la viga deformada es la línea de influencia de $V_C$, como puede verse comparando las figuras 10.5-*c* y 10.4-*c*. En este caso, no deben permitirse deformaciones por flexión o por des-

**Figura 10.5.** Líneas de influencia por el principio de Müller-Breslau

plazamiento de las reacciones. Para que no haya deformaciones por flexión, los dos tramos de línea de influencia entre el punto *C* y los apoyos deben ser paralelos. De otra forma habría un giro relativo, deformación que corresponde a la flexión. Obsérvese que cuando se hace referencia a un desplazamiento unitario, se entiende que es un desplazamiento muy pequeño, ya que de otra forma los ángulos no podrían igualarse a sus tangentes y las distancias $a/\ell$ y $b/\ell$ mostradas en la figura 10.5-*c* no serían correctas. El sentido del desplazamiento en la figura 10.5-*c* corresponde al sentido positivo de la fuerza cortante 10.6-*b*, o sea, la fuerza cortante es positiva en una sección cuando las fuerzas a la izquierda son hacia arriba, o cuando las fuerzas a la derecha son hacia abajo.

La línea de influencia de momento flexionante en un punto *C* de la viga, figura 10.5-*d*, se obtiene introduciendo una articulación en ese punto, como se muestra en la figura 10.6-*c*, e imponiendo un giro unitario, o sea, la deformación correspondiente a flexión. La forma de la viga deformada es la línea de influencia de $M_C$. Se puede

comparar con la de la figura 10.4-*d*. Obsérvese que en este caso no hay deformaciones correspondientes a fuerza cortante o a desplazamiento de los apoyos. La primera condición implica que los dos tramos de viga permanezcan unidos en el punto C. La magnitud de la distancia $z$ y de los ángulos $\theta_A$ y $\theta_B$, figura 10.5-*d*, puede calcularse de la siguiente manera. Si el ángulo de giro, $\theta_{MC}$, es unitario, entonces :

$$\theta_A + \theta_B = 1 \qquad (10.6)$$

Por otro lado,

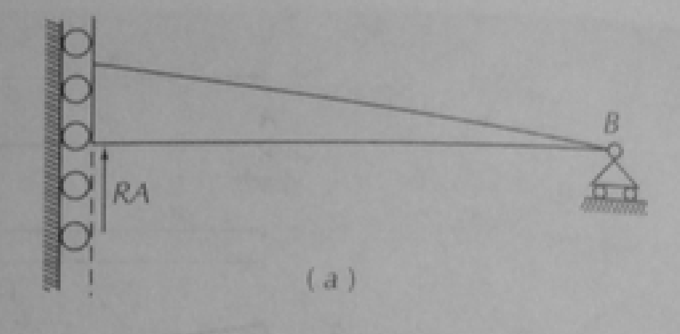
$$\theta_A = \frac{z}{a} \quad \text{y} \quad \theta_B = \frac{z}{b} \qquad (10.7)$$

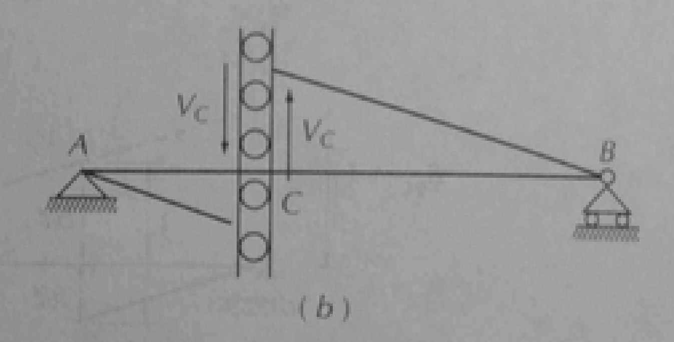
Sustituyendo 10.7 en 10.6 y resolviendo para $z$:

$$z = \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{\ell} \qquad (10.8)$$

Y sustituyendo este valor de $z$ en las ecuaciones 10.7:

$$\theta_A = \frac{b}{\ell} \quad \text{y} \quad \theta_B = \frac{a}{\ell} \qquad (10.9)$$



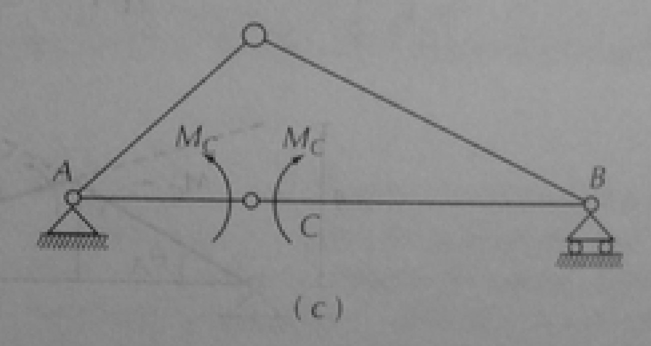




**Figura 10.6.** Eliminación de restricciones

El signo del giro en la figura 10.6-*c* es tal que la suma de momentos a la izquierda de una sección es positiva en el sentido horario y la suma de momentos a la derecha es positiva en el sentido antihorario.

En la presentación anterior se ha mostrado que las líneas de influencia obtenidas por el principio de Müller-Breslau, o sea, introduciendo deformaciones unitarias correspondientes a cada reacción o acción, y evitando las deformaciones correspondientes a las otras reacciones o acciones, son iguales a las obtenidas por el método directo. Una demostración más formal del Principio de Müller-Breslau se incluye a continuación usando el Principio del Trabajo Virtual estudiado en la Sección 3.7.7.

Supóngase que en la viga de la figura 10.5-*a* se coloca una carga virtual unitaria en un punto cualquiera a una distancia $x$ del origen de coordenadas. Si se impone a la viga un desplazamiento $\delta_{RA}$ en el apoyo $A$ como se muestra en la figura 10.5-*b*, el punto de aplicación de la carga unitaria sufrirá un desplazamiento $y$. Al imponer el desplazamiento del apoyo $A$, como se ha indicado, la reacción en $A$ y la carga unitaria realizarán

un trabajo igual a la magnitud de las cargas por su desplazamiento, y por el Teorema de Betti, estos trabajos deberán ser iguales. Por lo tanto, se puede escribir la ecuación:

$$R_A\delta_{RA} = (1)(y) \qquad (10.10)$$

Pero si el desplazamiento $\delta_{RA}$ es unitario:

$$y = R_A \qquad (10.11)$$

Esta ecuación indica que si se aplica una carga unitaria en un punto situado a una distancia $x$ del origen, la ordenada de la viga desplazada en el punto de aplicación de la carga es igual a la reacción $R_A$ producida por la carga unitaria. Esta es la definición de línea de influencia y por lo tanto la viga desplazada coincide con la línea de influencia, lo cual demuestra el Principio de Müller-Breslau.

De manera semejante, si el desplazamiento que se impone a la viga corresponde a fuerza cortante, como en la figura 10.5-*c*, la fuerza cortante en el punto *C* desarrollará un trabajo igual a la magnitud de la fuerza por el desplazamiento en el punto *C*, y la carga unitaria, un trabajo igual a la unidad por el desplazamiento en su punto de aplicación. Si se toma en cuenta que el desplazamiento en *C* es unitario, esto conduce a las ecuaciones:

$$V_C\delta_{VC} = (1)(y) \qquad (10.12)$$

y

$$y = V_C \qquad (10.13)$$

Esta ecuación indica que la ordenada de la viga deformada en el punto de aplicación de la carga es igual a la fuerza cortante en la sección en la que se impuso la deformación unitaria, y por lo tanto, la viga deformada de la figura 10.5-*c* coincide con la línea de influencia de fuerza cortante en el punto *C*.

Siguiendo el mismo razonamiento, pueden plantearse las siguientes ecuaciones para el caso de la figura 10.5-*d*:

$$M_C\theta_{MC} = (1)(y) \qquad (10.14)$$

y

$$y = M_C \qquad (10.15)$$

que demuestran que la viga deformada de la figura 10.5-*d* coincide con la línea de influencia de momento flexionante en el punto *C*.

En general, la obtención de líneas de influencia con el Principio de Müller-Breslau es más sencilla que con el método directo y ayuda a que el estudiante de Análisis Estructural adquiera habilidad en el trazado de estructuras deformadas. También puede usarse para obtener líneas de influencia de estructuras hiperestáticas, si bien en esta etapa del curso, sólo en forma cualitativa. A continuación se ilustra el método con algunos ejemplos.

**Ejemplo 10.4** Se trazan líneas de influencia de una viga con dos voladizos usando el Principio de Müller-Breslau. Para la primera línea de influencia, de reacción en el apoyo *D*, se elimina la restricción de reacción, como en la figura 10.6-*a*, y se impone un desplazamiento unitario en el apoyo *D*. La viga toma la forma *A′BC′D′E′*. Obsérvese que no se viola la restricción de reacción en *B*, ya que este punto no se desplaza, y como la viga permanece recta, no se viola tampoco ninguna restricción de fuerza cortante o de momento flexionante; es decir, no hay ningún tipo de desplazamiento de los mostrados en las figuras 10.6-*b* y –*c*. Teniendo la ordenada de la línea de influen-

cia en $D'$, que es igual a 1, por simple proporción se calculan las ordenadas en los otros puntos

Para la línea de influencia de fuerza cortante en la sección 4, se hace un corte en esta sección, como en la figura 10.6-*b*, y se introduce un desplazamiento total unitario entre los dos extremos cortados. El signo de este desplazamiento corresponde a fuerzas cortantes positivas y como la sección está en el centro del claro, cada desplazamiento parcial vale 0.5; para otras secciones se calcularían con las expresiones mostradas en la figura 10.5-*c*. El tramo $A'BC'$ tiene que pasar por el apoyo $B$, para que no se viole la restricción de reacción, y tiene que ser recto, para que no se violen las restricciones de fuerza cortante y momento flexionante. El tramo $C''DE'$ también tiene que pasar por el apoyo y permanecer recto. Por lo tanto, la línea de influencia queda definida por $A'BC'C''DE'$. Teniendo las ordenadas en $C'$ y en $C''$, se calculan las de los otros puntos por proporción.

En el siguiente caso, línea de influencia de momento flexionante en $D$, se introduce una articulación en ese punto, como en la figura 10.6-*c*, y se impone un giro unitario producido por momentos flexionantes positivos. Al aplicar estos momentos, el tramo de viga $ABCD$ no puede moverse, pues no puede despegarse de los apoyos $B$ y $D$, y tiene que conservarse recto. El tramo $DE$ sí puede girar, ya que tiene un extremo libre, y es el que debe entonces absorber el giro unitario, como se muestra en el esquema. Nótese que, por el sentido del momento, la viga se desplaza hacia abajo. Esto indica que si se colocan cargas en el tramo $DE$ se desarrollarán momentos negativos en el apoyo $D$, lo cual es correcto. También puede verse, por la forma de la línea de influencia, que si se colocan cargas en el resto de la viga, no habrá momentos flexionantes en el mencionado apoyo. A partir del giro unitario en $D$, se pueden calcular las ordenadas de la línea de influencia en las secciones 7 y 8.

Finalmente, para obtener la línea de influencia de momento flexionante en la sección 4, se introduce en esta sección una articulación y se impone un giro unitario producido por momentos flexionantes positivos, como los mostrados en el esquema. El tramo $A'BC'$ tiene que pasar por el apoyo $B$ y permanecer recto, y el tramo $C'DE'$ tiene que pasar por el apoyo $D$ y también conservarse recto. La ordenada en $C'$ puede calcularse con la ecuación 10.8, y las demás, por simple proporción.

Como seguramente se ha podido ver en este ejemplo, la obtención de líneas de influencia por Müller-Breslau se reduce a trazados geométricos muy simples. Nada más hay que cuidar que sólo se elimine una restricción a la vez, la correspondiente a la línea de influencia buscada. Se debe tener en cuenta que sólo hay una manera correcta de eliminar la restricción correspondiente y conservar las demás. En la figura 10.7 se ilustran algunas líneas de influencia incorrectas, correspondientes a este ejemplo, en las que se elimina más de una restricción. En la de la figura 10.7-*a* se impuso el desplazamiento en el apoyo $D$, pero también un giro en el punto $D'$, que implicaría eliminar la restricción de momento flexionante en este punto. En la figura 10.7-*b* el desplazamiento total por cortante es unitario, pero los tramos $A'BC'$ y $C''DE'$ no son paralelos, lo cual también implicaría romper la restricción de momento flexionante. En la figura 10.7-*c* se impuso un giro unitario en el apoyo $D$, pero se desplazó este mismo apoyo, lo cual significa que se rompió la restricción de reacción. Y en la figura 10.7-*d* se impuso el giro unitario en $C'$, pero también se introdujo otro giro sobre el apoyo $D$.

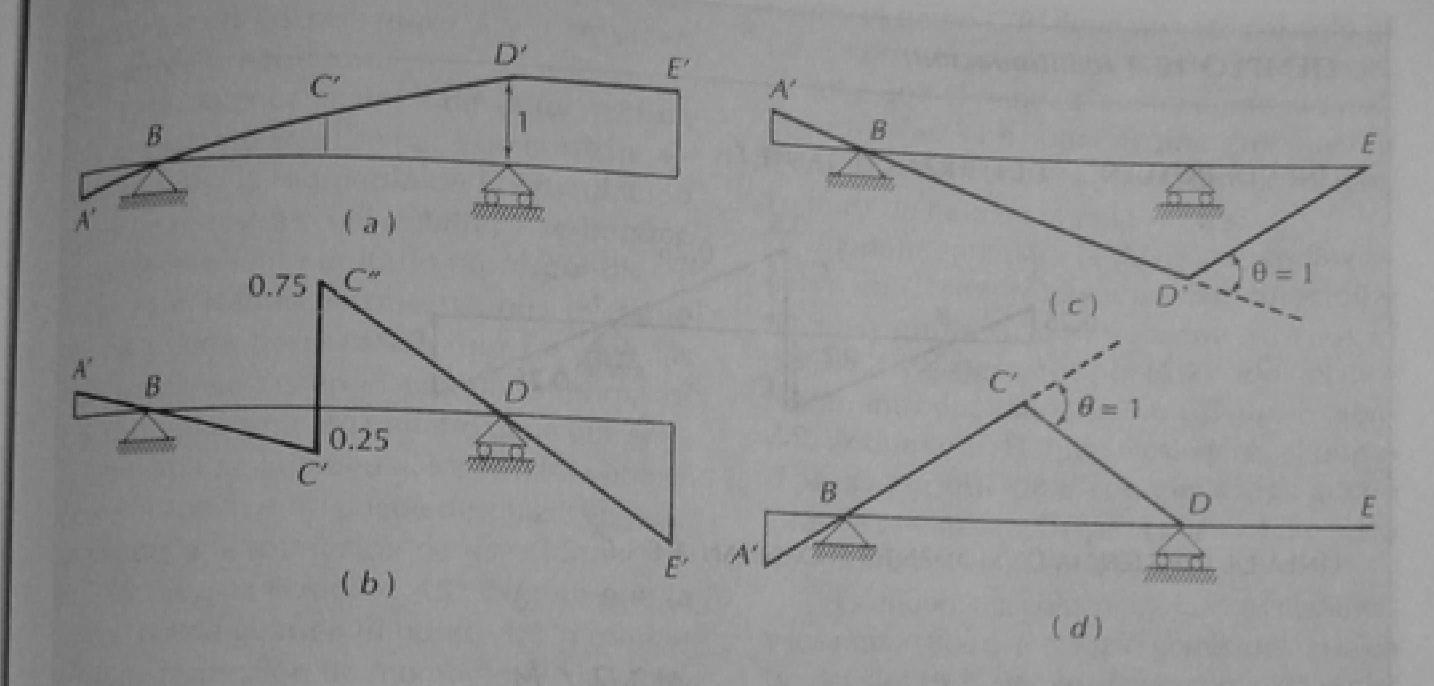
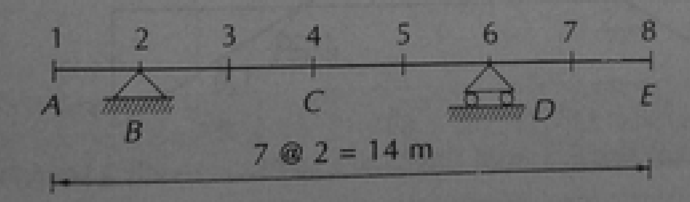


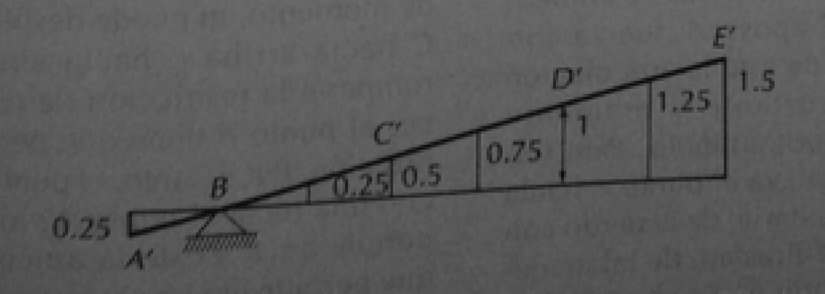

**Figura 10.7.** Líneas de influencia incorrectas

## EJEMPLO 10.4. CALCULAR LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN D, FUERZA CORTANTE EN LA SECCIÓN 4 Y MOMENTO FLEXIONANTE EN LAS SECCIONES 6 Y 4, USANDO EL PRINCIPIO DE MÜLLER-BRESLAU

DATOS:

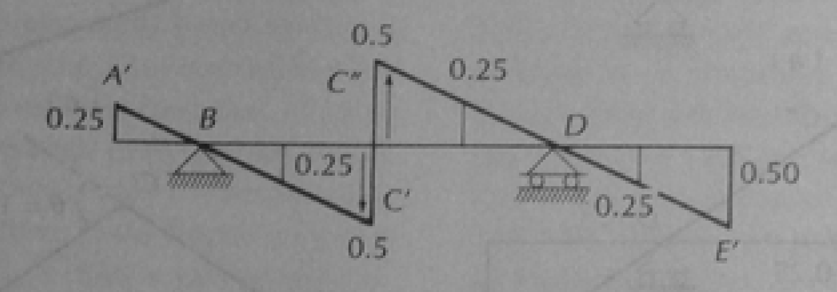



LÍNEA DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN *D*:



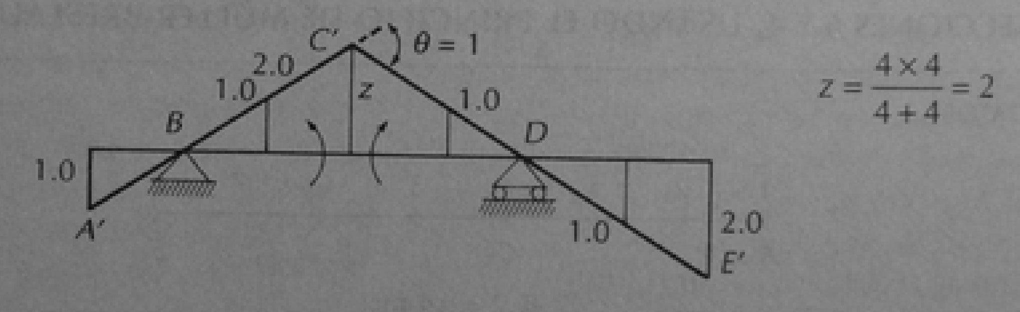
**EJEMPLO 10.4** ***(continuación)***

LÍNEA DE INFLUENCIA DE FUERZA CORTANTE EN 4:




LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO FLEXIONANTE EN 6:

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO FLEXIONANTE EN 4:




**Ejemplo 10.5** Se resuelve una viga con un empotramiento, un apoyo libre y una articulación interior, la cual hace que la viga sea isostática. Se piden las líneas de influencia de reacción en el apoyo *A*, fuerza cortante en el punto donde está la articulación interior, y fuerza cortante y momento flexionante en el empotramiento. Para trazar la primera, se desplaza el punto *A* hacia arriba una distancia unitaria, de acuerdo con el principio de Müller-Breslau, de tal manera que pasa a la posición *A′*. Se observa después que el tramo *BC* no puede tener ninguna deformación, ya que no puede girar en el punto *C*, porque se rompería la restricción de momento, ni puede desplazarse el punto *C* hacia arriba o hacia abajo, porque se rompería la restricción de reacción; entonces el punto *B* tiene que permanecer en su posición. Por lo tanto, el punto *B* debe unirse con una recta al punto *A′*, lo cual es válido porque en *B* existe la articulación interior que permite el giro sin romper la restricción de momento flexionante. La línea de

influencia de $R_A$ es entonces la *AA′BC*. Las ordenadas en las secciones 2 y 3 se sacan por simple proporción.

Para obtener la línea de influencia de fuerza cortante en *B*, se hace un corte inmediatamente a la izquierda de la articulación como se muestra en el detalle, y se impone el desplazamiento unitario correspondiente a fuerza cortante. Se observa que el tramo *BC* no puede desplazarse, por las mismas razones expuestas en el párrafo anterior, así que el desplazamiento unitario tiene que ser a la izquierda de la articulación y hacia abajo. Como el apoyo *A* no puede desplazarse, pues se rompería la restricción de reacción, el tramo *AB* toma la posición *AB′*. Nótese que la viga sí puede girar en el punto *A*, sin romper ninguna restricción de momento flexionante, porque se trata de un apoyo libre. La línea de influencia es entonces la *AB′BC*.

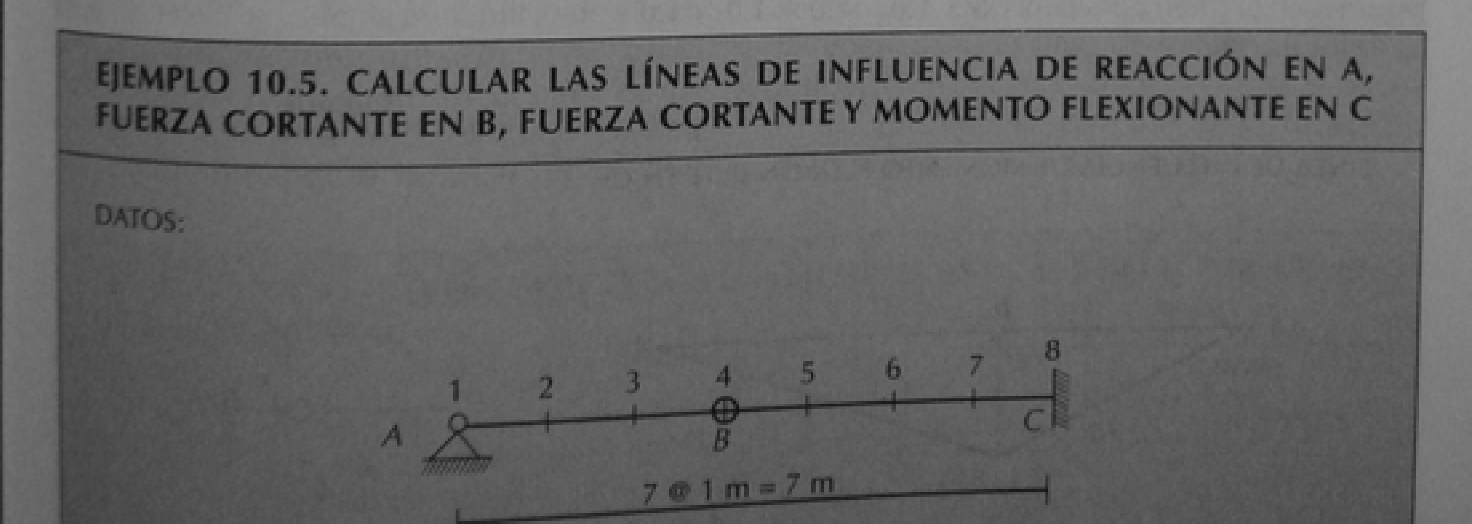
La línea de influencia de fuerza cortante en el empotramiento *C* se obtiene de manera semejante. Se hace un corte junto al empotramiento, como se muestra en el detalle, y se impone el desplazamiento unitario de cortante, el cual resulta hacia abajo. Como no puede haber giro en el empotramiento, pues se violaría la restricción de momento flexionante, el tramo *C′B′* tiene que ser paralelo al *CB*. Y como el apoyo *A* no puede desplazarse, se debe unir el punto *B′* con el punto *A*. En *B′* puede haber giro, por ser una articulación interior, y en *A* también, por ser un apoyo libre. La línea de influencia es la *AB′C′C*.

Finalmente para la de momento flexionante en *C*, se introduce una articulación y un giro unitario, como se muestra en el detalle. Obsérvese que por el sentido del momento introducido, el tramo *CB* gira en sentido antihorario. Debido a este giro, el punto *B* pasa a la posición *B′*, donde la viga puede girar de nuevo para llegar al punto *A*. La línea de influencia es la *AB′C*.

Es importante colocar las fuerzas cortantes y los momentos con el signo correcto, como en los detalles incluidos en el ejemplo, para poder determinar el signo de las ordenadas de las líneas de influencia. En caso de duda, conviene colocar una carga unitaria en algún punto y calcular la función con su signo. Por ejemplo, si se coloca una carga unitaria en el punto *B*, el momento flexionante en el empotramiento vale (1) (4) = 4, con sentido antihorario, o sea, negativo. Este valor coincide con el de la ordenada de la línea de influencia en *B*, con lo cual se tiene una comprobación.

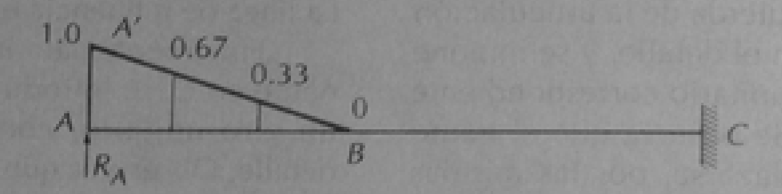
**EJEMPLO 10.5. CALCULAR LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN A, FUERZA CORTANTE EN B, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE EN C**

DATOS:

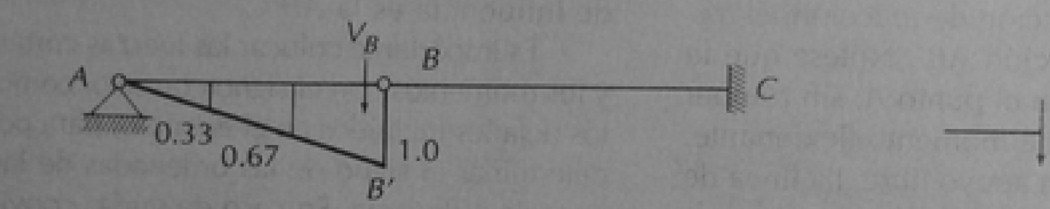


## EJEMPLO 10.5 *(continuación)*

LÍNEA DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN *A*:

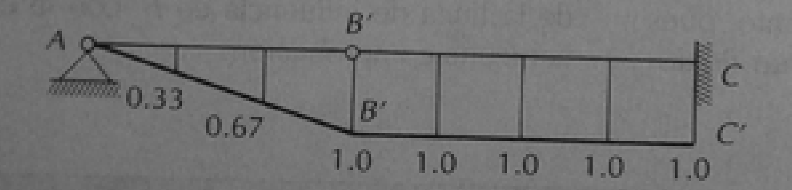



LÍNEA DE INFLUENCIA DE FUERZA CORTANTE EN *B*:




Detalle

LÍNEA DE INFLUENCIA DE FUERZA CORTANTE EN *C*:




Detalle

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO FLEXIONANTE EN *C*:

Detalle

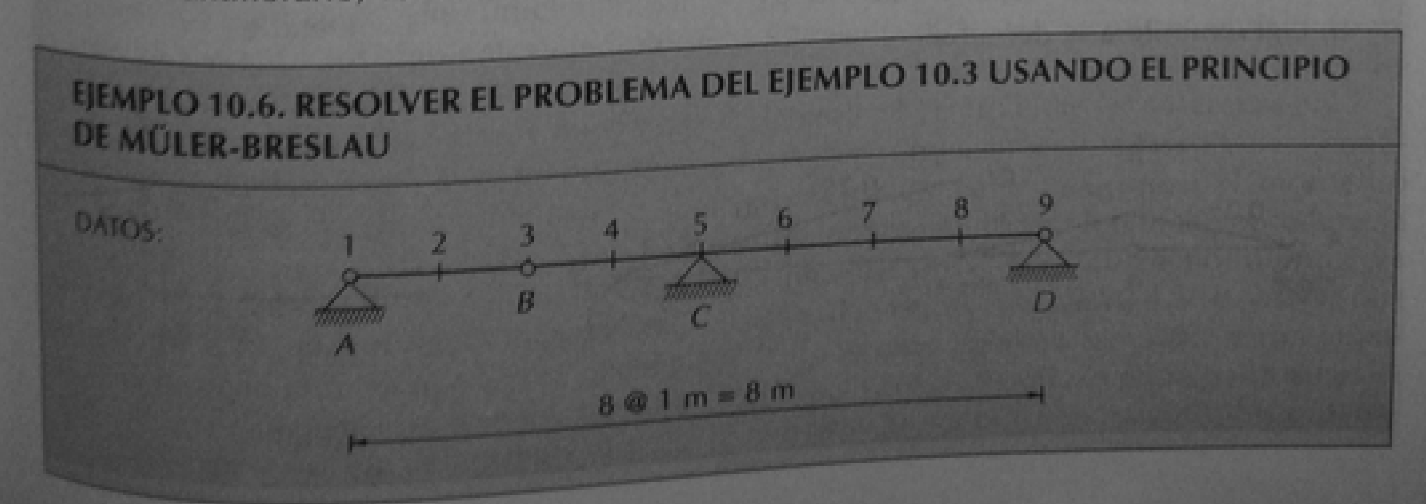
**Ejemplo 10.6** Este problema se había resuelto en el ejemplo 10.3 por el método directo. Ahora se resuelve utilizando el Principio de Müller-Breslau para que se pueda ver, por comparación, que resulta más sencillo.

Para la línea de influencia de reacción en *C*, se impone un desplazamiento unitario hacia arriba en este punto, de tal manera que pasa a la posición *C′*. La viga puede girar alrededor del apoyo *D*, por ser un apoyo libre, pero debe permanecer recta hasta la articulación interna *B*. En este punto, nuevamente puede girar, para alcanzar el punto *A*, donde también puede girar, pero no puede desplazarse. Nótese que en el punto *C′* la viga no puede girar, pues se rompería la restricción de momento flexionante. Teniendo las ordenadas de la línea de influencia en los puntos *D*, *C′* y *A*, las demás se obtienen por proporción.

La línea de influencia de momento flexionante en el apoyo *C* se obtiene introduciendo una articulación y los momentos que se muestran en el detalle correspondiente, de tal manera que se produzca un giro unitario. El tramo *CD* no puede girar ni desplazarse, pues se rompería alguna restricción de momento o de reacción. Por lo tanto, el giro tiene que desarrollarse en el tramo *CB*, que ahora tiene una articulación en cada extremo. El punto *B* pasa a la posición *B′*, donde la viga vuelve a girar para alcanzar el punto *A*. La ordenada de *B′* se calcula multiplicando el giro unitario por la longitud *CB*, y las otras ordenadas por proporción. Por el signo de los momentos aplicados en *C*, el tramo *CB* gira en sentido antihorario, lo cual indica que cualquier carga aplicada entre *A* y *C* producirá momentos negativos sobre el apoyo *C*.

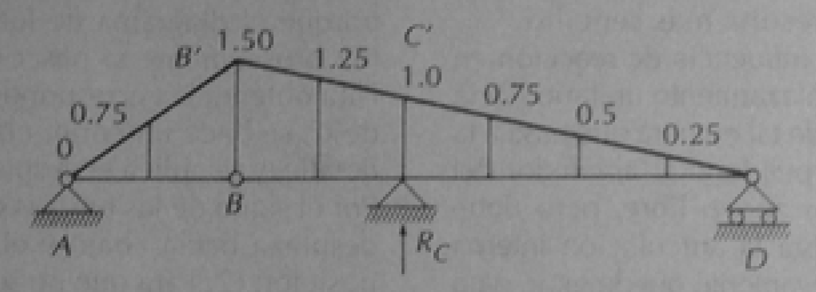
Se recordará que debe obtenerse una línea de influencia a cada lado del apoyo *C*, porque el diagrama de fuerza cortante cambia bruscamente al pasar de un lado a otro. Para obtener la correspondiente a la izquierda de *C*, se hace un corte, como se indica en el detalle, y se aplica el desplazamiento unitario. Por el signo de las fuerzas cortantes, la viga se desplaza hacia abajo y el punto *C* pasa a la posición *C′*. Para que no se viole a restricción de momento flexionante, el tramo *C′B′* debe ser paralelo al tramo *CD*. Si no fuese así, habría un giro sobre el apoyo *C*, y sólo puede haber desplazamiento de fuerza cortante. La viga puede girar en *B′*, por la articulación interna, para alcanzar el apoyo *A*. Con esto ya queda definida la línea de influencia.

La última línea de influencia de este ejemplo es la de fuerza cortante en *C*, pero ligeramente a la derecha. Ahora el corte se hace del otro lado, como se muestra en el detalle, y el desplazamiento resulta hacia arriba, por el signo de las fuerzas cortantes. El punto *C* pasa a la posición *C′*, y de aquí la línea de influencia se une al apoyo *D* que no puede desplazarse. Con esto ya queda definido el tramo *C′D*. A la izquierda de *C*, el tramo *CB′* tiene que ser paralelo al tramo *C′D*, para que no haya giro relativo entre los dos, pues se rompería la restricción de momento flexionante. Esta condición permite determinar la ordenada de la línea de influencia sobre la articulación *B*. Para terminar el trazo, el punto *B′* se une con el apoyo *A* que no puede desplazarse.

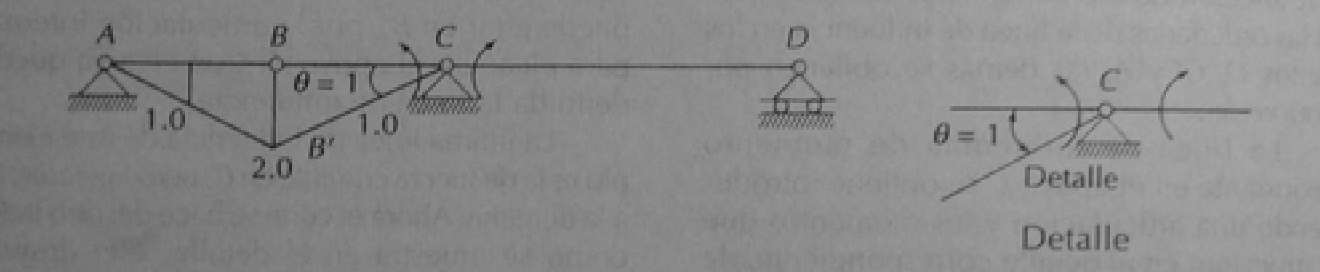


**EJEMPLO 10.6 *(continuación)***

LÍNEA DE INFLUENCIA DE REACCIÓN EN C:



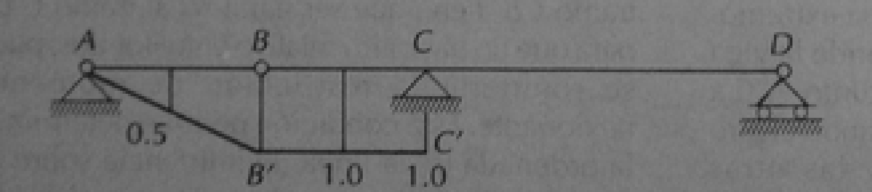

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO EN C:




Detalle

LÍNEA DE INFLUENCIA DE FUERZA CORTANTE EN C:

a) Ligeramente a la izquierda



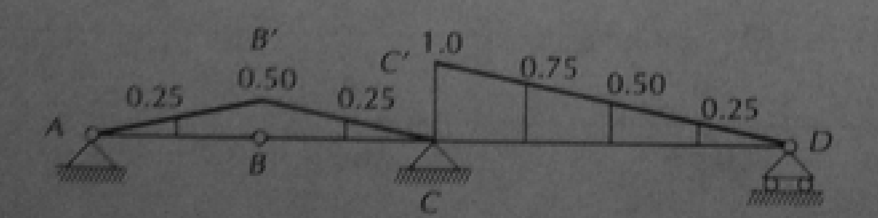

V

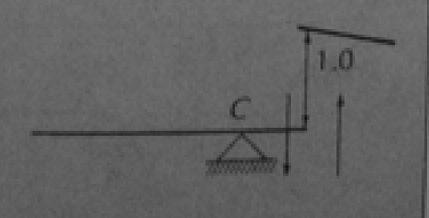
C

1

Detalle

b) Ligeramente a la derecha




Detalle

## 10.4 Aplicaciones de líneas de influencia en vigas

Como se mencionó al principio de este capítulo, las líneas de influencia se utilizan para calcular el valor máximo de una acción o de una reacción cuando un elemento estructural se encuentra sujeto a cargas móviles, que pueden ser vehículos en circulación, ferrocarriles, grúas viajeras, etc. En este texto no se incluye la determinación del valor de las cargas, el cual puede encontrarse en especificaciones reglamentarias o en manuales de los fabricantes de equipo, según el caso. Por ejemplo, el efecto de automóviles o camiones se representa por cargas concentradas cuyo valor depende del peso del vehículo, incluyendo la carga que llevan, y del número de ejes. Un reglamento muy usado para determinar estas cargas es el de la American Association of Highway Transportation Officials (AASHTO). Las cargas de ferrocarril se representan por cargas concentradas y distribuidas, como se especifican, por ejemplo, en el reglamento de la American Railroad Engineers Association (AREA). En el caso de grúas viajeras, las cargas de diseño dependerán de su capacidad de carga y de su peso propio. Es frecuente que tratándose de cargas móviles, sea necesario incluir un factor llamado de impacto, que incrementa el valor de las cargas estáticas más o menos entre 15 y 30 por ciento. Este factor no se aplica, desde luego, al peso propio de los elementos, sino únicamente a las cargas vivas. En los siguientes ejemplos se ilustra la utilización de las líneas de influencia para calcular los valores máximos de acciones y reacciones, suponiendo que las cargas han sido ya determinadas .

**Ejemplo 10.7** Sobre la viga utilizada en el ejemplo 10.4, circula un vehículo cuyo peso total, incluyendo la carga que lleva y el efecto del impacto, se puede representar por una fuerza de 2 ton en el eje delantero y otra de 3.5 ton en el eje trasero. Estas cargas corresponden, en forma aproximada, a un camión ligero de carga, lo mismo que la distancia entre ejes mostrada en el ejemplo. Se pide calcular el valor máximo de la reacción en el apoyo *D* y el momento flexionante máximo en las secciones 6 y 4, o sea, sobre el apoyo *D* y en el centro del claro entre apoyos.

Para calcular la reacción máxima en el apoyo *D*, se reproduce la línea de influencia obtenida en el ejemplo 10.4, con las ordenadas a cada metro. Observando esta línea de influencia, se detecta que $R_D$ alcanza valores mayores cuando las cargas se aplican en la parte derecha de la viga, ya que allí son más grandes las ordenadas. Entonces, la posición más desfavorable del vehículo se presenta cuando el eje delantero queda situado en la sección 8, o sea, en el extremo derecho. Ya que la distancia entre ejes es de 3 m, el eje trasero queda localizado, para esta posición, a la mitad entre las secciones 6 y 7. El valor correspondiente de $R_D$ puede entonces calcularse multiplicando la carga del eje delantero, 2 ton, por la ordenada de la línea de influencia en la sección 8, que es 1.50, la carga del eje trasero, 3.5 ton, por la ordenada del punto situado a la mitad entre las secciones 6 y 7, que es 1.125, y sumando los resultados. Se obtiene así un valor de $R_D$ de 6.94 ton. Nótese que para cualquier otra posición del vehículo, el valor de $R_D$ resulta menor. También queda claro que si el vehículo circula de derecha a izquierda, el valor máximo de $R_D$ resulta diferente, ya que se obtiene cuando el eje trasero está en la sección 8 y el delantero, al centro entre las secciones 6 y 7.

En forma semejante se calcula a continuación el valor máximo del momento flexionante en la sección 6. Se reproduce la línea de influencia correspondiente, ya calculada en el ejemplo 10.4, y se observa que el momento máximo también ocurre cuando las cargas se aplican en la parte derecha de la viga, ya que son mayores las ordena-

das en esta zona. Es necesario analizar dos posiciones del vehículo. En la primera se coloca entonces el eje delantero en la sección 8, y el trasero queda entre las secciones 6 y 7. Se multiplican las cargas por las ordenadas y se obtiene un momento de 11.5 ton-m, que es negativo porque las ordenadas también lo son. En la segunda se coloca el eje trasero en la sección 8 y resulta un momento de −14 ton-m, mayor que el correspondiente a la primera posición. Obsérvese que mientras el vehículo circula entre las secciones 1 y 6, no produce ningún momento en esta última sección.

En el caso del momento máximo en el centro del claro, la posición más desfavorable del vehículo resulta cuando la carga mayor está sobre la sección 4, en la cual es máxima la ordenada. Para esta posición, el eje delantero queda situado al centro entre las secciones 5 y 6, donde la ordenada de la línea de influencia es de 0.5. El momento obtenido para estas posiciones de las cargas es de 8.0 ton-m.

En los tres casos de este ejemplo, resultaba obvia la posición más desfavorable de las cargas. Pero no siempre es así. Cuando se tienen más ejes de cargas o vigas más complicadas, no se puede detectar a simple vista la posición crítica. Entonces, se deben colocar las cargas en varias posiciones, o sea, ir moviendo el vehículo a lo largo de la viga, calcular el valor de la reacción o de la acción para cada posición, y seleccionar el mayor de todos.

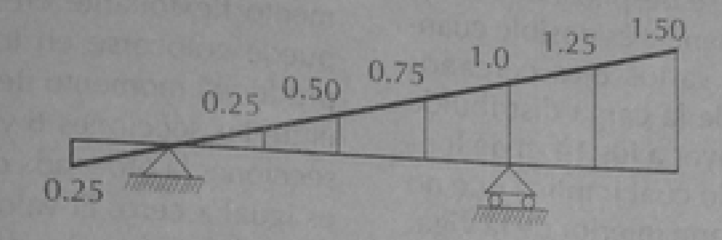
Los valores que se han calculado, corresponden a los producidos por el vehículo únicamente. Habrá que sumar los producidos por la carga muerta de la viga o por otras cargas que actúen sobre ella. Es importante notar que los momentos y reacciones calculados corresponden a todo el ancho del elemento estructural, el cual puede estar constituido por varias vigas paralelas. Por ejemplo, si es un puente el representado en los datos del problema, puede tener dos o más vigas paralelas y sobre ellas una losa que sirva de superficie de rodamiento para el vehículo. La reacción y los momentos calculados deberán entonces dividirse entre las varias vigas del puente. La forma de hacer esta división depende de varios factores, como el ancho del puente, la posición de las vigas y de los carriles de circulación, etc. Estos procedimientos se estudian en los cursos y en los textos de puentes.

**EJEMPLO 10.7. CALCULAR EL VALOR MÁXIMO DE LA REACCIÓN EN *D* Y EL MOMENTO FLEXIONANTE MÁXIMO EN LAS SECCIONES 6 Y 4 DE LA VIGA DEL EJEMPLO 10.4, SUPONIENDO QUE SOBRE LA VIGA CIRCULA UN VEHÍCULO CON LAS CARGAS DE RUEDA MOSTRADAS. SUPÓNGASE QUE EL VEHÍCULO CIRCULA DE IZQUIERDA A DERECHA ÚNICAMENTE**

DATOS:

**EJEMPLO 10.7. (continuación)**

REACCIÓN MÁXIMA EN $D$:

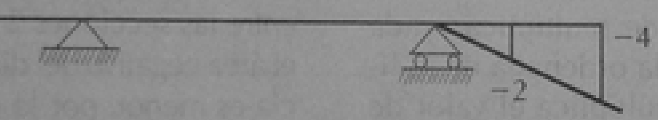



Línea de influencia de $R_D$

Si el eje delantero está en la sección 8:

$$R_D = 3.5 \times 1.125 + 2.0 \times 1.50 = 6.94 \text{ ton}$$

MOMENTO MÁXIMO EN LA SECCIÓN 6:




Línea de influencia de $M_6$

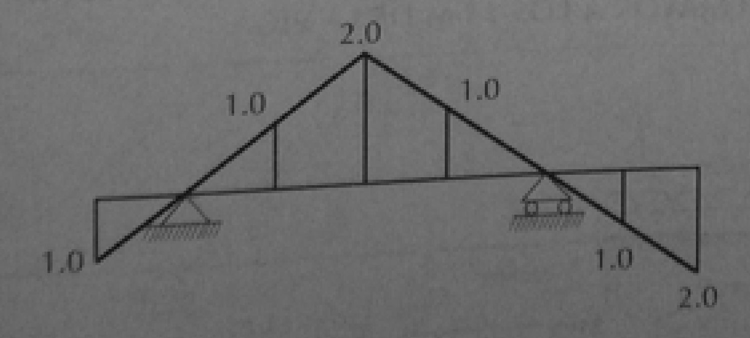
Si el eje delantero está en la sección 8:

$$M_6 = (-4)(2) + (-1)(3.5) = -11.5 \text{ ton-m}$$

Si el eje trasero está en la sección 8:

$$M_6 = (-4)(3.5) = -14.0 \text{ ton-m}$$

MOMENTO MÁXIMO EN LA SECCIÓN 4:




Si el eje trasero está en la sección 4:

$$M_4 = (3.5)(2.0) + (2.0)(0.5) = 8.0 \text{ ton-m}$$

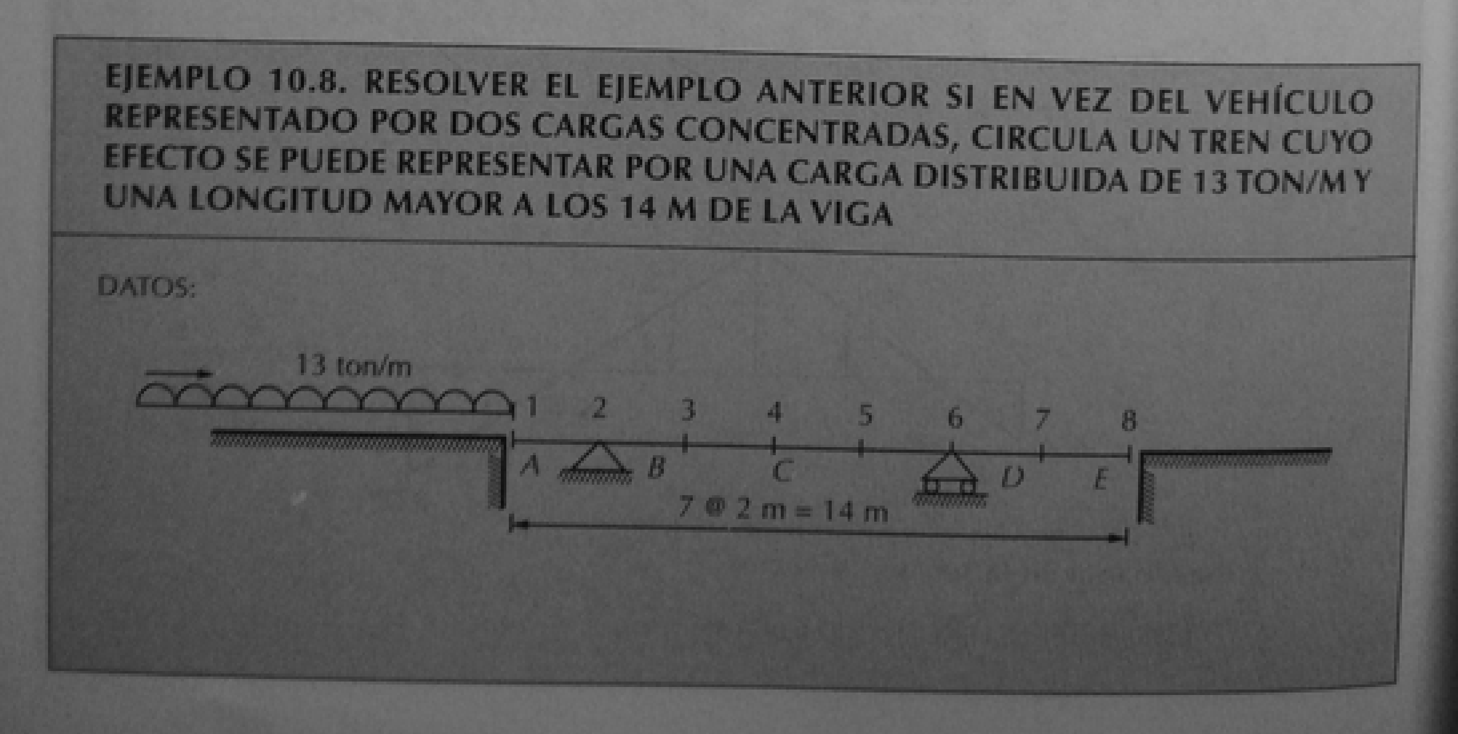
**Ejemplo 10.8** Se trata de la misma viga del ejemplo anterior, pero ahora circula sobre ella un tren cuyo efecto equivale al de una carga distribuida que se desplaza a lo largo de la viga. Esta equivalencia es posible cuando los carros tienen varios ejes cercanos entre sí. La longitud de la carga distribuida que se desplaza es mayor a los 14 m de longitud total de la viga, lo cual implica que no se puede cargar una parte interior de la viga, sino toda ella o un tramo que vaya de una sección cualquiera a uno de los dos extremos.

Para obtener el valor máximo de $R_D$ conviene colocar la carga distribuida entre las secciones 2 y 8, ya que como se puede ver en la línea de influencia, si se coloca también entre las secciones 1 y 2, la carga en este tramo produce valores negativos de la reacción. Como se trata ahora de una carga distribuida, en vez de multiplicar cada carga concentrada por la ordenada de la línea de influencia, se multiplica el valor de la carga distribuida por el área de diagrama formado por la viga original y la línea de influencia, entre las secciones consideradas. La base del triángulo así formado es de 12 m, longitud del tramo entre las secciones 2 y 8, y su altura es de 1.50. Multiplicando el área correspondiente por la carga distribuida de 13 ton/m, se obtiene el valor máximo de $R_D$ de 117 ton.

Para calcular el valor máximo del momento flexionante en la sección 6, la carga puede colocarse en toda la viga, pero sólo producirá momento flexionante la que quede entre las secciones 6 y 8, ya que en las otras secciones la ordenada de la línea de influencia es igual a cero. El valor del momento será el área del triángulo debajo del tramo 6-8, multiplicada por la carga distribuida.

El momento máximo en la sección 4 se obtiene si la carga se coloca entre las secciones 1 y 6. Recuérdese que no puede colocarse únicamente entre las secciones 2 y 6, con lo que se obtendría el valor máximo de $M_4$, ya que sólo se cargaría el tramo de ordenadas positivas. Entonces se puede colocar entre las secciones 1 y 6, o entre las secciones 2 y 8. En la primera opción, el área negativa del diagrama de línea de influencia es menor, por lo que el valor de $M_4$ resulta mayor que con la segunda opción.

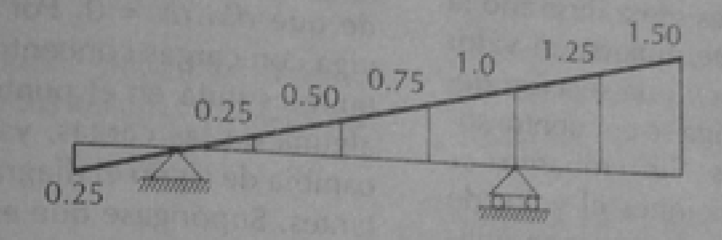
Los comentarios hechos al final del ejemplo anterior, respecto a otras cargas y a la distribución de las reacciones y acciones calculadas entre varias vigas del puente, son aplicables a este ejemplo.




**EJEMPLO 10.8. RESOLVER EL EJEMPLO ANTERIOR SI EN VEZ DEL VEHÍCULO REPRESENTADO POR DOS CARGAS CONCENTRADAS, CIRCULA UN TREN CUYO EFECTO SE PUEDE REPRESENTAR POR UNA CARGA DISTRIBUIDA DE 13 TON/M Y UNA LONGITUD MAYOR A LOS 14 M DE LA VIGA**

**EJEMPLO 10.8. *(continuación)***

REACCIÓN MÁXIMA EN *D*

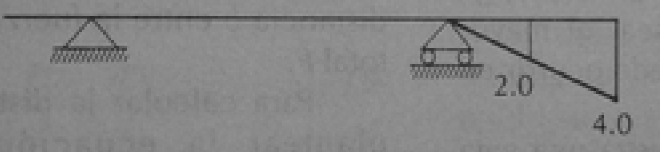



Línea de influencia de $R_D$

Si la carga se coloca entre las secciones 2 y 8:

$$R_D = \frac{1}{2}(12)(1.50)(13) = 117 \text{ ton}$$

MOMENTO MÁXIMO EN LA SECCIÓN 6

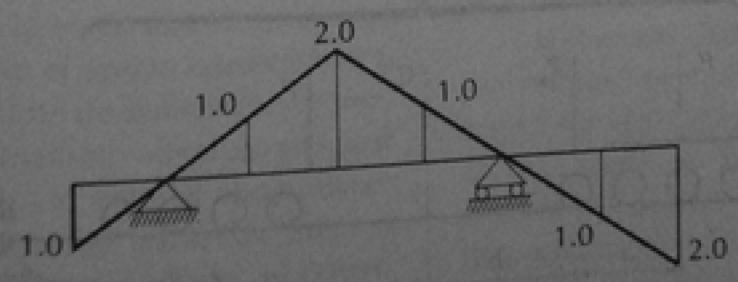



Línea de influencia de $M_6$

Si la carga se coloca entre las secciones 6 y 8:

$$M_6 = \frac{1}{2}(4)(-4)(13) = -104 \text{ ton-m}$$

MOMENTO MÁXIMO EN LA SECCIÓN 4




Línea de influencia de $M_4$

Si la carga se coloca entre las secciones 1 y 6:

$$M_4 = \left[\frac{1}{2}(8)(2.0) - \frac{1}{2}(2)(1)\right]13 = 91 \text{ ton-m}$$

## 10.5 Momento flexionante máximo absoluto

En los ejemplos anteriores se ha ilustrado la forma en que puede determinarse el valor máximo de una acción, *en una sección determinada*, cuando una viga se encuentra sometida a cargas móviles. Sin embargo, es posible que en otras secciones el valor de esa acción sea mayor que el correspondiente a la sección determinada, inclusive si esta última es el centro del claro. Por ejemplo, en la última parte del ejemplo 10.7 se calculó el momento máximo positivo en la sección 4 de la viga. Pero es posible que en alguna otra sección de la viga ocurra un momento positivo aun mayor que el de 8.0 ton-m que es el máximo en la sección 4. En lo que sigue se presenta un método para calcular el momento máximo absoluto en una viga sujeta a cargas móviles, o sea, el mayor momento flexionante que puede ocurrir en *cualquier sección* de la viga.

En la figura 10.8 se muestra una viga libremente apoyada sobre la que se desplaza un tren de cargas concentradas. Se trata de determinar la posición del tren de cargas que produce el momento máximo absoluto. Se recordará que el momento flexionante máximo se presenta donde la fuerza cortante es nula, ya que $dM/dx = V$, y el valor máximo de $M$ se presenta donde la pendiente del diagrama de momentos es nula, o sea, donde que $dM/dx = 0$. Por otra parte, en una viga con cargas concentradas, la fuerza cortante es nula en el punto de aplicación de alguna de las cargas, ya que ahí es donde cambia de signo el diagrama de fuerzas cortantes. Supóngase que esa carga es la indicada con la fuerza $P_x$ en la figura 10.8, y que su posición, que es la que se trata de determinar, queda representada por la distancia $x$ desde el apoyo izquierdo. La resultante de las fuerzas a la izquierda de $P_x$ se ha representado con $P_i$ y la resultante de todas las fuerzas, incluyendo $P_x$, con $P$. En la misma figura se ha señalado también el centro del claro de la viga, la distancia $a$ entre la fuerza $P_x$ y la resultante $P_i$, y la distancia $b$ entre la fuerza $P_x$ y la resultante total $P$.

Para calcular la distancia $x$, se puede plantear la ecuación de momentos flexionantes en el punto de aplicación de la fuerza $P_x$, en función de $x$, derivar con respecto a $x$, igualar a cero la derivada y despejar el valor de $x$. Se obtienen los siguientes resultados.

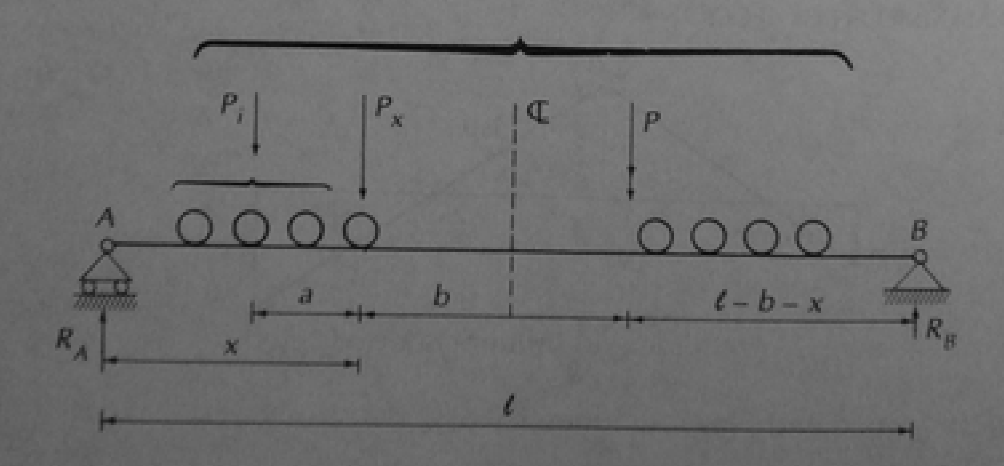



**Figura 10.8.** Posición de las cargas que producen el momento flexionante máximo absoluto

El momento en el punto de aplicación de $P_x$ es:

$$M_x = R_A x - P_i a \qquad (10.16)$$

El valor de $R_A$ puede encontrarse tomando suma de momentos respecto al apoyo $B$ e igualando a cero:

$$R_A = \frac{P(\ell - b - x)}{\ell} \qquad (10.17)$$

Sustituyendo en la ecuación 10.16:

$$M_x = \frac{P(\ell - b - x)x}{\ell} - P_i a \qquad (10.18)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{dM}{dx} = P - \frac{Pb}{\ell} - \frac{2Px}{\ell} = 0 \qquad (10.19)$$

Despejando $x$:

$$2x = \ell - b \qquad (10.20)$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$x = \ell - b - x \qquad (10.21)$$

Lo que indica la ecuación 10.21 es que la distancia, $x$, entre el apoyo izquierdo $A$ y la carga en cuyo punto de aplicación se produce el momento máximo absoluto es igual a la distancia, $\ell - b - x$, entre el apoyo derecho $B$ y la resultante de todas las fuerzas aplicadas, $P$. Como consecuencia, el centro del claro de la viga queda ubicado a la mitad de la distancia, $b$, entre la fuerza $P_x$ y la resultante $P$. Entonces, para determinar la posición del tren de cargas que produce el momento máximo absoluto, se deben colocar las cargas de tal manera que la resultante de todas las cargas aplicadas y la primera carga a la izquierda de la resultante queden simétricas respecto al centro del claro. Una vez determinada esta posición, se calcula el momento flexionante en el punto de aplicación de la primera carga a la izquierda de la resultante.

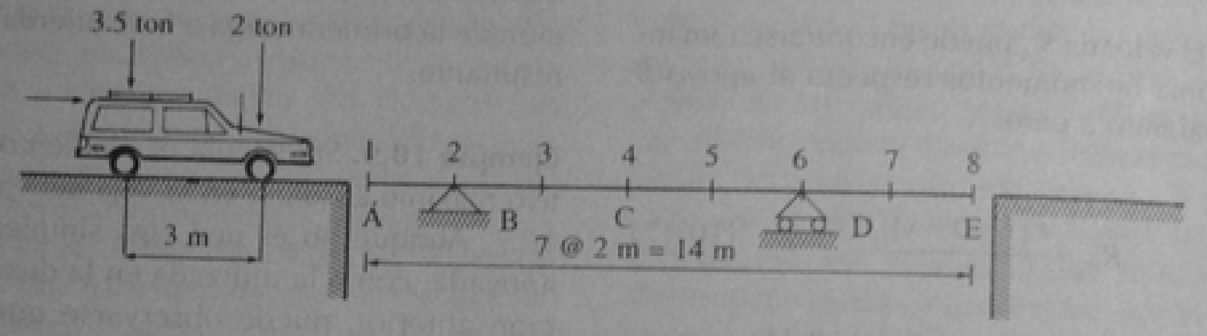
**Ejemplo 10.9.** Se calcula el momento positivo máximo absoluto en la viga del ejemplo 10.7. Aunque no es una viga simplemente apoyada, como la utilizada en la demostración anterior, puede observarse que para momento positivo se comporta como tal, ya que los volados de los extremos no causan ningún efecto al quedar las dos cargas dentro del claro interior.

Primero se calcula la posición de la resultante de las dos cargas del vehículo. Esto se ha hecho tomando momentos respecto a la carga de la izquierda. Se obtiene que la resultante queda a 1.09 m de la carga izquierda. De acuerdo con lo demostrado anteriormente, el centro del claro debe quedar equidistante de la resultante y de la carga a la izquierda de la misma, que en este caso es una sola carga. Entonces, si entre la resultante y la carga izquierda hay una distancia de 1.09 m, el centro del claro debe quedar a 0.545 m de cada una, como se muestra en el croquis.

Habiendo determinado la posición de las cargas, se calcula el momento en el punto de aplicación de la carga situada a la izquierda de la resultante, que es el momento máximo absoluto. La única fuerza que produce momento flexionante es la reacción en el apoyo $B$. Resulta un momento de 8.20 ton-m. En el ejemplo 10.7 se había calculado que el momento máximo en el centro del claro era de 8.0 ton-m, que como se puede ver es un poco menor que el máximo absoluto.

## EJEMPLO 10.9. CALCULAR EL MOMENTO POSITIVO MÁXIMO ABSOLUTO EN LA VIGA DEL EJEMPLO 10.7

DATOS:




POSICIÓN DE LA RESULTANTE

3.5 ton
2.0 ton
$P = 5.5$ ton
$r$
3 m

$$r = \frac{2.0 \times 3}{5.5} = 1.09 \text{ m}$$

POSICIÓN DE LAS CARGAS

C
3.5
5.5
2.0
A
B
D
E
0.545
0.545
1.91
2 m
8 m
4 m

CÁLCULO DEL MOMENTO MÁXIMO ABSOLUTO

$$R_B = \frac{5.5(4.0 - 0.545)}{8} = 2.375 \text{ ton}$$

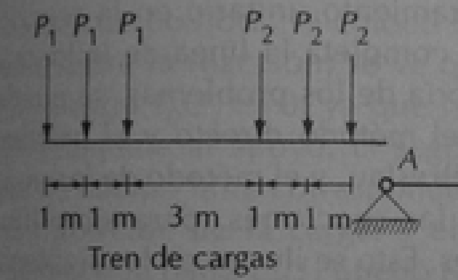
$$M_{max} = 2.375(4 - 0.545) = 8.20 \text{ ton-m}$$

**Ejemplo 10.10.** El tren de cargas es más complicado que el del ejemplo anterior. Siguiendo el mismo procedimiento, se encuentra que la resultante de las seis cargas aplicadas se ubica a una distancia de 4 m de la primera carga a la izquierda. Entonces, entre la resultante y su carga vecina a la izquierda queda una distancia de 2 m. Equidistante entre estas dos cargas debe quedar el centro del claro, resultando una distancia de 1 m a cada carga.

Ya colocadas las cargas de acuerdo con el cálculo anterior, se calcula el momento flexionante en el punto de aplicación de la carga de 6 ton ubicada a la izquierda de la resultante. Producen momento la reacción en el apoyo *A* y las dos primeras cargas de 6 ton. Resulta un momento máximo absoluto de 164.25 ton-m.

## EJEMPLO 10.10. CALCULAR EL MOMENTO MÁXIMO ABSOLUTO DE LA VIGA MOSTRADA

DATOS:



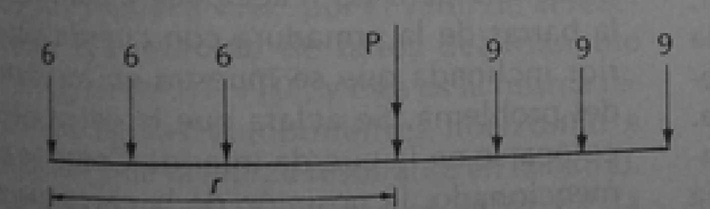

A B

20 m

$P_1 = 6$ Ton

$P_2 = 9$ Ton

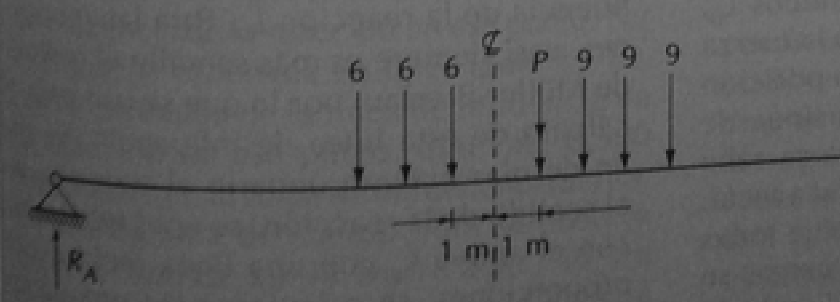
POSICIÓN DE LA RESULTANTE




$$P = 18 + 27 = 45 \text{ ton}$$

$$r = \frac{6(1+2)+9(5+6+7)}{45} = 4 \text{ m}$$

POSICIÓN DE LAS CARGAS




$R_B$

$$R_A = \frac{45\times 9}{20} = 20.25 \text{ ton}$$

CÁLCULO DEL MOMENTO MÁXIMO ABSOLUTO

$$M_{max} = 20.25\times 9 - 6\times 2 - 6\times 1 = 164.25 \text{ ton-m}$$

## 10.6 Líneas de influencia de armaduras isostáticas

Cuando se trata de armaduras, las líneas de influencia son solamente las correspondientes a reacciones y a fuerzas axiales, ya que éstas son las únicas acciones que actúan en dichas estructuras; no hay momentos flexionantes o fuerzas cortantes. Estas líneas de influencia de armaduras pueden calcularse por los mismos métodos ya expuestos para el caso de vigas: el método directo y el basado en el principio de Müller-Breslau. La demostración presentada en la sección 10.2 que establece que las líneas de influencia de estructuras isostáticas son líneas rectas, es válida también para armaduras, lo que simplifica el cálculo.

Si se aplica el método directo, el procedimiento consiste en colocar cargas unitarias en los nudos de la armadura y calcular la fuerza producida por esta carga en la barra para la cual se desea obtener la línea de influencia, o el valor de la reacción. Es necesario especificar sobre qué cuerda de la armadura se desplazará la carga móvil; las líneas de influencia pueden variar si la carga se aplica a lo largo de la cuerda inferior o de la cuerda superior de una armadura. Por ejemplo, si se desea la línea de influencia de la fuerza en la barra $U_2$-$L_3$ de la armadura de la figura 10.9, para cargas aplicadas en la cuerda inferior, se pueden ir colocando fuerzas unitarias en los nudos $L_0$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ , $L_5$ y $L_6$, y calculando la fuerza en la barra mencionada para cada posición de la carga. El resultado será la línea de influencia. Sin embargo, como ya se sabe que la línea de influencia es una línea recta, no es necesario hacer el cálculo para todas las posiciones de la carga. Si las cargas se colocan en las reacciones, nudos $L_0$ y $L_6$, la fuerza en la barra será 0. Bastará entonces con colocarla en los nudos $L_2$ y $L_3$, y unir los valores obtenidos con un valor de 0 en los apoyos.

Cuando sólo se pide la línea de influencia en una barra, el método de las secciones para la resolución de armaduras resulta más práctico que el de los nudos. Éste sería el caso de la línea de influencia de la barra $U_2$-$L_3$ comentado en el párrafo anterior. Si se piden las líneas de influencia de varias barras o de todas ellas, resulta conveniente utilizar las ya calculadas para obtener las demás. En muchos casos, las líneas de influencia de las reacciones facilitan el cálculo de las correspondientes a las barras. El principio de Müller-Breslau resulta muy conveniente para calcular las líneas de influencia de reacciones, ya que basta con aplicar un desplazamiento unitario en la reacción para tener completa la línea de influencia. En la mayoría de los problemas, se pueden combinar el método directo y el principio de Müller-Breslau, y el método de los nudos con el de las secciones, para simplificar los cálculos. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 10.11** Se pide calcular las líneas de influencia para las reacciones y para todas la barras de la armadura con cuerda superior inclinada que se muestra en los datos del problema. Se aclara que la carga debe colocarse en la cuerda inferior. Como se ha mencionado, la posición de la carga afecta los resultados.

Se empezó por calcular la línea de influencia de la reacción $L_0$. Para las reacciones, casi siempre es más sencillo el método de Müller-Breslau, por lo que se usó para el cálculo de esta línea de influencia. Se dio un desplazamiento unitario al apoyo $L_0$ en el sentido de la reacción, se unió este punto con el apoyo $L_6$ con una línea recta y, por proporciones, se calcularon las ordenadas correspondientes a los nudos $L_1$ a $L_5$. Por ejemplo, la ordenada en el nudo $L_2$ es 2/3.

Después se pasó al cálculo de la línea de influencia de la barra $L_0U_1$. Aquí se usó el método de los nudos y se aprovechó la

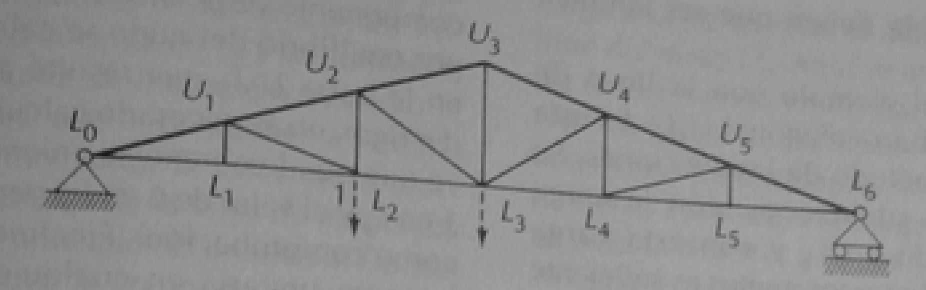



**Figura 10.9.** Colocación de cargas unitarias para determinar la línea de influencia en la barra $U_2L_3$

línea de influencia de la reacción en $L_0$ que ya se había calculado. En el primer diagrama de cuerpo libre, se colocó la carga unitaria sobre la reacción; se ve que la fuerza en la barra $L_0U_1$ es 0, ya que la carga pasa directamente al apoyo. El segundo diagrama de cuerpo libre corresponde a cualquier otra posición de la carga, y el valor de la fuerza en la barra $L_0U_1$ quedó expresado en términos de la reacción en $L_0$, ya que el valor de esta reacción depende de la posición de la carga unitaria. Resultó que la fuerza en la barra es igual a $\sqrt{10}$ por el valor de la reacción. (La relación de lados del triángulo $L_0L_1U_1$ es de 3,1, $\sqrt{10}$, y ésta es la misma relación de las componentes horizontal y vertical y de la fuerza resultante en la barra). Entonces, para calcular el valor de la ordenada en cualquier punto basta multiplicar $\sqrt{10}$ por la ordenada de la línea de influencia de la reacción en ese punto. Por ejemplo, la ordenada en $L_3$ es igual a $\sqrt{10}$ por la ordenada de la línea de influencia de la reacción en ese punto, que vale 0.500 según se ve en la línea de influencia anterior. En el diagrama de cuerpo libre se observa que la fuerza en la barra $L_0U_1$ es de compresión. Por eso la línea de influencia se ha dibujado hacia abajo.

Se continuó con la línea de influencia de la barra $L_0L_1$. Esta barra aparece también en los diagramas de cuerpo libre anteriores. Si la carga unitaria está en $L_0$, la fuerza en la barra $L_0L_1$ es nula, y si la carga está en cualquier otro nodo, vale $3R_{L0}$. Entonces, la ordenada en $L_0$ es 0, y la ordenada en cualquier otro nodo es tres veces la ordenada de la línea de influencia de la reacción en ese nodo. Por ejemplo, en el nodo $L_4$ es igual a 3 multiplicado por 0.333.La fuerza es de tensión, o sea, positiva.

Para obtener la línea de influencia de la barra $L_1U_1$ se trazaron los diagramas de cuerpo libre del nudo $L_1$ correspondientes a la carga unitaria aplicada en el mismo nudo y en cualquier otro nudo. Si la carga está en el mismo nudo, en la barra tiene que haber una fuerza igual de tensión para que se cumpla la condición de equilibrio $\Sigma F_y = 0$. Si está en cualquier otro nudo, por la misma condición, la fuerza es nula. Por lo tanto, la ordenada es igual a 1, en el nudo $L_1$ y es igual a 0 en todos los otros nudos.

La línea de influencia de la barra $L_1L_2$ puede obtenerse de los diagramas de cuerpo libre de la barra anterior. Se ve en estos diagramas que, para cualquier posición de la carga unitaria, la fuerza en la barra es tres veces la reacción en $L_0$, excepto si la carga está aplicada sobre la reacción, ya que en este caso no produce fuerzas en ninguna barra y la ordenada es 0. También puede obtenerse esta línea de influencia, observando en los diagramas de cuerpo libre de la barra $L_1U_1$ que la fuerza en las barras $L_0L_1$ y $L_1L_2$ son siempre iguales, por lo que sus lí-

neas de influencia tienen que ser también iguales.

Continúa el ejemplo con la línea de influencia de la barra diagonal $U_1L_2$. En este caso se usó el método de las secciones. Se resolvieron dos situaciones: con la carga unitaria aplicada en $L_1$ y con esta carga aplicada en $L_2$. Con estos puntos es suficiente para trazar toda la línea de influencia, pues se sabe que en las reacciones la ordenada es 0 y que la línea de influencia consta de tramos rectos. En los diagramas de cuerpo libre, la fuerza en la barra $U_1L_2$ se descompuso en sus componentes vertical, $V$, y horizontal, $H$. Con esto se facilitan los cálculos, porque la fuerza $H$ no produce momentos respecto al punto respecto al cual se planteó la ecuación de suma de momentos igual a 0. En el primer diagrama se obtuvo que la fuerza en la barra es de $0.50\sqrt{10}$ , y en el segundo, que es igual a 0. Por lo tanto, la ordenada de la línea de influencia es igual al valor mencionado en el punto $L_1$ y es nula en todos los otros nudos, ya que si es 0 en $L_2$ y 0 en el apoyo $L_6$, tiene que ser también igual a 0 en los nudos intermedios. Obsérvese en el primer diagrama de cuerpo libre, que la fuerza en la barra es de compresión, o sea, negativa.

Después se obtuvo la línea de influencia de la barra vertical $U_2L_2$, trazando diagramas de cuerpo libre del nudo $L_2$ y aprovechando la circunstancia de que ya se habían calculado las líneas de influencia de las barras $L_1L_2$, y $U_1L_2$ , que son dos de las que concurren en dicho nudo. Se colocó primero la carga unitaria en el nudo $L_2$ . En la línea de influencia de $L_1L_2$ se puede ver que si la carga está en $L_2$, la fuerza en la barra vale 2.0, y en la línea de influencia de $U_1L_2$, que vale 0. Conocidas estas fuerzas, se determinó, por equilibrio de fuerzas verticales en el nudo, que la fuerza en $U_2L_2$ vale 1. A continuación, se colocó la carga en $L_1$ y se obtuvo la fuerza correspondiente en la barra $U_1L_2$ en su línea de influencia, que es de $0.50\sqrt{10}$ y de compresión; su componente vertical vale 0.50. Nuevamente por equilibrio del nudo se calculó la fuerza en la barra $U_2L_2$ que resultó ahora de 0.50 (En rigor, no es necesario calcular este punto, ya que puede obtenerse uniendo el valor de 1 en $L_2$ y el valor de 0 en $L_0$, pero se ha hecho como comprobación). Finalmente se colocó la carga unitaria en cualquier otro punto. Como la fuerza en la barra $U_1L_2$ es 0 para cualquiera de estas posiciones, y su componente vertical también tiene que serlo, la fuerza en $U_2L_2$ es igual a 0, lo mismo que las ordenadas de la línea de influencia.

Se ha calculado a continuación la línea de influencia de la barra $L_2L_3$. En este caso se trazó el diagrama de cuerpo libre del nudo $L_2$, para la carga unitaria en el propio nudo y en el $L_3$. En ambos casos, ya se conocían las fuerzas $L_2L_1$, $L_2U_1$ y $L_2U_2$, a partir de las líneas de influencia calculadas anteriormente, y por equilibrio del nudo se calculó la fuerza buscada $L_2L_3$. Por ejemplo, si la carga unitaria está en $L_2$, la fuerza $L_2L_1$ vale 2.0, de la línea de influencia $L_2L_1$, la $L_2U_1$ vale 0, de la línea de influencia $U_1L_2$, y la $L_2U_2$ vale 1 de la línea de influencia $U_2L_2$. Por equilibrio de fuerzas horizontales, la fuerza $L_2L_3$ vale 2.0.

Para la barra $U_1U_2$ se usó el método de las secciones, colocando la carga unitaria en $L_2$ y tomando momentos respecto a $L_2$, ya que de esta manera la componente vertical no produce momento. Se determina el valor de la componente horizontal de la fuerza $U_1U_2$ y por la relación de lados, el de esta fuerza. Como el signo es negativo, la fuerza tiene sentido opuesto al que se supuso en el croquis; por lo tanto, es de compresión. Teniendo el valor de la ordenada de la línea de influencia en $L_2$, se une este punto con los dos apoyos, ya que en éstos la ordenada es igual a 0, y ya se tiene la línea de influencia completa. Obsérvese que el valor de la fuerza en esta barra no puede ser 0 si la carga unitaria se coloca en nudos interiores.

La línea de influencia de la barra $U_2L_3$ se calculó por el método de las secciones. Primero se colocó la carga en $L_2$ y se planteó la ecuación de suma de momentos respecto al punto $U_3$ , para que la componente vertical no produjese momento. El valor de la reacción en $L_0$ se obtuvo de la línea de influencia determinada al principio del problema. De esta manera se obtuvo la componente horizontal de la fuerza $U_2L_3$ y después, por relación de lados, la fuerza total. En este caso, la distancia de $U_2$ a $L_3$ es igual a $\sqrt{13}$. A continuación, se colocó la carga en $L_3$ , se repitió el procedimiento descrito y se obtuvo que la fuerza $U_2L_3$ era nula. Entonces uniendo el valor en $L_2$ con un valor de 0 en el apoyo $L_0$ ya se tiene la línea de influencia completa, ya que entre $L_3$ y el apoyo $L_6$ tiene que conservarse el valor de 0.

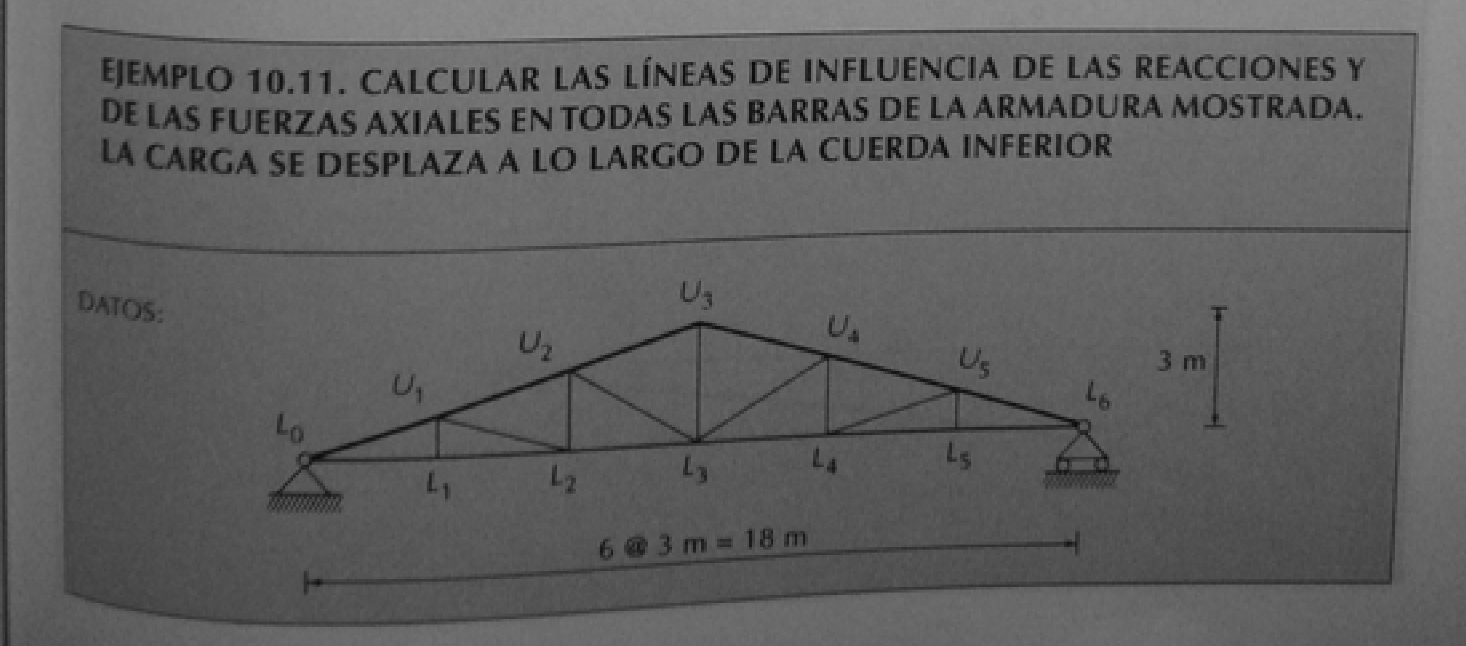
Para calcular la línea de influencia de la barra $U_3L_3$ se colocó la carga unitaria en $L_3$. La fuerza $U_2L_3$ es nula para esta posición de la carga unitaria, según se explicó en el párrafo anterior. Por simetría también es nula en la barra $U_4L_3$ . Entonces la fuerza en $U_3L_3$ vale 1, según se desprende del diagrama de cuerpo libre del nudo $L_3$. Basta con unir este valor con valores nulos en los apoyos para tener la línea de influencia completa.

Finalmente se calculó la línea de influencia de la barra $U_2U_3$. Primero se colocó la carga en $L_2$ y se trazó el diagrama de cuerpo libre del nudo $U_2$. Aquí se utilizaron los valores de las fuerzas en las barras $U_1U_2$, $U_2L_2$ y $U_2L_3$ tomadas de las líneas de influencia ya obtenidas de estas barras. Se repitió el procedimiento colocando la carga en $L_3$, y aprovechando la simetría y la línea de influencia ya calculada de la barra $U_3L_3$. En rigor, con este valor hubiese sido suficiente, pero se calculó también el anterior para verificar que la línea de influencia variaba linealmente hasta los apoyos.

Las líneas de influencia de las barras de la mitad izquierda de la armadura se pueden obtener por simetría. Por ejemplo, la ordenada de la línea de influencia de la barra $L_4U_5$ en el punto $L_1$ será igual a la de la línea de influencia de la barra $U_1L_2$ en el punto $L_5$. Por esta razón no se han trazado en el ejemplo.

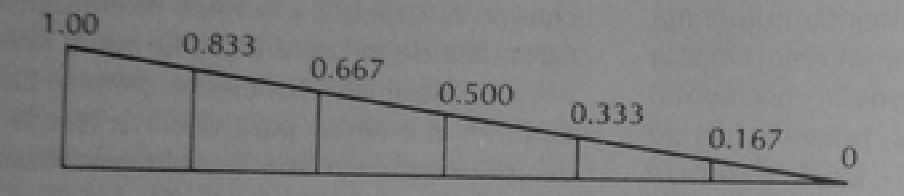
Se puede observar en este ejemplo que se han usado distintos procedimientos, según la línea de influencia que se deseaba determinar. En algunos casos se usó el método de las secciones, en otros el de los nudos, y siempre que se pudo, se aprovecharon líneas de influencia ya calculadas con anterioridad. Esta es la manera usual de proceder. Conviene analizar cuál es el procedimiento más expedito en cada caso.

**EJEMPLO 10.11. CALCULAR LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES Y DE LAS FUERZAS AXIALES EN TODAS LAS BARRAS DE LA ARMADURA MOSTRADA. LA CARGA SE DESPLAZA A LO LARGO DE LA CUERDA INFERIOR**



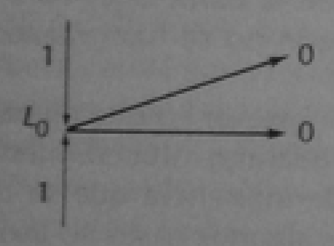
**EJEMPLO 10.11** ***(continuación)***

REACCIÓN EN $L_0$



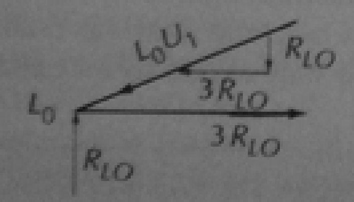

BARRA $L_0U_1$

Por el método de los nudos



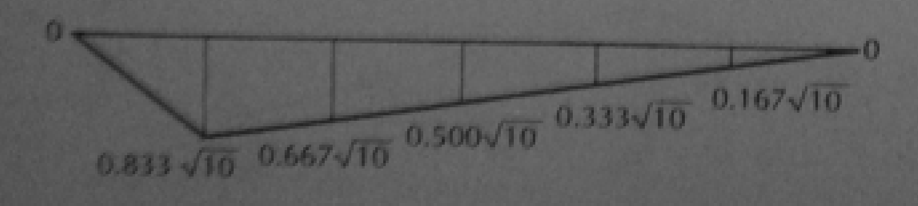

Carga unitaria en $L_0$

$L_0U_1 = 0$



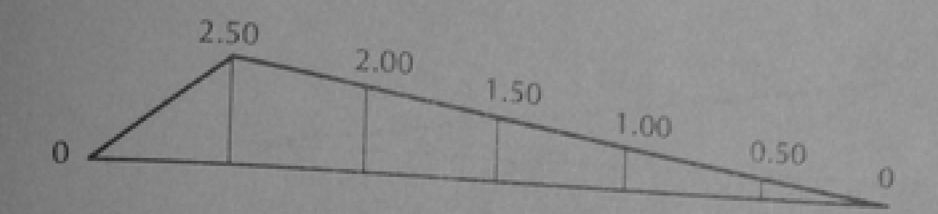

Carga unitaria en cualquier otro nodo

$L_0U_1 = \sqrt{10}\,R_{L0}$



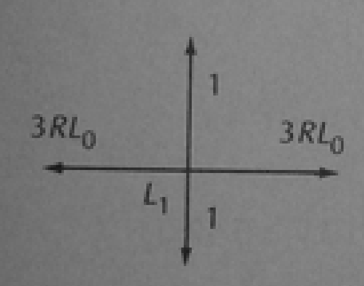
**EJEMPLO 10.11 *(continuación)***

BARRA $L_0 L_1$

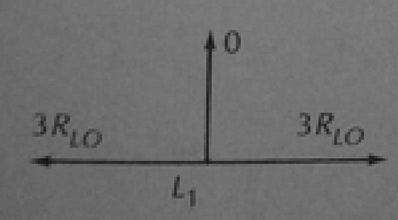



BARRA $L_1 U_1$

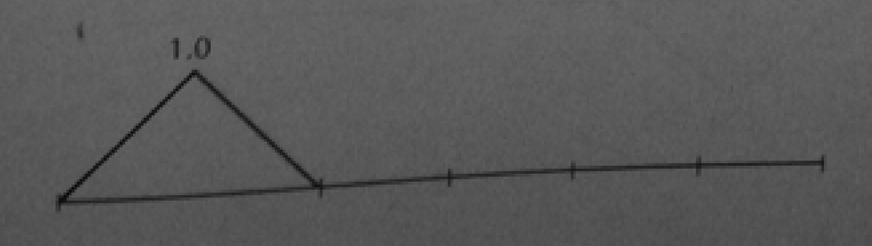
Por el método de los nudos




Carga unitaria en $L_1$

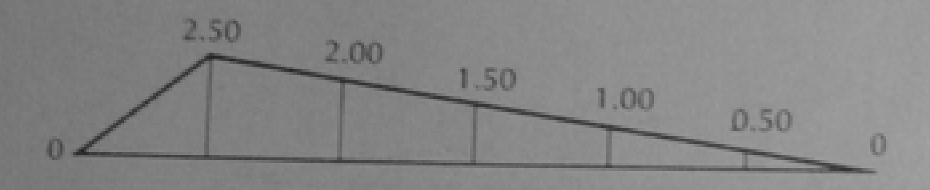



Carga unitaria en cualquier otro nudo



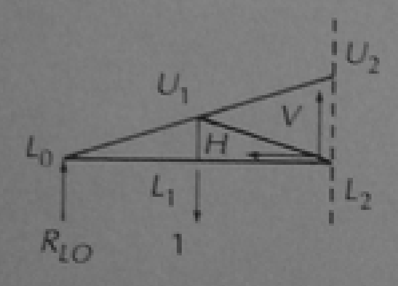
**EJEMPLO 10.11** ***(continuación)***

BARRA $L_1 L_2$




BARRA $U_1 L_2$

Por el método de las secciones para la carga en $L_1$:



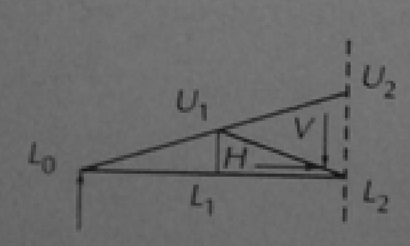

$$\sum M_{L0} = 0$$

$$-6V + (1)(3) = 0$$

$$V = 0.50$$

$$U_1 L_2 = \sqrt{10}\, V = 0.50\sqrt{10}$$

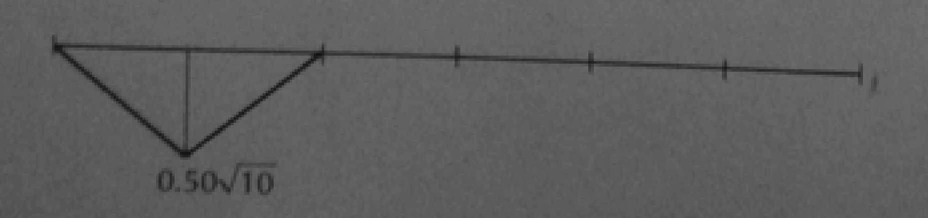
Por el método de las secciones para la carga en $L_2$:




$$\sum M_{L0} = 0$$

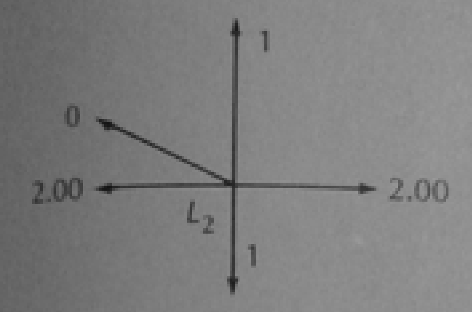
$$V = 0$$

$$U_1 L_2 = 0$$

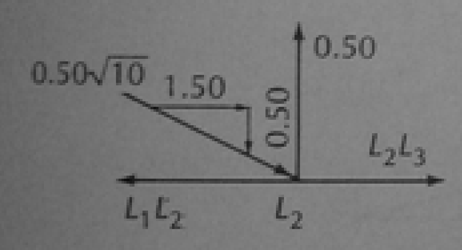


## EJEMPLO 10.11 *(continuación)*

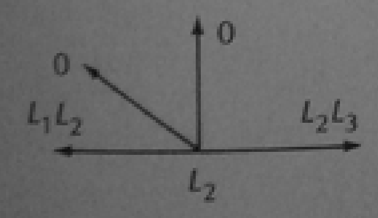
BARRA $U_2L_2$




Carga unitaria en $L_2$




Carga unitaria en $L_1$



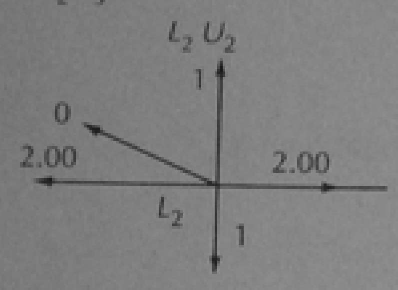

Carga unitaria en cualquier otro nudo.

1.00

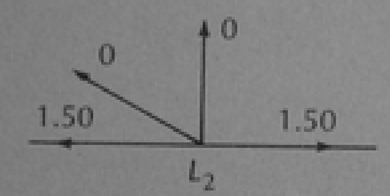
0.50

**EJEMPLO 10.11 *(continuación)***

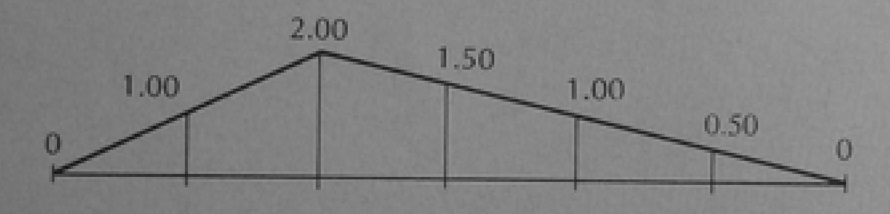
BARRA $L_2L_3$




Carga unitaria en $L_2$

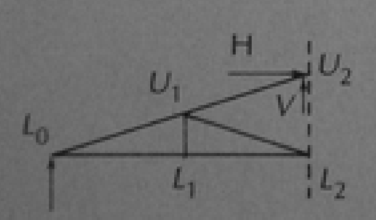



Carga unitaria en $L_3$




BARRA $U_1U_2$

Método de las secciones para la carga en $L_2$

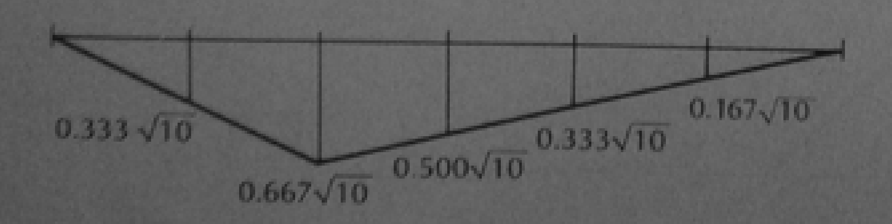



$$\sum M_{L2} = 0$$

$$R_{L0}(6) + H(2) = 0$$

$$H = -3R_{L0} = (-3)(0.667) = -2.0$$

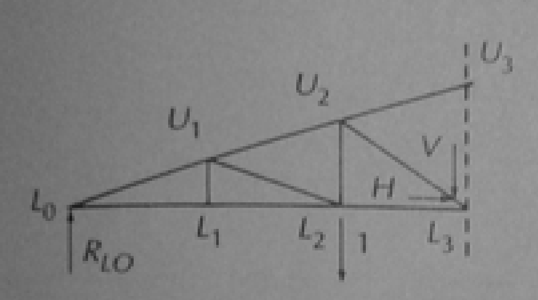
$$U_1U_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}(-2) = -0.667\sqrt{10}$$



**EJEMPLO 10.11 *(continuación)***

BARRA $U_2L_3$

Por el método de las secciones con la carga en $L_2$




$$\sum M_{U3} = 0$$

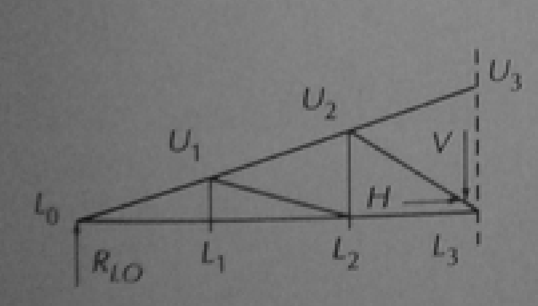
$$R_{L0}(9) - (1)(3) - H(3) - L_2L_3(3) = 0$$

$$0.667(9) - 3 - H(3) - 2.00(3) = 0$$

$$H = \frac{1}{3}(6 - 3 - 6) = -1.0$$

$$U_2L_3 = \frac{\sqrt{13}}{3}(-1) = -0.333\sqrt{13}$$

Por el método de las secciones con la carga en $L_3$



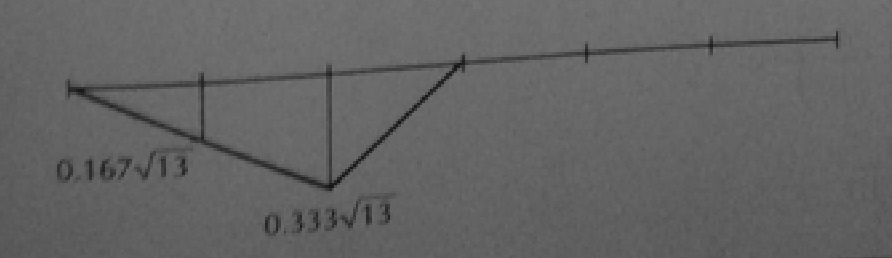

$$\sum M_{U3} = 0$$

$$R_{L0}(9) - H(3) - L_2L_3(3) = 0$$

$$0.50(9) - H(3) - 1.50(3) = 0$$

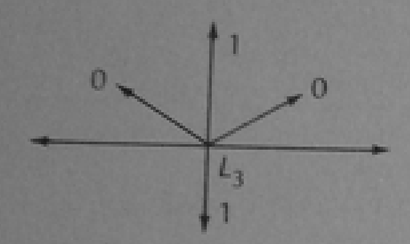
$$H = 4.5 - 4.5 = 0$$

$$U_2L_3 = 0$$

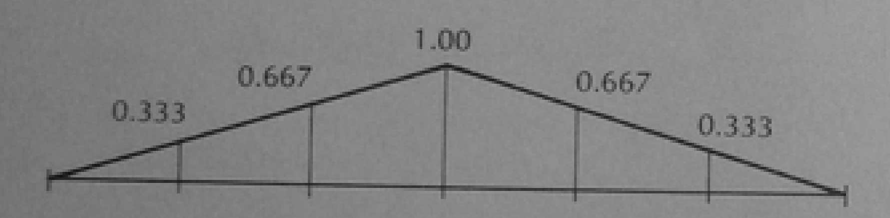


**EJEMPLO 10.11** ***(continuación)***

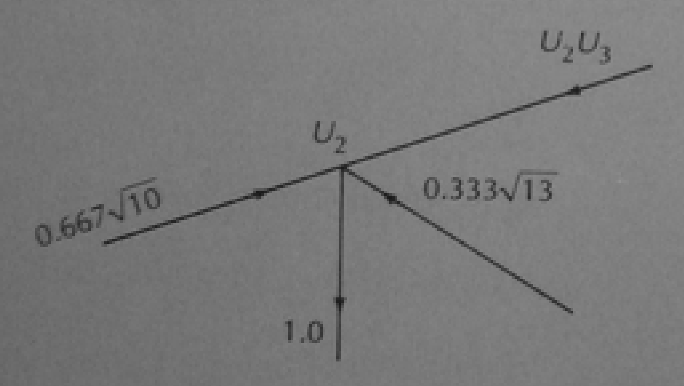
BARRA $U_3L_3$




Para la carga en $L_3$




BARRA $U_2U_3$




Para carga unitaria en $L_2$

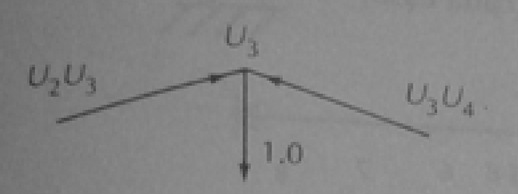
De $\sum F_x = 0$

$$0.667\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-0.333\sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)-U_2U_3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=0$$

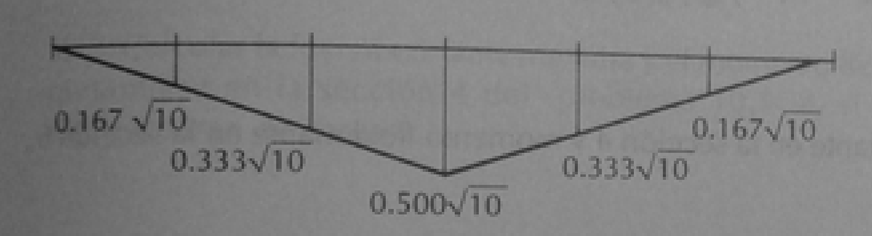
$$2-1.0-U_2U_3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=0$$

$$U_2U_3=0.333\sqrt{10}$$

**EJEMPLO 10.11 *(continuación)***




Para carga unitaria en $L_3$

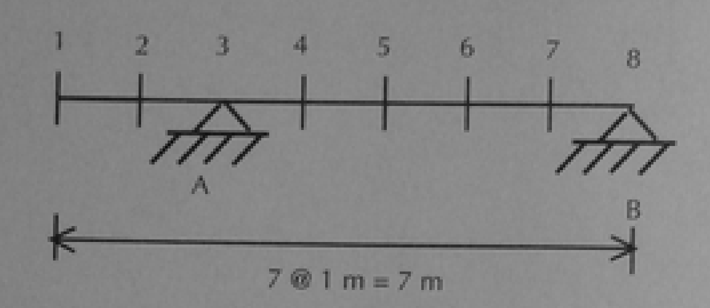



$$2U_2U_3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 1.0$$

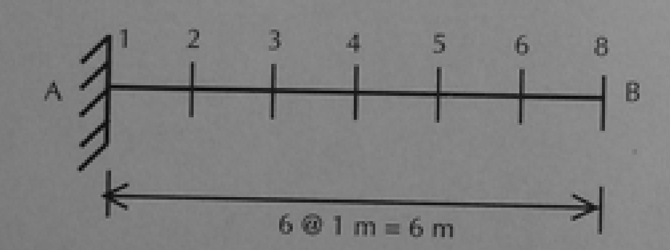
$$U_2U_3 = 0.500\sqrt{10}$$

## PROBLEMAS

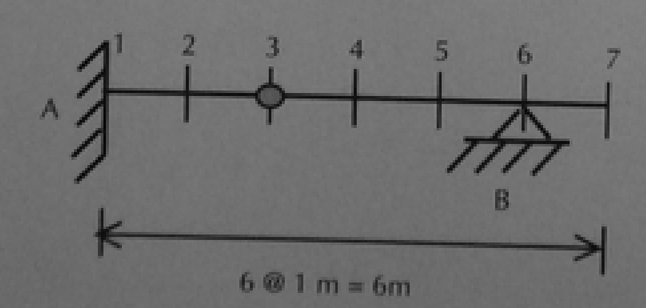
10.1 Calcular las líneas de influencia de las siguientes vigas por el método directo, para las reacciones y acciones indicadas en cada caso.



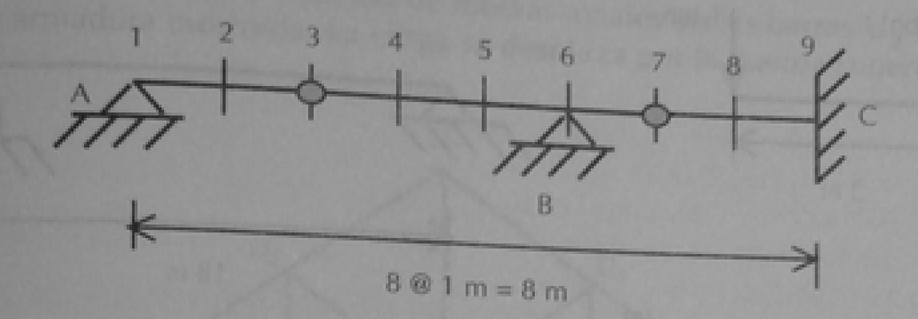

a) Reacción en A, fuerza cortante en la sección 4 y momento flexionante en la sección 6.




b) Reacción vertical, fuerza cortante y momento flexionante en A, fuerza cortante en la sección 5, momento flexionante en la sección 3.



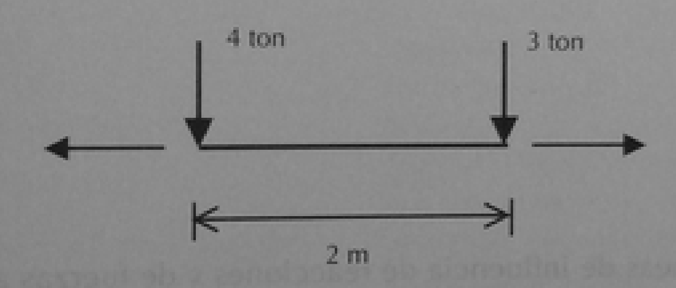

c) Reacción en B, fuerza cortante en las secciones 3 y 4, momento flexionante en las secciones 2,4 y 6.



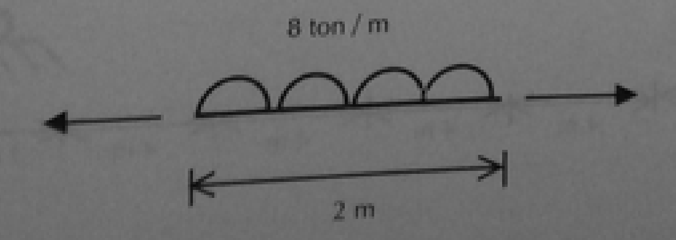

d) Reacción en A y en B, fuerza cortante en las secciones 4, 6 y 9 , momento flexionante en las secciones 2, 5, 7 y 9.

10.2 Resolver el problema anterior aplicando el principio de Müller-Breslau.

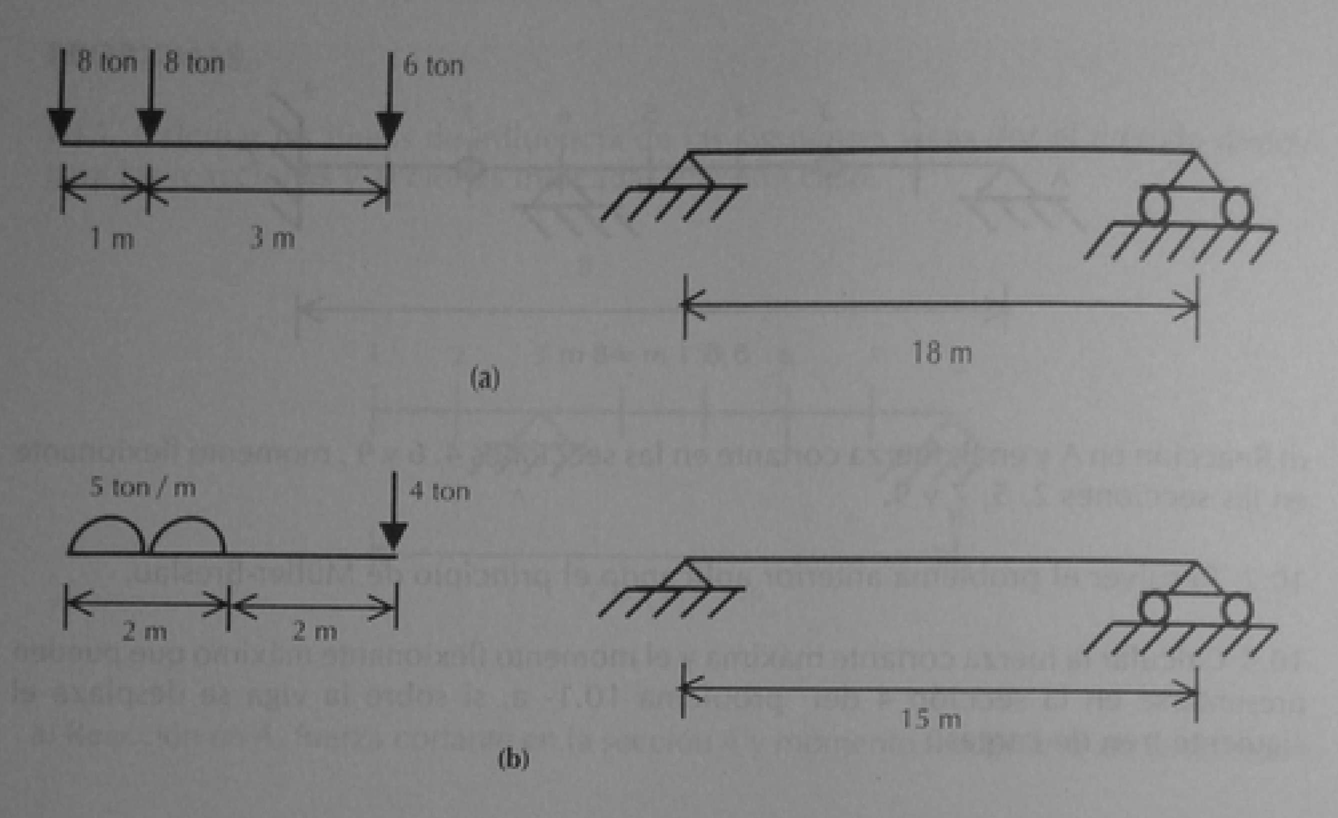
10.3 Calcular la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo que pueden presentarse en la sección 4 del problema 10.1- a, si sobre la viga se desplaza el siguiente tren de cargas.



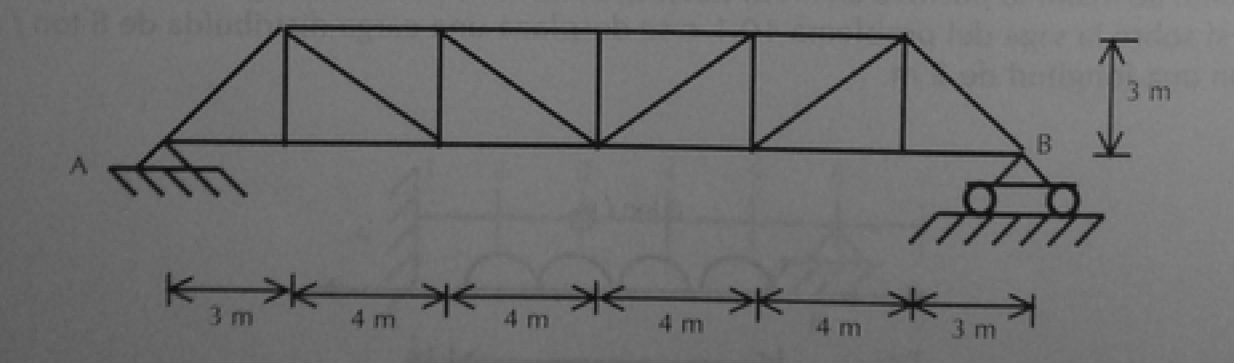

10.4 Calcular la reacción máxima en B, la fuerza cortante máxima en la sección 3, el momento máximo positivo en la sección 4 y el momento máximo negativo en la sección 6, si sobre la viga del problema 10.1-c se desplaza una carga distribuida de 8 ton / m con una longitud de 2 m.



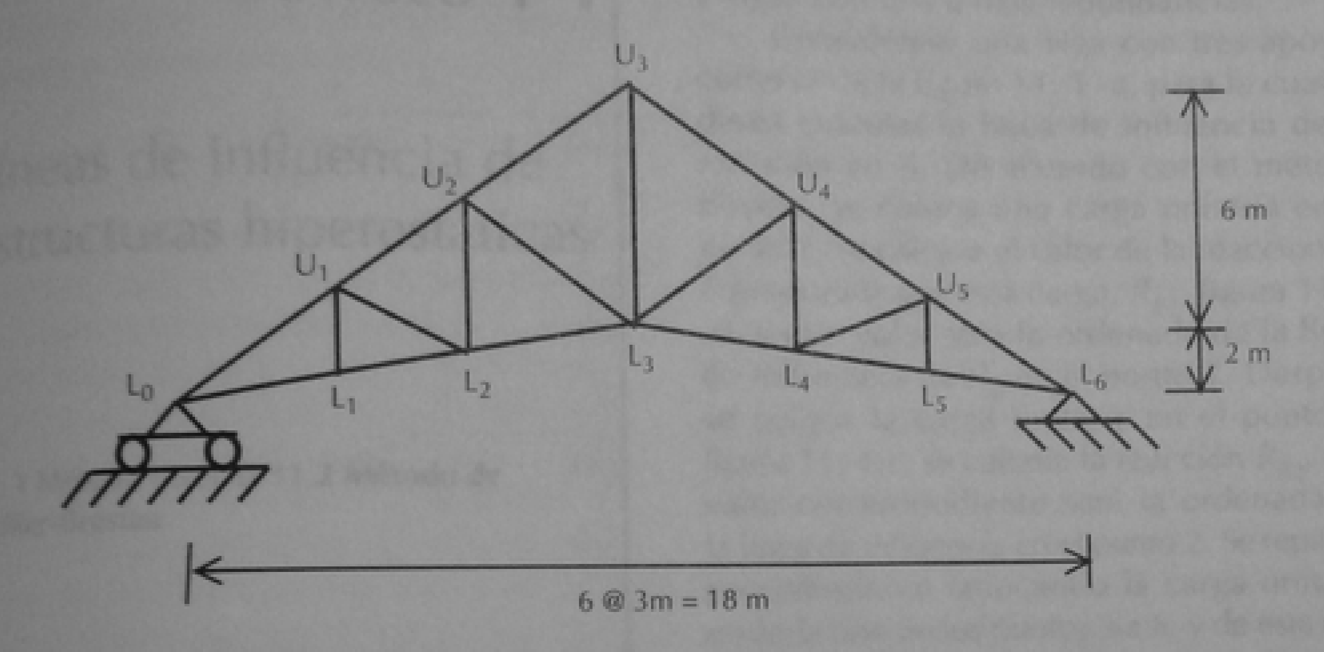

10.5 Calcular el momento máximo absoluto que puede ocurrir en las siguientes vigas, correspondientes a los trenes de carga indicados.




10.6 Calcular las líneas de influencia de reacciones y de fuerzas axiales en todas las barras de la siguiente armadura. La carga se desplaza por la cuerda inferior.



10.7 Calcular las líneas de influencia de fuerzas axiales en las barras $U_2 U_3$ , $U_2L_3$ y $L_2 L_3$ de la armadura mostrada. La carga se desplaza por la cuerda superior.



CAPÍTULO 11

# Líneas de influencia de estructuras hiperestáticas

**11. 1 Método directo/11.2 Método de Müller-Breslau**

## 11.1 Método directo

### *11. 1.1 Estructuras con un grado de indeterminación*

En el Capítulo 10 se presentaron dos métodos para calcular las líneas de influencia de estructuras isostáticas: el método directo y el método basado en el principio de Müller-Breslau. Las líneas de influencia de estructuras hiperestáticas también pueden calcularse con ambos métodos, así como utilizando el Método de Cross. En esta sección se ilustra el cálculo con el método directo que, como se recordará, consiste en colocar un carga unitaria en cada uno de los puntos en los que se desea conocer la ordenada de la línea de influencia y calcular el valor de la acción correspondiente o de la reacción, si ésta es la que se va a calcular. De hecho, para estructuras hiperestáticas, suele ser más conveniente calcular primero las líneas de influencia de las reacciones y, a partir de sus valores, calcular las líneas de influencia de las acciones internas. El método se presentará primero para vigas de un grado de redundancia y luego se extenderá a vigas con dos o más redundancias.

Considérese una viga con tres apoyos como la de la figura 11. 1 -*a*, para la cual se desea calcular la línea de influencia de la reacción en *B*. De acuerdo con el método directo, se coloca una carga unitaria en el punto 1, se calcula el valor de la reacción en *B* producida por esta carga, $R_{B1}$, figura 11. 1 -*b*, y este valor será la ordenada de la línea de influencia de $R_B$ en el punto 1. Después se coloca la carga unitaria en el punto 2, figura 11. 1-*c*, se calcula la reacción $R_{B2}$, y el valor correspondiente será la ordenada de la línea de influencia en el punto 2. Se repite el procedimiento colocando la carga unitaria en cada uno de los puntos 3 a 6, y de esta manera se puede tener la línea de influencia completa.

Para cada una de las posiciones de la carga unitaria, el valor de $R_B$ se puede calcular resolviendo la viga hiperestática por cualquiera de los métodos estudiados en los capítulos anteriores. El método de las fuerzas, como se verá más adelante, resulta conveniente. Usando este método, el valor de $R_{B1}$ se calcularía planteando la viga isostática fundamental de la figura 11.2-*a*, calculando $\Delta_{B1}$, que es la deformación en el punto B producida por la carga aplicada en 1, aplicando después una carga unitaria en *B*, figura 11.2-*b*, para calcular $\delta_{BB}$, y planteando la siguiente ecuación que expresa que la deformación final en *B* debe ser nula:

$$\Delta_{B1} + R_{B1}\delta_{BB} = 0 \qquad (11.1)$$

Esta ecuación es la equivalente al sistema de ecuaciones 4.2 del Capítulo 4 para vigas de un grado de redundancia. El valor de $R_{B1}$ se calcula finalmente como:

$$R_{B1} = -\frac{\Delta_{B1}}{\delta_{BB}} \qquad (11.2)$$

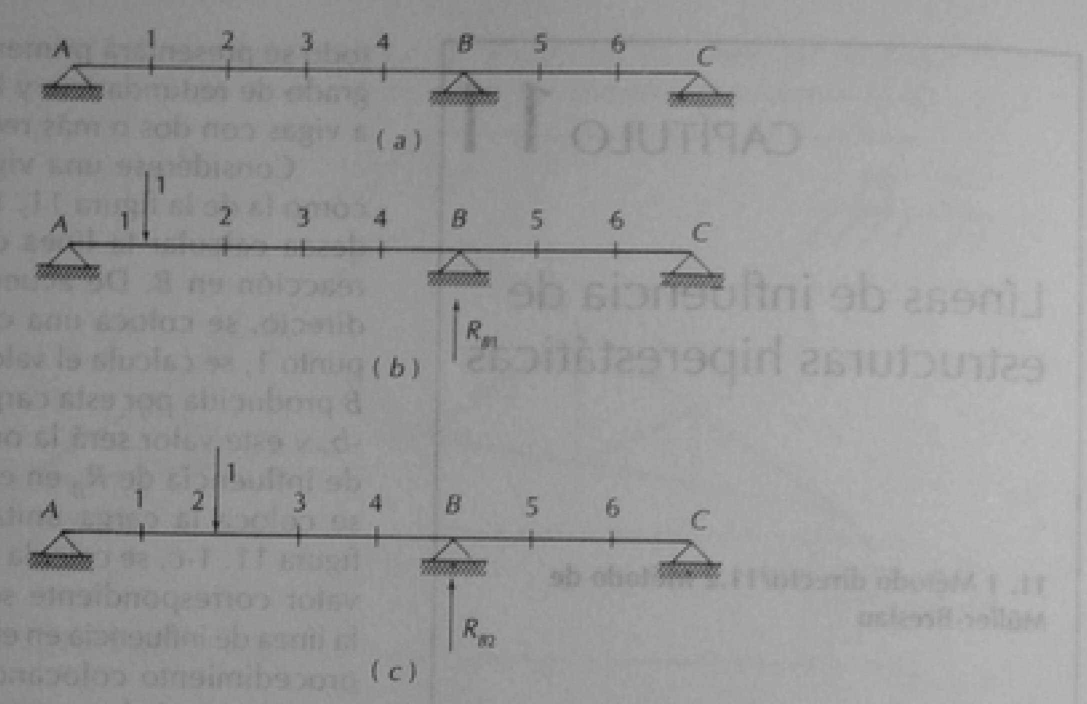



**Figura 11.1.** Método directo para vigas de un grado de redundancia

Si se repiten los cálculos anteriores para la carga unitaria colocada en el punto 2, se puede obtener el valor correspondiente de la reacción en $B$ con la ecuación:

$$R_{B2} = -\frac{\Delta_{B2}}{\delta_{BB}} \qquad (11.3)$$

Teóricamente, de esta manera se pueden calcular todos los valores de la reacción en $B$ para cada uno de los puntos 1 a 6 de la viga en cuestión. Pero esto resulta muy laborioso, ya que hay que calcular la deformación en $B$ de la viga isostática de la figura 11.2-a para cada posición de la carga. Sin embargo, el Teorema de Maxwell de las deformaciones recíprocas, estudiado en la Sección 3.8, permite simplificar notablemente los cálculos. En efecto, según este teorema, la deformación en el punto $B$ producida por una carga aplicada en el punto 1, es igual a la deformación en el punto 1 producida por una carga aplicada en el punto $B$. Por lo tanto, $\Delta_{B1} = \Delta_{1B}$, también $\Delta_{B2} = \Delta_{2B}$, y en general $\Delta_{Bi} = \Delta_{iB}$, donde $i$ es cualquier punto de la viga. Lo que estas igualdades implican es que en vez de colocar la carga unitaria en cada punto $i$, y después calcular

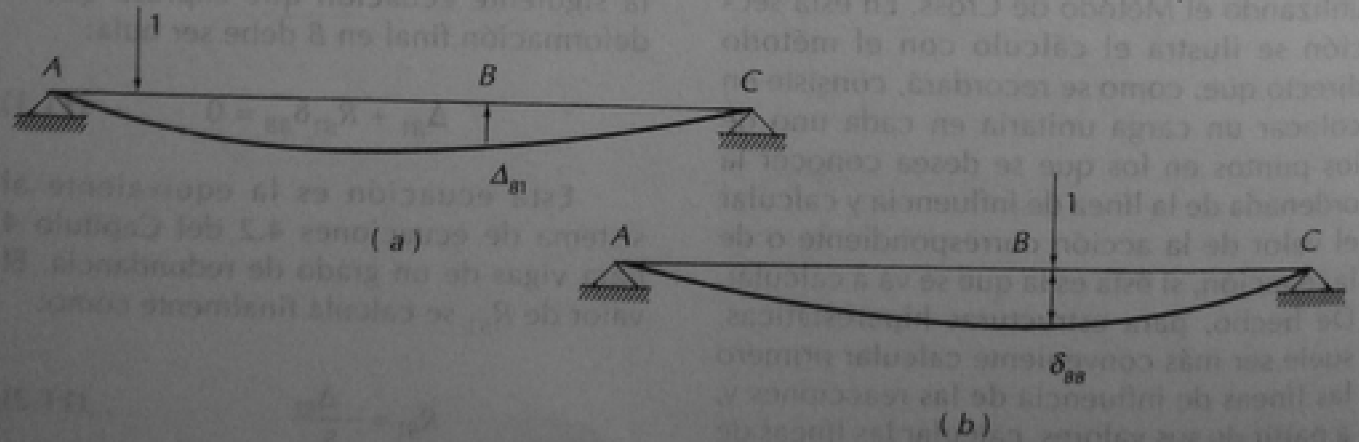



**Figura 11.2.** Resolución de la viga de la figura 11.1 por el método de las fuerzas

la deformación en $B$ para cada posición de la carga, basta con colocarla en el punto $B$ y calcular la deformación en cada punto $i$. La reacción en $B$, para cada posición de la carga, se calcula después como:

$$R_{Bi} = -\frac{\Delta_{iB}}{\delta_{BB}} \qquad (11.4)$$

El significado de estos términos se aclara en la figura 11.3. $\Delta_{iB}$ es la deformación en cualquier punto $i$ producida por una carga unitaria aplicada en $B$ y $\delta_{BB}$ es la deformación en $B$ producida por la carga aplicada en el mismo punto $B$. En el caso de la figura 11.3, el punto $i$ es el punto 3. Se puede ver que en vez de resolver varias vigas con la carga unitaria aplicada en cada punto, y calcular la deformación en el punto $B$ para cada una, se resuelve una sola viga con la carga aplicada en $B$ y se calculan las deformaciones en cada uno de los puntos en los que se quiere calcular las ordenadas de la línea de influencia. La labor numérica es mucho menor, gracias a la aplicación del Teorema de Maxwell.

La deformación $\Delta_{iB}$ cuando el punto $i$ coincide con el punto $B$ es igual a $\delta_{BB}$, o sea, es la deformación en $B$ para una carga aplicada también en $B$. La reacción en $B$ para esta posición de la carga, según la ecuación 11.4, es igual a 1, o sea, $R_{BB} = 1$. La ordenada de la línea de influencia en este punto es entonces igual a 1. Esto quiere decir que el Principio de Müller-Breslau también es válido para estructuras hiperestáticas, ya que la ordenada de la línea de influencia resulta igual a la que se tendría si se impone un desplazamiento unitario en dirección de la reacción. Sin embargo, como se verá más adelante, la línea de influencia no es lineal, como en estructuras isostáticas.

Las deformaciones $\Delta_{iB}$ pueden calcularse por cualquiera de los métodos presentados en el Capítulo 3, pero como se trata de calcular deflexiones en varios puntos de una viga bajo el efecto de una sola carga, resultan más convenientes el método de la viga conjugada o el de Newmark. Este último es especialmente apropiado si la viga tiene momento de inercia variable.

**Ejemplo 11.1** Se calculan las líneas de influencia de las tres reacciones, de fuerza cortante en un punto y de momento flexionante en otro punto, de una viga con tres apoyos, o sea, con un grado de hiperestaticidad. Se piden las ordenadas de la línea de influencia en puntos a cada 2 m, como se muestra en la parte de DATOS.

Primero se plantea la viga isostática suprimiendo el apoyo intermedio y después se calculan las deflexiones en cada uno de los puntos en los que se va a obtener la línea de influencia. En el ejemplo se han calculado las deflexiones con el método de la viga conjugada. Para ello se cargó la viga conjugada, que es la misma isostática, con el diagrama de momentos flexionantes y se calcularon los momentos flexionantes producidos por esta carga en cada punto. Así, el momento fle-

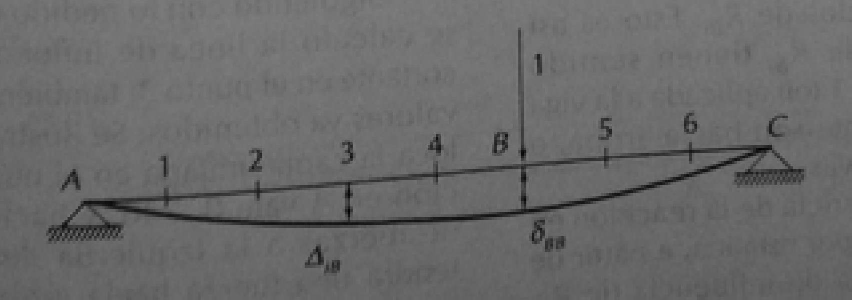



**Figura 11.3.** Significado de las deformaciones de la ecuación 11.4

xionante en el punto 3, por ejemplo, es igual a la reacción en *A*, que vale 220, por la distancia al punto 3, que es de 6m, menos el momento flexionante que produce el triángulo de carga comprendido entre la reacción *A* y el punto 3, con respecto a este último. Obsérvese que se ha factorizado el término ($1/16EI$). Esto es conveniente, porque según la ecuación 11.4, todas las deflexiones se van a dividir después entre $\delta_{BB}$ y los términos factorizados se van a anular.

A continuación, se han calculado los valores de la reacción en *B* para cada posición de la carga unitaria, aplicando la ecuación 11.4. Por ejemplo, el valor de $R_B$ cuando la carga unitaria está en el punto 3, será $-\Delta_{3B}/\delta_{BB}$. Estos valores proporcionan las ordenadas de la línea de influencia de $R_B$ en el punto correspondiente. Al final de esta sección del ejemplo se ha trazado la línea de influencia a partir de estos valores. Nótese que cuando la carga unitaria está aplicada en los apoyos *A* y *C*, la reacción en *B* es nula. Por eso la ordenada de la línea de influencia es también nula. Si se observa la línea de influencia obtenida, se verá que la ordenada es igual a 1 en el apoyo *B*, de acuerdo con el Principio de Müller-Breslau, pero la línea de influencia es curva, a diferencia de las correspondientes a estructuras isostáticas. También se puede notar que el valor máximo no se presenta necesariamente en el apoyo. Esto sucede porque para algunas posiciones de la carga unitaria, las otras reacciones tiene valores negativos, como se verá a continuación. Nótese también que las ordenadas de la línea de influencia tienen signo contrario a los valores calculados de $R_{Bi}$. Esto es así poque los valores de $R_{Bi}$ tienen sentido contrario a la carga de 1 ton aplicada a la viga isostática y por lo tanto son hacia arriba, o sea, ordenadas positivas.

La línea de influencia de la reacción en *A* se calculó después por estática, a partir de los valores de la línea de influencia de $R_B$. Se ilustra, al principio de esta sección del ejemplo, que si la carga unitaria está en el punto 1, la reacción en *B* vale 0.360, según se ve en la línea de influencia de $R_B$ trazada anteriormente. Tomando momentos con respecto al apoyo *C* se puede calcular entonces el valor de la reacción en *A*, que será la ordenada de la línea de influencia en el punto 1. Así se hace el cálculo para cada uno de los otros puntos. La línea de influencia de $R_A$ se ha trazado al final de esta parte del ejemplo. Es importante observar que cuando la carga unitaria se coloca entre los puntos 5 y 6, el valor de $R_A$ resulta negativo. Esto indica que tiene sentido contrario al supuesto en el croquis trazado al principio de esta sección del ejemplo, o sea, es hacia abajo. Se explica esta situación físicamente observando que si la carga se coloca entre los apoyos *B* y *C*, la viga tiende a levantarse en el apoyo *A*. Como en el caso anterior, la ordenada vale 1.000 en el apoyo en cuestión y la línea de influencia es curva.

Teniendo las líneas de influencia de $R_B$ y $R_A$ , se puede obtener la de $R_C$ por equilibrio de fuerzas verticales. Por ejemplo, si la carga unitaria se coloca en el punto 1, las reacciones $R_B$ y $R_A$ valdrán 0.360 y 0.740, según se puede ver en las líneas de influencia ya trazadas. Entonces aplicando la ecuación $\Sigma F_y = 0$ se obtiene $R_C$ , que será la ordenada en el punto 1. Obsérvese que esta línea de influencia resulta negativa entre los apoyos *A* y *B*, y por eso se ha trazado por debajo de la viga. El lector notará que si se coloca una carga en el punto 1, la viga tiende a levantarse en el apoyo *C*.

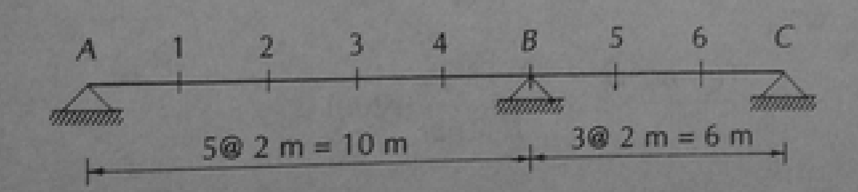
Siguiendo con lo pedido en el ejemplo, se calculó la línea de influencia de fuerza cortante en el punto 3, también a partir de los valores ya obtenidos. Se ilustra que si se coloca la carga unitaria en el punto 1, la reacción en *A* vale 0. 740, y haciendo la suma de fuerzas a la izquierda del punto 3, se tendrá una fuerza hacia arriba de 0.740 y una fuerza hacia abajo de 1.000. La fuerza cortante resulta negativa, de −0.260. Al

llegar al punto 3, se calculó la línea de influencia para una posición de la carga unitaria inmediatamente a la izquierda del punto, y para otra posición inmediatamente a la derecha, en la misma forma ya explicada para estructuras isostáticas. Nótese que el desplazamiento entre los dos tramos de viga a la izquierda y a la derecha del punto *C* es igual a 1, de acuerdo con el principio de Müller-Breslau.

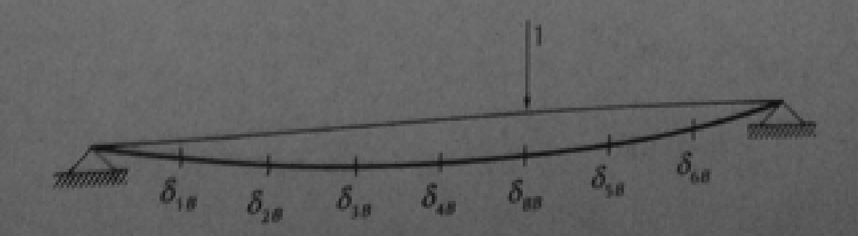
Finalmente, se calculó la línea de influencia de momento flexionante en el punto 4, también a partir de los valores ya obtenidos para las reacciones. Por ejemplo, si la carga unitaria se coloca en el punto 1, las fuerzas que producen momento respecto a este punto serán la reacción $R_A$ con un valor de 0.740, y la propia carga unitaria. La notación empleada significa que $M_{41}$ es el momento flexionante en el punto 4 cuando la carga unitaria está colocada en el punto 1. La línea de influencia de momento flexionante tiene unidades de longitud, en este ejemplo de metros, así que para obtener el momento flexionante producido por cierta carga, debe multiplicarse el valor de la carga aplicada, con sus unidades de fuerza, por el valor de la ordenada de la línea de influencia con sus unidades de longitud, para obtener el momento con unidades de fuerza por longitud.

**EJEMPLO 11.1. CÁLCULO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES $R_A$, $R_B$ Y $R_C$, DE LA FUERZA CORTANTE EN EL PUNTO 3 Y DEL MOMENTO FLEXIONANTE EN EL PUNTO 4 DE UNA VIGA CON TRES APOYOS**

DATOS:

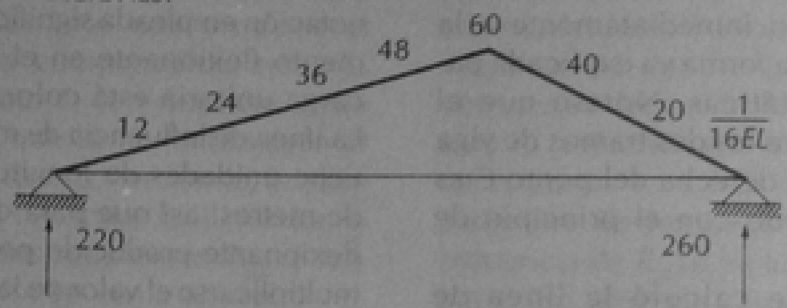



VIGA ISOSTÁTICA



**EJEMPLO 11.1. (continuación)**

CÁLCULO DE DEFORMACIONES:




$$\Delta_{1B}=\frac{1}{16EI}\left(220\times 2-\frac{2\times 12}{2}\times 0.667\right)=\frac{1}{16EI}(432)$$

$$\Delta_{2B}=\frac{1}{16EI}\left(220\times 4-\frac{4\times 24}{2}\times 1.333\right)=\frac{1}{16EI}(816)$$

$$\Delta_{3B}=\frac{1}{16EI}\left(220\times 6-\frac{6\times 36}{2}\times 2.000\right)=\frac{1}{16EI}(1104)$$

$$\Delta_{4B}=\frac{1}{16EI}\left(220\times 8-\frac{8\times 48}{2}\times 2.667\right)=\frac{1}{16EI}(1248)$$

$$\Delta_{BB}=\frac{1}{16EI}\left(220\times 10-\frac{10\times 60}{2}\times 3.333\right)=\frac{1}{16EI}(1200)$$

$$\Delta_{5B}=\frac{1}{16EI}\left(260\times 4-\frac{4\times 40}{2}\times 1.333\right)=\frac{1}{16EI}(933.36)$$

$$\Delta_{6B}=\frac{1}{16EI}\left(260\times 2-\frac{2\times 20}{2}\times 0.667\right)=\frac{1}{16EI}(506.67)$$

CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN B

$$R_{B1}=-\frac{\Delta_{1B}}{\delta_{BB}}=-\frac{432}{1200}=-0.360$$

$$R_{B2}=-\frac{\Delta_{2B}}{\delta_{BB}}=-\frac{816}{1200}=-0.680$$

$$R_{B3}=-\frac{\Delta_{3B}}{\delta_{BB}}=-\frac{1104}{1200}=-0.920$$

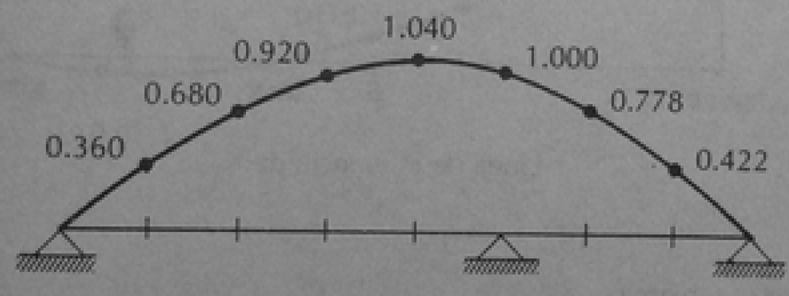
**EJEMPLO 11.1. (continuación)**

$$R_{B4} = -\frac{\Delta_{4B}}{\delta_{BB}} = -\frac{1248}{1200} = -1.040$$

$$R_{BB} = -\frac{\Delta_{BB}}{\delta_{BB}} = -\frac{1200}{1200} = -1.000$$

$$R_{B5} = -\frac{\Delta_{5B}}{\delta_{BB}} = -\frac{933.36}{1200} = -0.778$$

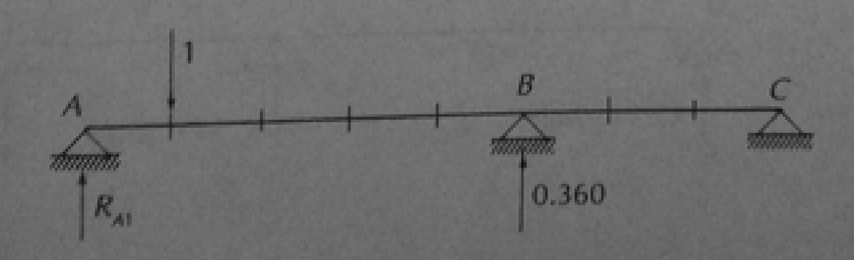
$$R_{B6} = -\frac{\Delta_{6B}}{\delta_{BB}} = -\frac{506.67}{1200} = -0.442$$




Línea de influencia de $R_B$

CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN *A*

Cálculo de $R_{A1}$:




De $\Sigma M_c = 0$,

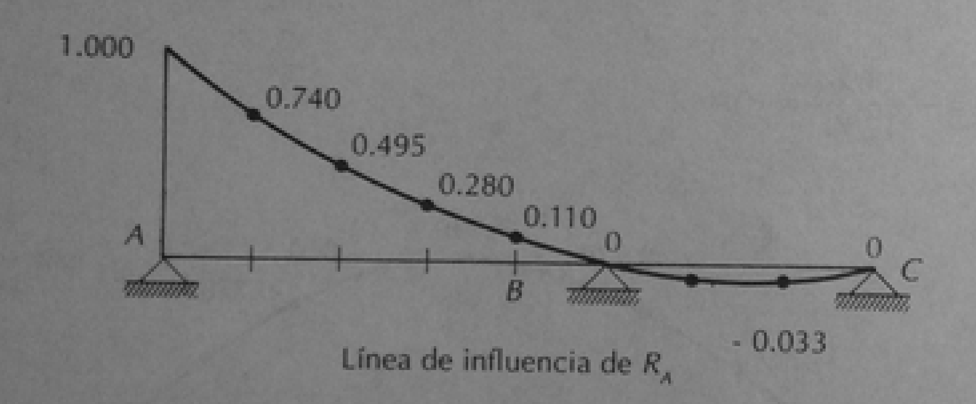
$(R_{A1})(16) - (14) + 0.360(6) = 0$

$R_{A1} = 0.74$

**EJEMPLO 11.1. (*continuación*)**

En forma similar:

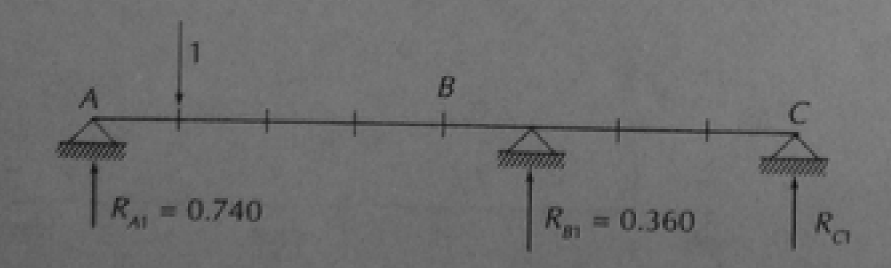
$(R_{A2})(16) - 1(12) + 0.680(6) = 0,\ R_{A2} = 0.495$
$(R_{A3})(16) - 1(10) + 0.920(6) = 0,\ R_{A3} = 0.280$
$(R_{A4})(16) - 1(8) + 1.040(6) = 0,\ R_{A4} = 0.110$
$(R_{AB})(16) - 1(6) + 1(6) = 0,\ R_{AB} = 0$
$(R_{A5})(16) - 1(4) + 0.778(6) = 0,\ R_{A5} = -0.042$
$(R_{A6})(16) - 1(2) + 0.422(6) = 0,\ R_{A6} = -0.033$




Línea de influencia de $R_A$

CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN *C*

Cálculo de $R_{C1}$:



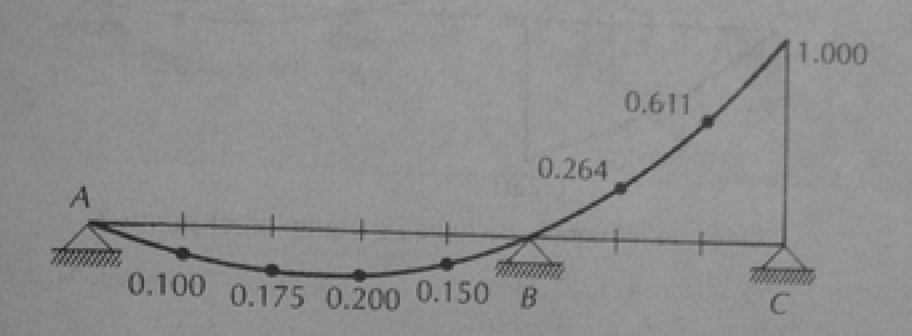

De $\Sigma F_y = 0$:

$R_{C1} + 0.740 + 0.360 + 1.000 = 0,\ R_{C1} = -0.100$

En forma similar:

**EJEMPLO 11.1. (*continuación*)**

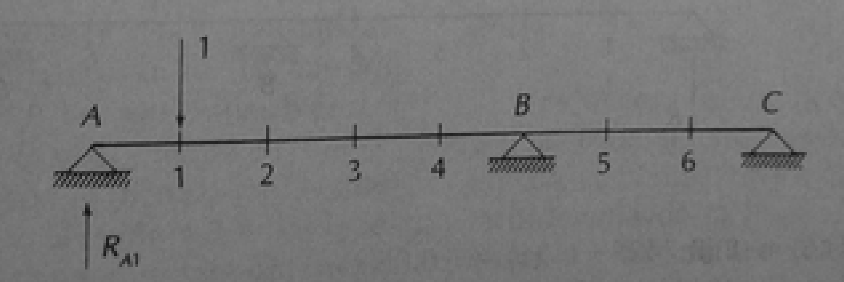
$R_{C2} + 0.495 + 0.680 - 1.000 = 0,\ R_{C2} = -0.175$
$R_{C3} + 0.280 + 0.920 - 1.000 = 0,\ R_{C3} = -0.200$
$R_{C4} + 0.110 + 1.040 - 1.000 = 0,\ R_{C4} = -0.150$
$R_{CB} + 0 + 1.000 - 1.000 = 0,\ R_{CB} = 0$
$R_{C5} - 0.042 + 0.778 - 1.000 = 0,\ R_{C5} = 0.264$
$R_{C6} - 0.033 + 0.422 - 1.000 = 0,\ R_{C6} = 0.611$




Línea de influencia de $R_C$

CÁLCULO DE LAS FUERZAS CORTANTES EN EL PUNTO 3

Fuerza cortante en 3 cuando la carga unitaria está en 1:



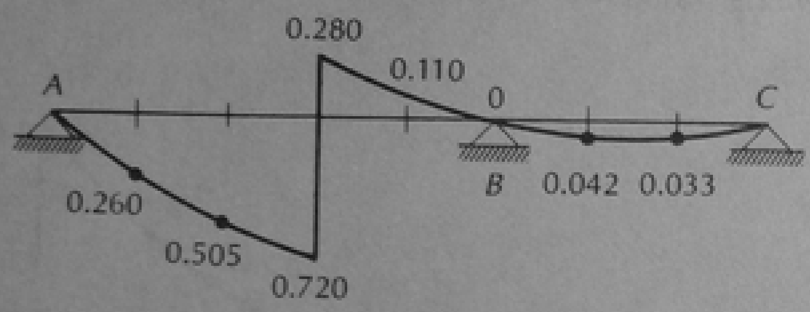

$V_{31} = R_{A1} - 1 = 0.740 - 1.0 = -0.260$

En forma similar:

$V_{32} = R_{A2} - 1 = 0.495 - 1 = -0.505$
$V_{33i} = R_{A3} - 1 = 0.280 - 1 = -0.720$
$V_{33d} = R_{A3} = 0.280$

**EJEMPLO 11.1. (*continuación*)**

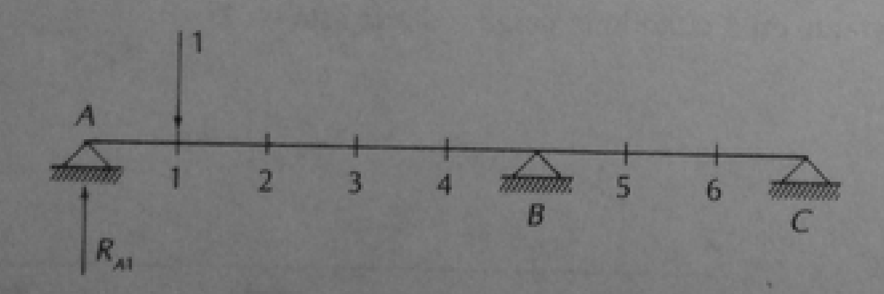
$V_{34} = R_{A4} = 0.110$
$V_{3B} = R_{AB} = 0$
$V_{35} = R_{A5} = -0.042$
$V_{36} = R_{A6} = -0.033$




Línea de influencia de fuerza cortante en el punto 3

CÁLCULO DE MOMENTOS FLEXIONANTES EN EL PUNTO 4

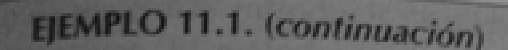
Momento flexionante en 4 cuando la carga unitaria está en 1:



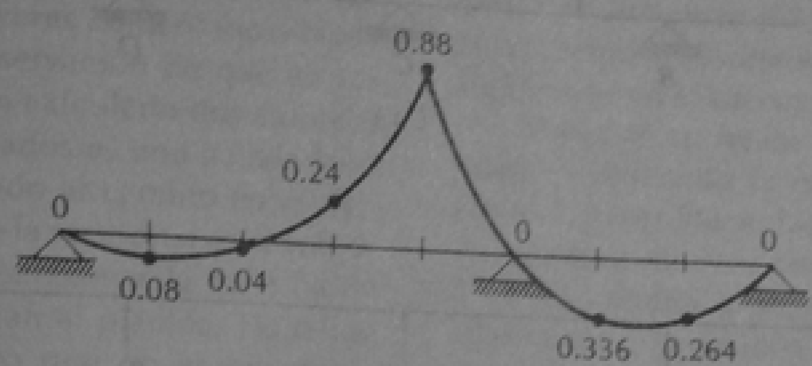

$M_{41} = 8R_{A1} - (1)(6) = (8)(0.740) - (1)(6) = -0.08$

En forma similar:

$M_{42} = 8R_{A2} - (1)(4) = (8)(0.495) - (1)(4) = -0.04$
$M_{43} = 8R_{A3} - (1)(2) = (8)(0.280) - (1)(2) = 0.24$
$M_{44} = 8R_{A4} - (8)(0.110) = 0.88$
$M_{4B} = 8R_{AB} = (8)(0) = 0$
$M_{45} = 8R_{A5} = (8)(-0.042) = -0.336$
$M_{46} = 8R_{A6} = (8)(-0.033) = -0.264$



**EJEMPLO 11.1. (*continuación*)**




Línea de influencia de momento flexionante en el punto 4

### *11.1.2 Estructuras con varios grados de indeterminación*

Cuando se tienen estructuras con más de un grado de indeterminación se sigue el mismo procedimiento de colocar la carga unitaria en cada punto y calcular las reacciones bajo la acción de esta carga. Por ejemplo, si se tiene una viga continua con cinco apoyos, como la mostrada en la figura 11.4-*a*, se coloca la carga unitaria en un punto cualquiera *i* y se calculan las reacciones hiperestáticas. Si la viga isostática es una libremente apoyada en *A* y en *E*, las reacciones hiperestáticas serán $R_{Bi}$, $R_{ci}$ y $R_{Di}$, figura 11.4-*b*.

De acuerdo con el método de las fuerzas planteado en la Sección 4.3.4, las reacciones hiperestáticas pueden obtenerse aplicando el sistema de ecuaciones 4.2. Con la notación de la figura 11.4-*c*, este sistema quedaría en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta_{Bi} + \delta_{BB}R_{Bi} + \delta_{BC}R_{Ci} + \delta_{BD}R_{Di} &= 0\\ \Delta_{Ci} + \delta_{CB}R_{Bi} + \delta_{CC}R_{Ci} + \delta_{CD}R_{Di} &= 0\\ \Delta_{Di} + \delta_{DB}R_{Bi} + \delta_{DC}R_{Ci} + \delta_{DD}R_{Di} &= 0\end{aligned} \quad (11.5)$$

Los subíndices *i* se han introducido en los términos Δ y *R* para indicar que estas ecuaciones se han planteado para una carga unitaria colocada en el punto *i*. Las incógnitas $R_B$, $R_C$ y $R_D$ que se obtengan al resolver este sistema serán los valores de las reacciones de la viga hiperestática para una carga colocada en *i*. Con la notación matricial de la Sección 4.3.4, la solución del sistema de ecuaciones será:

$$\begin{Bmatrix} R_{Bi}\\ R_{Ci}\\ R_{Di}\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{BB} & \delta_{BC} & \delta_{BD}\\ \delta_{CB} & \delta_{CC} & \delta_{CD}\\ \delta_{DB} & \delta_{DC} & \delta_{DD}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\Delta_{Bi}\\ \Delta_{Ci}\\ \Delta_{Di}\end{Bmatrix} \quad (11.6)$$

Es necesario entonces repetir el planteamiento del sistema de ecuaciones para cada uno de los puntos *i* en los que se va a calcular la ordenada de la línea de influencia. Sin embargo, los coeficientes δ son los mismos para todos los puntos *i*, por lo que basta con calcular una sola vez la matriz:

$$\begin{bmatrix}\delta_{BB} & \delta_{BC} & \delta_{BD}\\ \delta_{CB} & \delta_{CC} & \delta_{CD}\\ \delta_{DB} & \delta_{DC} & \delta_{DD}\end{bmatrix} \quad (11.7)$$

La matriz columna Δ sí tiene que calcularse para cada posición del punto *i*. Pero al igual que en estructuras isostáticas, como

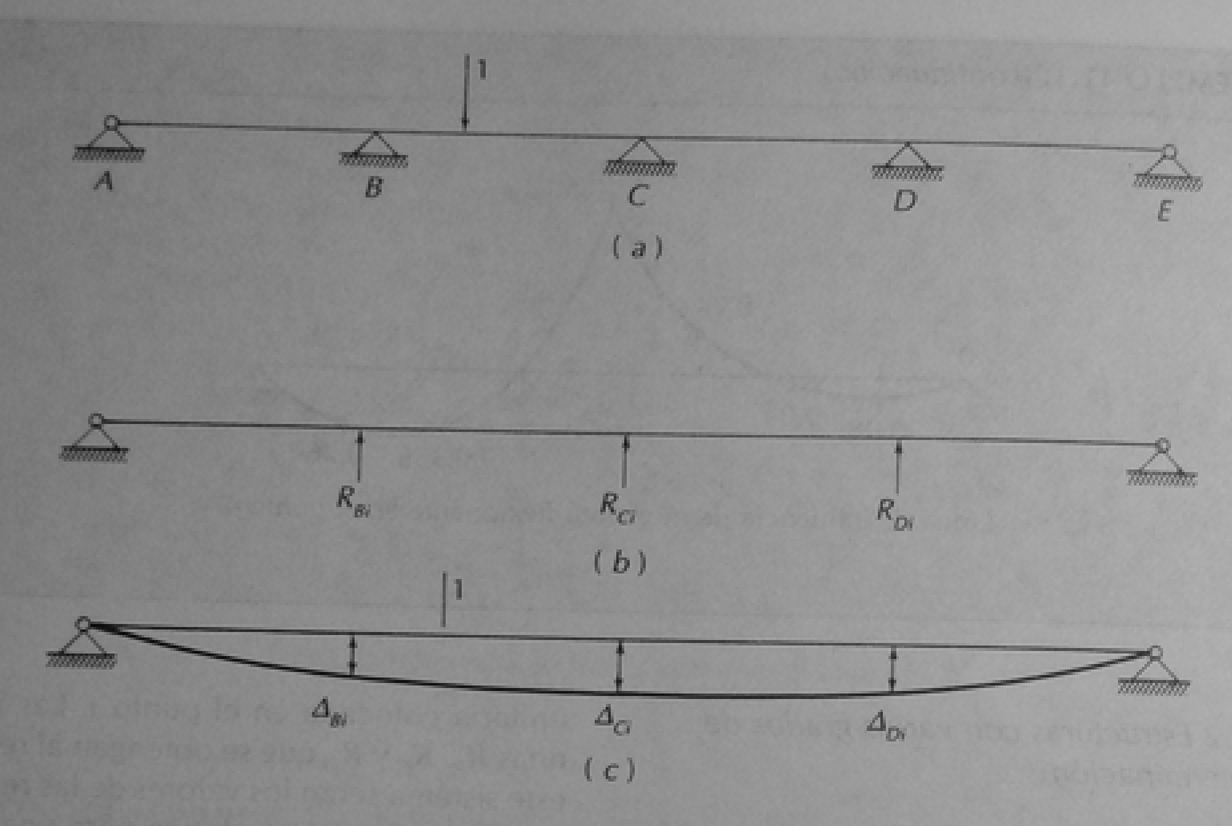



**Figura 11.4.** Viga con tres grados de redundancia

$\Delta_{Bi} = \Delta_{iB} = \delta_{iB}$, $\Delta_{ci} = \Delta_{ic} = \delta_{ic}$ y $\Delta_{Di} = \Delta_{iD} = \delta_{iD}$, no es necesario calcular las deflexiones en los puntos *B*, *C* y *D*, para la carga colocada en cada punto *i*, sino que basta colocar la carga en *B* y calcular las deflexiones en cada punto *i*, y después repetir la operación colocando la carga en los puntos *C* y *D*. Aquí también el Teorema de Maxwell permite reducir sustancialmente la labor numérica.

En el planteamiento anterior se ha supuesto una viga con tres grados de indeterminación, las reacciones $R_B$, $R_C$ y $R_D$. Si el grado de indeterminación es mayor, el sistema de ecuaciones 11.5 será también mayor, igual al grado de indeterminación. Las incógnitas también podrán variar según se escoja la viga isostática. En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento de cálculo.

**Ejemplo 11.2** Se piden las líneas de influencia de las reacciones en una viga empotrada en su extremo derecho y con otros tres apoyos libres. Es por lo tanto hiperestática de tercer grado. El momento de inercia en el tramo intermedio es el doble que en los otros dos tramos.

La viga isostática se ha planteado como una empotrada en el extremo derecho. De acuerdo con el procedimiento antes explicado, hay que calcular las deflexiones en todos los puntos *i* y en los apoyos suprimidos bajo la acción de cargas unitarias colocadas en estos mismos apoyos. Como se suprimieron tres apoyos para plantear la viga isostática, será necesario hacer tres cálculos de deformaciones: para la carga unitaria en *A*, para la carga unitaria en *B* y para la carga unitaria en *C*.

Se ha escogido el método de Newmark para calcular las deformaciones. Es ventajoso porque permite obtener las deflexiones en todos los puntos en que se requieren, el momento de inercia variable se puede manejar en forma expedita, y como es un voladizo,

no es necesario introducir configuraciones correctivas. El método se ha aplicado tal como se expuso en el Capítulo 3, por lo que no se ameritan mayores comentarios. Nada más se hace la observación de que en los puntos *B* y *C* se han calculado dos cambios angulares concentrados α, uno a cada lado de los puntos, debido al cambio en el momento de inercia de la sección. Los términos factorizados que aparecen a la derecha de las tablas se eliminan al plantear las ecuaciones 11.5, por lo que no es necesario calcularlos.

En el siguiente paso, se plantean y se resuelven las ecuaciones del sistema 11.5, para una carga unitaria aplicada en el punto 1. Como las incógnitas son las reacciones $R_A$, $R_B$ y $R_C$, los subíndices *A*, *B* y *C* son los que se usan en vez de *B*, *C* y *D*, que son los que aparecen en las ecuaciones 11. 5. Los segundos subíndices son todos 1, porque la carga está aplicada en este punto. En la primera ecuación, $\Delta_{A1} = \delta_{1A}$ es la deflexión en el punto 1 cuando la carga está aplicada en el punto *A*. En la primera tabla de Newmark se puede ver que esta deflexión es de −747.5 multiplicada por el término factorizado que se ha eliminado. El segundo coeficiente $\delta_{AA}$ es la deflexión en *A* cuando la carga está aplicada también en *A*. En la misma tabla se puede ver que su valor es de −907.0. El tercer coeficiente, $\delta_{AB}$ es la deflexión en *A* cuando la carga está aplicada en *B*. Este valor puede buscarse en la segunda tabla y es de −594. De manera semejante se pueden encontrar todos los demás coeficientes en las tres tablas de Newmark calculadas en el paso anterior.

A continuación se ha planteado la resolución del sistema de ecuaciones en forma matricial con lo cual se obtienen los valores de $R_{A1}$, $R_{B1}$ y $R_{C1}$, o sea, los valores de estas tres reacciones cuando la carga está aplicada en el punto 1. Esto da la ordenada de las líneas de influencia de estas reacciones en el punto 1. Es importante notar que la matriz δ es simétrica, precisamente porque tiene que cumplirse el Teorema de Maxwell. Si no hubiese resultado simétrica, habría algún error en el cálculo de deflexiones.

Después se repite el mismo procedimiento colocando la carga unitaria en el punto 2, para obtener las reacciones en *A*, *B* y *C* correspondientes a este punto. La matriz δ ya no cambia, porque los términos no involucran a los puntos *i*, según se explicó anteriormente. Basta con cambiar la matriz Δ que ahora se formará con las deflexiones en los puntos *A*, *B* y *C* cuando la carga esté aplicada en 2, los cuales serán iguales a las deflexiones en el punto 2 cuando la carga esté aplicada en *A*, *B* y *C*, respectivamente. Así, el valor de 108 que aparece en la matriz columna de la derecha es la deflexión en el punto 2 cuando la carga unitaria está aplicada en el punto *C*, el cual puede buscarse en la tercera tabla de Newmark. Los valores buscados de $R_A$, $R_B$ y $R_C$ pueden obtenerse multiplicando la matriz $[\delta]^{-1}$, ya calculada en el paso anterior, por la matriz columna $\{\Delta\}$ integrada con las deflexiones correspondientes de las tablas de Newmark.

Se procede de la misma manera colocando la carga unitaria en los puntos restantes 3, 4 y 5. Obsérvese de nuevo que la única matriz que cambia es la Δ, y que sus coeficientes ya han sido calculados en las tablas de Newmark. Terminados estos cálculos, ya se pueden trazar las líneas de influencia de $R_A$, $R_B$ y $R_C$ con los valores obtenidos. Por ejemplo, el valor de 0. 795 en el punto 2 de la línea de influencia de $R_B$, es el valor de $R_{B1}$ calculado para la carga en 2. Los signos negativos indican que el sentido de la reacción es opuesto al de la carga unitaria aplicada al calcular las deflexiones, o sea, que las reacciones son hacia arriba. Los signos positivos indican reacciones hacia abajo. Las ordenadas en los apoyos serán iguales a 1, cuando la carga unitaria esté co-

locada sobre el apoyo en cuestión, e iguales a 0, cuando estén colocadas sobre alguno de los otros apoyos.

La línea de influencia de $R_D$ se calcula a partir de las líneas de influencia ya obtenidas. Se coloca una carga unitaria en cada punto y se aplica la ecuación de equilibrio $\Sigma F_y = 0$. Esto se ha hecho, en forma de tabla, y en la parte final del ejemplo. Si se quisiesen las líneas de influencia de cortante o de momento podrían obtenerse también aplicando las ecuaciones de equilibrio ya conocidas las reacciones, como se ilustró en el ejemplo anterior.

## EJEMPLO 11.2 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES EN UNA VIGA CON TRES GRADOS DE INDETERMINACIÓN Y MOMENTO DE INERCIA VARIABLE

DATOS:

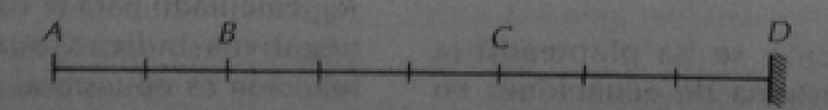
A 1 B 2 3 C 4 5 D

$EI_0$ $2EI_0$ $EI_0$

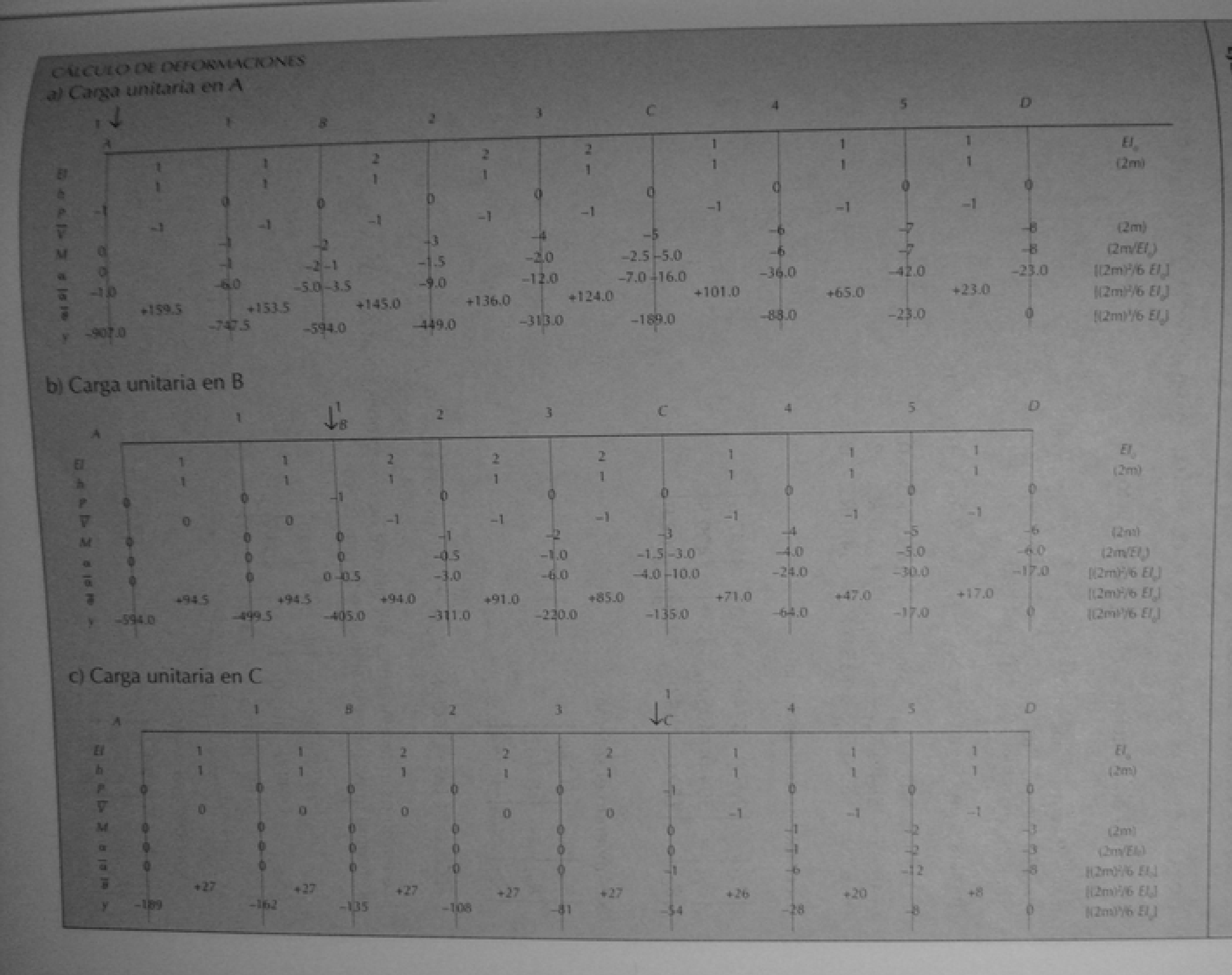
8 @ 2 = 16 m

Calcular las líneas de influencia de $R_A$, $R_B$, $R_C$ y $R_D$.

VIGA ISOSTÁTICA



## EJEMPLO 11.2 (*continuación*)



CÁLCULO DE DEFORMACIONES

a) Carga unitaria en A

$\overset{1}{\downarrow}$

| | A | | 1 | | B | | 2 | | 3 | | C | | 4 | | 5 | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_o$ |
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $P$ | −1 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| $\bar{V}$ | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | |
| $M$ | 0 | | −1 | | −2 | | −3 | | −4 | | −5 | | −6 | | −7 | | −8 | (2m) |
| $\alpha$ | 0 | | −1 | | −2 −1 | | −1.5 | | −2.0 | | −2.5 −5.0 | | −6 | | −7 | | −8 | $(2m/EI_o)$ |
| $\bar{\alpha}$ | −1.0 | | −6.0 | | −5.0 −3.5 | | −9.0 | | −12.0 | | −7.0 −16.0 | | −36.0 | | −42.0 | | −23.0 | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $\bar{\theta}$ | | +159.5 | | +153.5 | | +145.0 | | +136.0 | | +124.0 | | +101.0 | | +65.0 | | +23.0 | | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $y$ | −907.0 | | −747.5 | | −594.0 | | −449.0 | | −313.0 | | −189.0 | | −88.0 | | −23.0 | | 0 | $[(2m)^3/6\,EI_o]$ |

b) Carga unitaria en B

$\overset{1}{\downarrow}$

| | A | | 1 | | B | | 2 | | 3 | | C | | 4 | | 5 | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_o$ |
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $P$ | 0 | | 0 | | −1 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| $\bar{V}$ | | 0 | | 0 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | −1 | | |
| $M$ | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | −2 | | −3 | | −4 | | −5 | | −6 | (2m) |
| $\alpha$ | 0 | | 0 | | 0 | | −0.5 | | −1.0 | | −1.5 −3.0 | | −4.0 | | −5.0 | | −6.0 | $(2m/EI_o)$ |
| $\bar{\alpha}$ | 0 | | 0 | | 0 −0.5 | | −3.0 | | −6.0 | | −4.0 −10.0 | | −24.0 | | −30.0 | | −17.0 | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $\bar{\theta}$ | | +94.5 | | +94.5 | | +94.0 | | +91.0 | | +85.0 | | +71.0 | | +47.0 | | +17.0 | | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $y$ | −594.0 | | −499.5 | | −405.0 | | −311.0 | | −220.0 | | −135.0 | | −64.0 | | −17.0 | | 0 | $[(2m)^3/6\,EI_o]$ |

c) Carga unitaria en C

$\overset{1}{\downarrow}$

| | A | | 1 | | B | | 2 | | 3 | | C | | 4 | | 5 | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_o$ |
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $P$ | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| $\bar{V}$ | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | −1 | | −1 | | |
| $M$ | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | −2 | | −3 | (2m) |
| $\alpha$ | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | −2 | | −3 | $(2m/EI_o)$ |
| $\bar{\alpha}$ | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | −1 | | −6 | | −12 | | −8 | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $\bar{\theta}$ | | +27 | | +27 | | +27 | | +27 | | +27 | | +26 | | +20 | | +8 | | $[(2m)^2/6\,EI_o]$ |
| $y$ | −189 | | −162 | | −135 | | −108 | | −81 | | −54 | | −28 | | −8 | | 0 | $[(2m)^3/6\,EI_o]$ |

**EJEMPLO 11.2 (*continuación*)**

CÁLCULO DE LAS REACCIONES $R_A$, $R_B$ Y $R_C$ CUANDO LA CARGA UNITARIA ESTA EN EL PUNTO 1, (i=1)

El sistema de ecuaciones 11.5 queda en la forma:

$$\Delta_{A1} + \delta_{AA}R_{A1} + \delta_{AB}R_{B1} + \delta_{AC}R_{C1} = 0$$
$$\Delta_{B1} + \delta_{BA}R_{A1} + \delta_{BB}R_{B1} + \delta_{BC}R_{C1} = 0$$
$$\Delta_{C1} + \delta_{CA}R_{A1} + \delta_{CB}R_{B1} + \delta_{CC}R_{C1} = 0$$

Tomando en cuenta que $\Delta_{A1} = \delta_{1A}$, $\Delta_{B1} = \delta_{1B}$ y $\Delta_{C1} = \delta_{1C}$:

$$-747.5 - 907.0\ R_{A1} - 594.0\ R_{B1} - 189.0\ R_{C1} = 0$$
$$-499.5 - 594.0\ R_{A1} - 405.0\ R_{B1} - 135.0\ R_{C1} = 0$$
$$-162.0 - 189.0\ R_{A1} - 135.0\ R_{B1} - 54.0\ R_{C1} = 0$$

En planteamiento matricial

$$\begin{Bmatrix} R_{A1} \\ R_{B1} \\ R_{C1} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 907.0 & 594.0 & 189.0 \\ 594.0 & 405.0 & 135.0 \\ 189.0 & 135.0 & 54.0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 747.5 \\ 499.5 \\ 162.0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{Bmatrix} R_{A1} \\ R_{B1} \\ R_{C1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0.388 \\ 0.701 \\ -0.112 \end{Bmatrix}$$

CÁLCULO DE LAS REACCIONES $R_A$, $R_B$ Y $R_C$ CUANDO LA CARGA UNITARIA ESTÁ EN EL PUNTO 2, ($i$ = 2)

Los términos independientes del sistema de ecuaciones serán $\Delta_{A2}$, $\Delta_{B2}$ y $\Delta_{C2}$. Por lo tanto el sistema quedará en la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} R_{A2} \\ R_{B2} \\ R_{C2} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 907.0 & 594.0 & 189.0 \\ 594.0 & 405.0 & 135.0 \\ 189.0 & 135.0 & 54.0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 449 \\ 311 \\ 108 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{Bmatrix} R_{A2} \\ R_{B2} \\ R_{C2} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} -0.104 \\ 0.795 \\ 0.377 \end{Bmatrix}$$

**EJEMPLO 11.2. (*continuación*)**

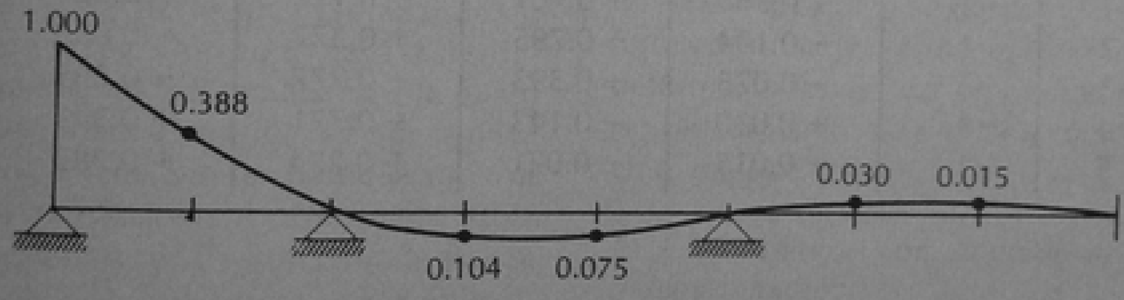
CÁLCULO PARA LAS CARGAS EN LOS PUNTOS 3, 4 Y 5

$$\begin{Bmatrix}\Delta_{A3}\\ \Delta_{B3}\\ \Delta_{C3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}313.0\\ 220.0\\ 81.0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}R_{A3}\\ R_{B3}\\ R_{C3}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}-0.075\\ 0.393\\ 0.777\end{Bmatrix}$$

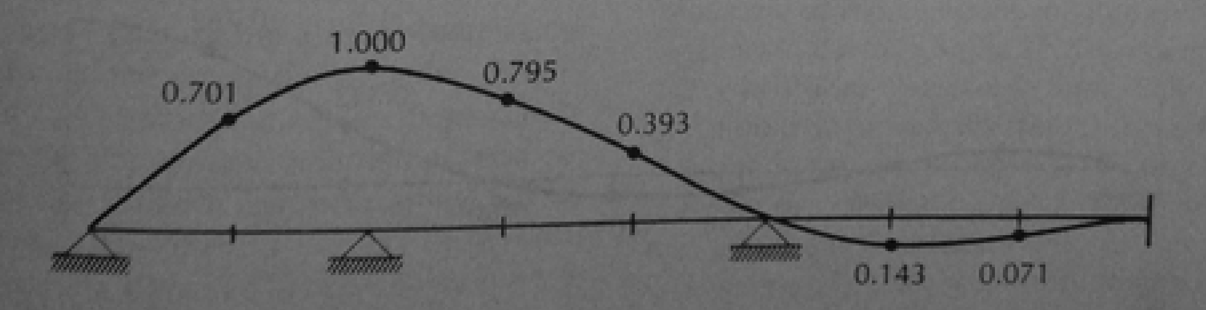
$$\begin{Bmatrix}\Delta_{A4}\\ \Delta_{B4}\\ \Delta_{C4}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}88.0\\ 64.0\\ 28.0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}R_{A4}\\ R_{B4}\\ R_{C4}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}0.030\\ -0.143\\ 0.771\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_{A5}\\ \Delta_{B5}\\ \Delta_{C5}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}23.0\\ 17.0\\ 8.0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}R_{A5}\\ R_{B5}\\ R_{C5}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}0.015\\ -0.071\\ 0.274\end{Bmatrix}$$

TRAZADO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE $R_A$, $R_B$ Y $R_C$

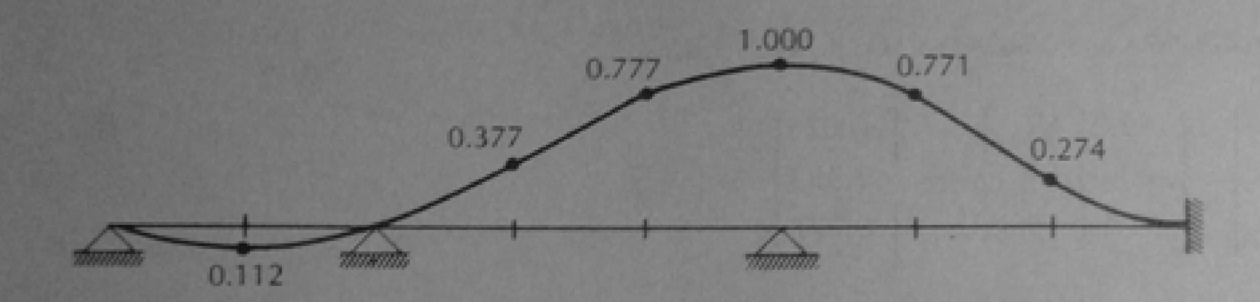



Línea de influencia de $R_A$




Línea de influencia de $R_B$

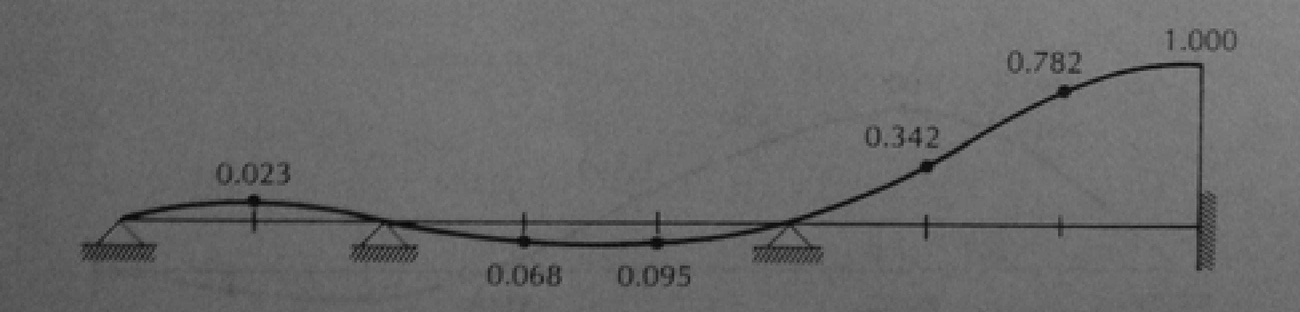
**EJEMPLO 11.2 (*continuación*)**




Línea de influencia de $R_C$

CÁLCULO DE LA REACCIÓN $R_D$

| Punto | Carga | $R_A$ | $R_B$ | $R_C$ | $R_D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | + 0.388 | + 0.701 | − 0.112 | + 0.023 |
| 2 | −1 | − 0.104 | + 0.795 | + 0.377 | − 0.068 |
| 3 | −1 | − 0.075 | + 0.393 | + 0.777 | − 0.095 |
| 4 | −1 | + 0.030 | − 0.143 | + 0.771 | + 0.342 |
| 5 | −1 | + 0.015 | − 0.071 | + 0.274 | + 0.782 |




Línea de influencia de $R_D$

## 11.2 Método de Müller-Breslau

El principio de Müller-Breslau, planteado en la Sección 10.3 para estructuras isostáticas, establece que *la línea de influencia de una reacción, de una fuerza cortante o de un momento flexionante tiene la misma forma que la viga deformada cuando se le impone un desplazamiento unitario correspondiente a la reacción o a la acción determinada.* Este principio también se aplica a las estructuras hiperestáticas, pero la diferencia con las estructuras isostáticas estriba en que las líneas de influencia de las primeras ya no están formadas por líneas rectas, como las de las isostáticas, sino por líneas curvas. De otra manera, no sería posible imponer el desplazamiento unitario a cierta acción conservando las restricciones correspondientes a las otras acciones o a las reacciones.

Si se examinan las líneas de influencia obtenidas en el ejemplo 11. 1 se puede comprobar esta situación. En la línea de influencia de $R_B$ se tiene un desplazamiento unitario de la reacción en *B*, pero la restricción de momento flexionante en este punto no permite ninguna rotación, así que la línea de influencia tiene que ser continua sobre el apoyo; en las reacciones *A* y *C* no puede haber desplazamientos, y la restricción de fuerza cortante obliga a que la línea sea continua. Estas condiciones sólo pueden cumplirse si la línea de influencia es curva.

Observando la línea de influencia de fuerza cortante en el punto 3 del mismo ejemplo, se comprueba que en dicho punto hay un desplazamiento relativo unitario de los puntos situados inmediatamente a la izquierda y a la derecha. La parte de la línea de influencia situada a la derecha del punto 3 debe ser continua, para que no se rompa la restricción de momento flexionante, y debe pasar por los puntos *B* y *C*, para que no se rompan las restricciones de las reacciones en dichos puntos. También para que no se rompa la restricción de momento flexionante en el punto 3, las tangentes a la línea de influencia a ambos lados del punto deben ser paralelas. Todas estas condiciones obligan a que la línea de influencia sea curva.

En el caso de la línea de influencia de momento flexionante en el punto 4, del mismo ejemplo 11. 1, se puede ver que la línea de influencia pasa por las tres reacciones y que no hay ningún desplazamiento relativo del tipo de eliminación de la restricción de cortante. Nuevamente, la línea de influencia tiene que ser curva para que se cumplan estas condiciones.

Al ser curvas las líneas de influencia de estructuras hiperestáticas, no es tan sencillo obtener las ordenadas a partir de la imposición de una desplazamiento unitario, como en estructuras isostáticas. Pero se pueden trazar en forma cualitativa e inclusive obtener las ordenadas gráficamente, haciendo esquemas a escala. Si se desea calcularlas en forma cuantitativa, es necesario obtener las deformaciones en varios puntos de vigas isostáticas, en forma similar a como se hace en el método directo.

### *11.2.1 Estructuras con un grado de indeterminación*

Supóngase que se desea calcular la línea de influencia de momento flexionante en *B* de la viga mostrada en la figura 11.5-a. Por el Principio de Müller- Breslau, la línea de influencia tendrá la forma mostrada en la figura II.5-*b*, con un giro unitario en *B* correspondiente a la eliminación de la restricción de momento, sin desplazamiento en las reacciones *A* y *B*, y sin discontinuidades. Para calcular las ordenadas de la línea de influencia en los puntos 1, 2 y 3 se puede proceder de la siguiente manera.

Se elimina la restricción de momento en *B* con lo que la viga se vuelve isostática.

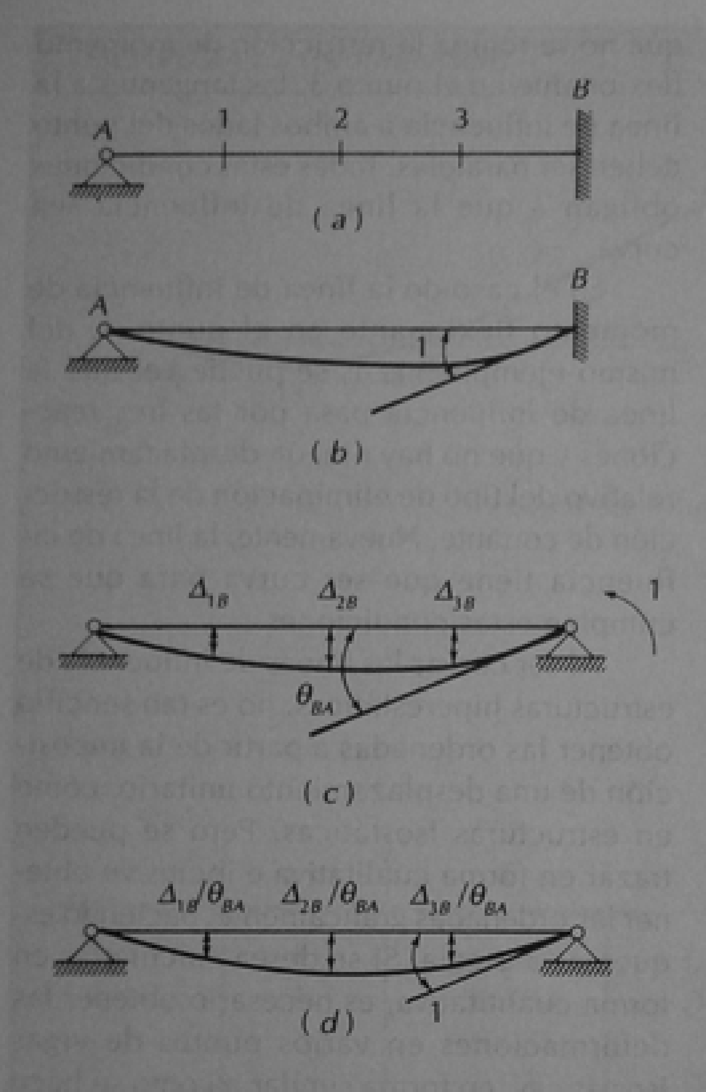



**Figura 11.5.** Obtención de la línea de influencia en una viga de un grado de indeterminación por el Principio de Müller-Breslau

Después se le aplica en el mismo punto *B* un momento cualquiera que produzca una rotación $\theta_{BA}$; por comodidad este momento suele ser unitario, como en la figura 11.5-*c*. Se calculan las deflexiones correspondientes en los puntos en que se desea calcular las ordenadas de la línea de influencia, $\Delta_{1B}$, $\Delta_{2B}$ y $\Delta_{3B}$. Ahora bien, si el momento aplicado, en vez de ser unitario, tuviese un valor de $1/\theta_{BA}$, la rotación en *B* valdría 1, y las deflexiones en los puntos 1, 2 y 3 serían, por lo tanto, las ordenadas de la línea de influencia. Las deflexiones correspondientes a un momento $1/\theta_{BA}$ serían las ya calculadas divididas también entre $\theta_{BA}$, ya que el comportamiento es lineal. Entonces, basta dividir las ordenadas $\Delta_{1B}$, $\Delta_{2B}$ y $\Delta_{3B}$ entre $\theta_{BA}$, para tener la línea de influencia, como se muestra en la figura 11.5 -*d*.

De manera semejante se pueden obtener las líneas de influencia de otras acciones o reacciones, eliminado las restricciones correspondientes. En el siguiente ejemplo se ilustra el procedimiento.

**Ejemplo 11.3.** Se calculan las líneas de influencia de la reacción en *A* y del momento de empotramiento en *B* de una viga de un grado de indeterminación con momento de inercia variable. Para calcular la de la reacción, $R_A$, se elimina la restricción correspondiente con lo que se tiene una viga isostática que es el voladizo mostrado al principio del ejemplo. De acuerdo con el Principio de Müller-Breslau, la deflexión en el extremo del voladizo debe valer 1, y no debe haber rotación de la viga en el empotramiento.

Con el fin de obtener la configuración buscada, se aplica una carga unitaria en el extremo del voladizo y se calcula la deflexión en las secciones en que se desea conocer las ordenadas de la línea de influencia. Estas deflexiones se han calculado en el ejemplo con el Método de Newmark, ya que es el más sencillo cuando el momento de inercia es variable como en este caso. El desarrollo del método es igual al que se ha visto en varios ejemplos; nótese únicamente que los valores de $\bar{\alpha}$ se calcularon con las ecuaciones de distribución parabólica, ya que, aunque el diagrama de momentos flexionantes es lineal, el diagrama de curvaturas $\alpha$ no lo es porque *EI* es variable.

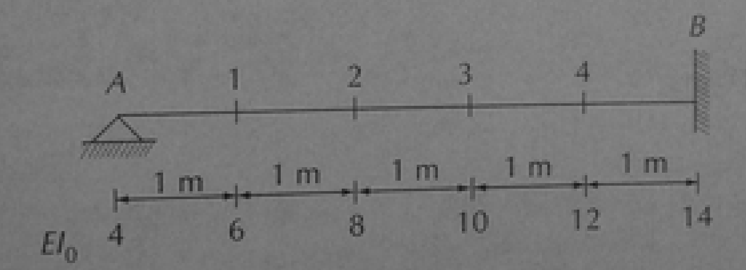
En el penúltimo renglón de la tabla se puede ver que en el extremo del voladizo ocurre una deflexión de (90.087 $m^3$/24 *EIo*). Como se desea que esta deflexión sea unitaria, basta dividir todas las deflexiones entre el valor mencionado para tener la deflexión unitaria en el extremo y las ordenadas

de la línea de influencia en las otras secciones. Estos valores son los que aparecen en el último renglón de la tabla. Obsérvese que los términos factorizados a la derecha de la tabla se eliminan al hacer la división.

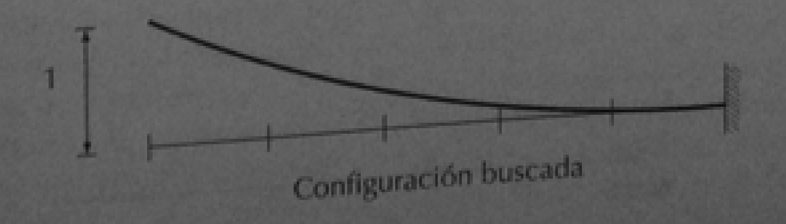
La línea de influencia del momento de empotramiento en *B* debe tener la forma mostrada en el croquis de la segunda parte del ejemplo, o sea, una rotación unitaria en *B* y deflexiones nulas en los apoyos. Para obtener esta configuración, se aplica un momento unitario en el apoyo *B* de la viga isostática (en el ejemplo se aplicó de 100 para no tener muchos decimales) y se calculan la rotación producida por el momento en dicho apoyo y las deflexiones en todas las secciones. La rotación resultante es de (−360.53 m/24 *EIo*) obtenida como la suma de la rotación promedio $\bar{\theta}$ de −276.53, en el penúltimo tramo de la derecha, y el ángulo concentrado $\bar{\alpha}$ de −84.00 en el apoyo derecho. Para tener la configuración buscada, todas las rotaciones y deflexiones producidas por el momento unitario que se aplicó deben dividirse entonces entre la rotación de (−360.53 m/24 *EIo*). De esta manera se obtiene el último renglón de la tabla que corresponde a las ordenadas de la línea de influencia.

**EJEMPLO 11.3. CALCULAR LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LA REACCIÓN EN *A* Y DEL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO EN *B* DE UNA VIGA DE MOMENTO DE INERCIA VARIABLE USANDO EL PRINCIPIO DE MÜLLER-BRESLAU**

DATOS:

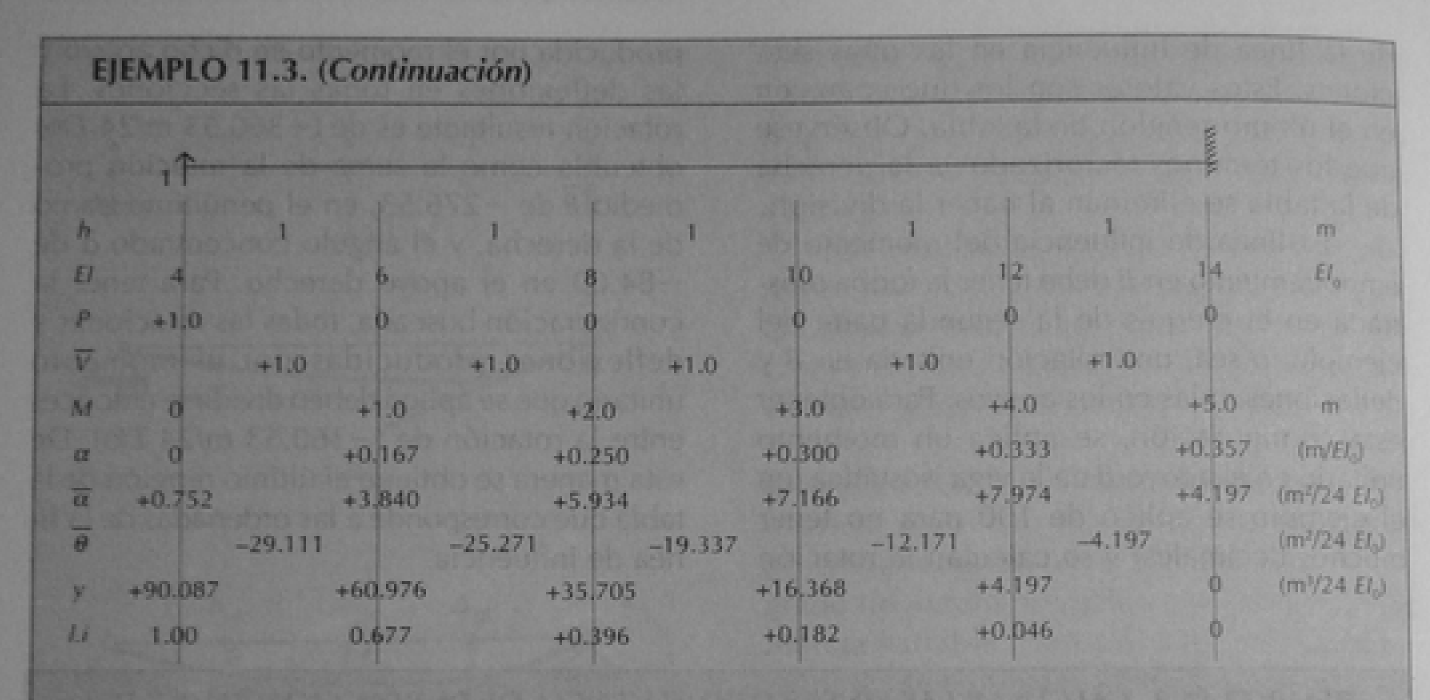



LÍNEA DE INFLUENCIA DE $R_A$

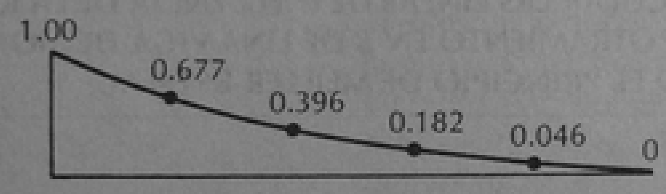



Configuración buscada

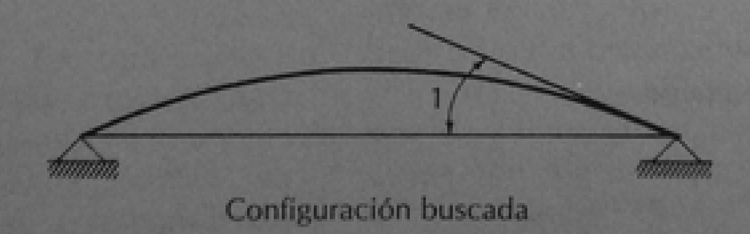
## EJEMPLO 11.3. (*Continuación*)



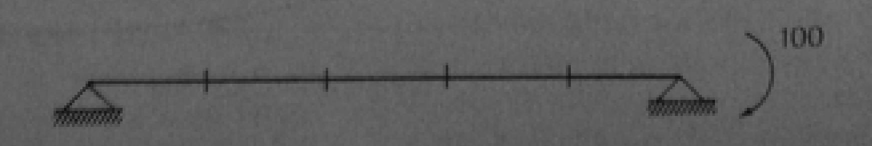

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | m |
| $EI$ | 4 | | 6 | | 8 | | 10 | | 12 | | 14 | $EI_0$ |
| $P$ | +1.0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| $\overline{V}$ | | +1.0 | | +1.0 | | +1.0 | | +1.0 | | +1.0 | | |
| $M$ | 0 | | +1.0 | | +2.0 | | +3.0 | | +4.0 | | +5.0 | m |
| $\alpha$ | 0 | | +0.167 | | +0.250 | | +0.300 | | +0.333 | | +0.357 | $(m/EI_0)$ |
| $\overline{\alpha}$ | +0.752 | | +3.840 | | +5.934 | | +7.166 | | +7.974 | | +4.197 | $(m^2/24\ EI_0)$ |
| $\overline{\theta}$ | | −29.111 | | −25.271 | | −19.337 | | −12.171 | | −4.197 | | $(m^2/24\ EI_0)$ |
| $y$ | +90.087 | | +60.976 | | +35.705 | | +16.368 | | +4.197 | | 0 | $(m^3/24\ EI_0)$ |
| $Li$ | 1.00 | | 0.677 | | +0.396 | | +0.182 | | +0.046 | | 0 | |

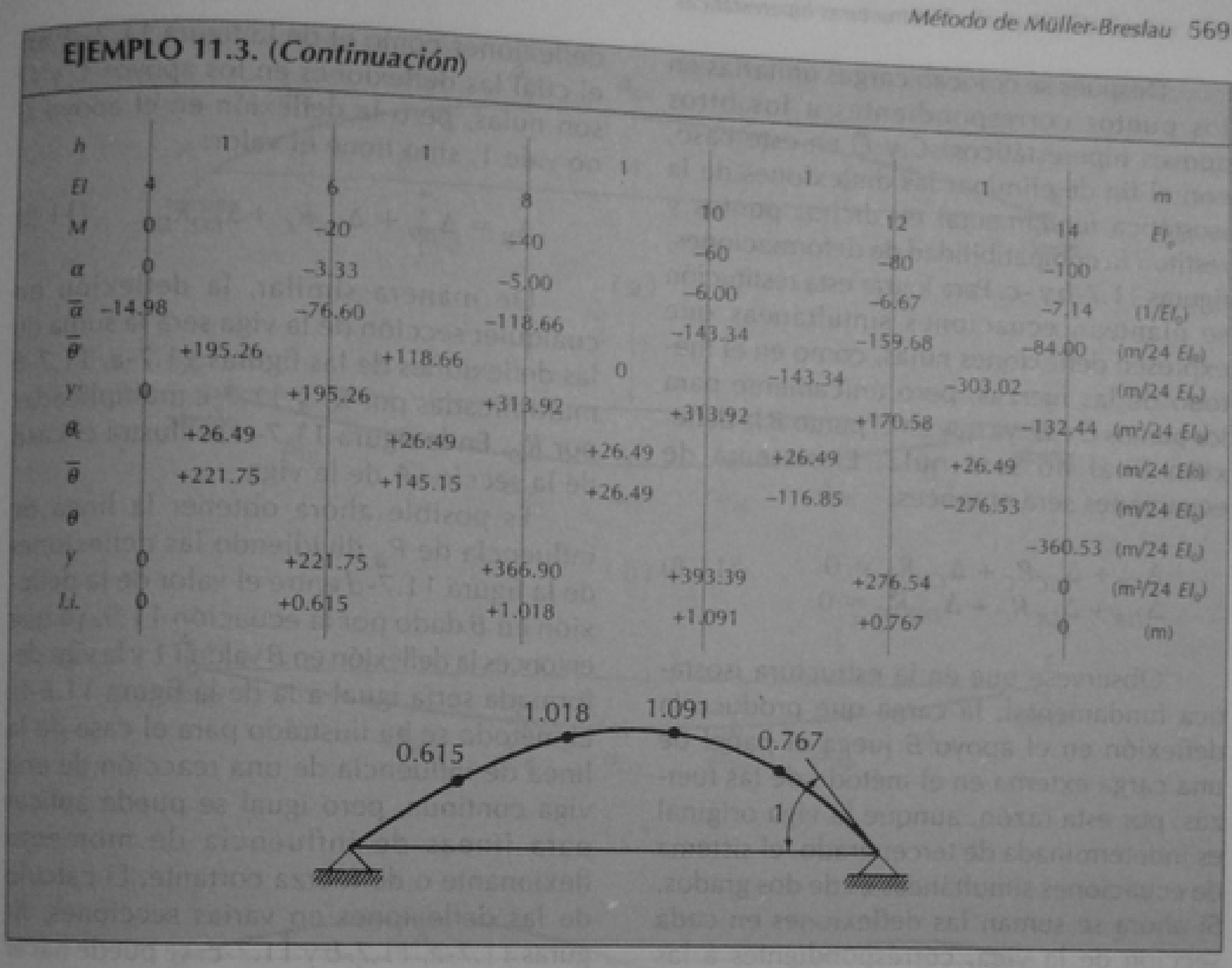



LÍNEA DE INFLUENCIA DE $\overline{M}_B$:




Configuración buscada





**EJEMPLO 11.3. (*Continuación*)**

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | m |
| $EI$ | 4 | | 6 | | 8 | | 10 | | 12 | | 14 | $EI_o$ |
| $M$ | 0 | | −20 | | −40 | | −60 | | −80 | | −100 | |
| $\alpha$ | 0 | | −3.33 | | −5.00 | | −6.00 | | −6.67 | | −7.14 | $(1/EI_o)$ |
| $\overline{\alpha}$ | −14.98 | | −76.60 | | −118.66 | | −143.34 | | −159.68 | | −84.00 | $(m/24\ EI_o)$ |
| $\overline{\theta}$ | | +195.26 | | +118.66 | | 0 | | −143.34 | | −303.02 | | $(m/24\ EI_o)$ |
| $y'$ | 0 | | +195.26 | | +313.92 | | +313.92 | | +170.58 | | −132.44 | $(m^2/24\ EI_o)$ |
| $\theta_o$ | | +26.49 | | +26.49 | | +26.49 | | +26.49 | | +26.49 | | $(m/24\ EI_o)$ |
| $\overline{\theta}$ | | +221.75 | | +145.15 | | +26.49 | | −116.85 | | −276.53 | | $(m/24\ EI_o)$ |
| $\theta$ | | | | | | | | | | | −360.53 | $(m/24\ EI_o)$ |
| $y$ | 0 | | +221.75 | | +366.90 | | +393.39 | | +276.54 | | 0 | $(m^2/24\ EI_o)$ |
| L.I. | 0 | | +0.615 | | +1.018 | | +1.091 | | +0.767 | | 0 | (m) |



### *11.2.2 Estructuras con varios grados de indeterminación*

La línea de influencia de una estructura hiperestática con varios de grados de indeterminación debe ser tal que la deformación de la estructura deformada sea unitaria en el punto en que se desea obtener la línea de influencia y que se cumplan con todas las otras condiciones de restricción. Por ejemplo, con referencia a la viga continua de la figura 11. 6-*a*, si se desea la línea de influencia de la reacción $R_B$, se debe tener una deflexión unitaria en el apoyo *B*, deflexiones nulas en los otros apoyos y no se deben tener discontinuidades de momento flexionante o de fuerza cortante en otras secciones de la viga. Por lo tanto, la viga deformada debe ser como la mostrada cualitativamente en la figura 11.6-*b*. Para obtener las ordenadas de esta viga deformada, o sea, de la línea de influencia de $R_B$, puede procederse de la siguiente manera.

Primero se coloca en la viga isostática fundamental, figura 11.7-*a*, una carga cualquiera en el punto correspondiente a la reacción cuya línea de influencia se desea obtener, o sea, en el punto *B* en este caso. En la figura 11.7-*a* se ha puesto una carga de 10 unidades, pero puede ser cualquiera. Desde luego que la deflexión en el punto *B*, $\Delta_{BB}$, no será unitaria, pero luego se ajustará para que lo sea. El sentido de la carga aplicada es tal que la deflexión en el punto *B* tenga el sentido positivo de la línea de in fluencia, hacia arriba en este caso.

Después se colocan cargas unitarias en los puntos correspondientes a los otros apoyos hiperestáticos, *C* y *D* en este caso, con el fin de eliminar las deflexiones de la isostática fundamental en dichos puntos y restituir la compatibilidad de deformaciones, figuras 11.7-*b* y -*c*. Para lograr esta restitución se plantean ecuaciones simultáneas que expresen deflexiones nulas, como en el método de las fuerzas, pero únicamente para los puntos *C* y *D*, ya que en el punto *B* la deflexión final no será nula. El sistema de ecuaciones será entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_{CB} + \Delta_{CC}R_C + \Delta_{CD}R_D = 0 \\ \Delta_{DB} + \Delta_{DC}R_C + \Delta_{DD}R_D = 0 \end{aligned} \qquad (11.8)$$

Obsérvese que en la estructura isostática fundamental, la carga que produce la deflexión en el apoyo *B* juega el papel de una carga externa en el método de las fuerzas; por esta razón, aunque la viga original es indeterminada de tercer grado, el sistema de ecuaciones simultáneas es de dos grados. Si ahora se suman las deflexiones en cada sección de la viga, correspondientes a las figuras 11.7-*a*, -*b* y -*c*, multiplicadas las dos segundas por el valor resultante de $R_C$ y $R_D$, respectivamente, se obtiene un patrón de deflexiones como el de la figura 11.7-*d*, en el cual las deflexiones en los apoyos *C* y *D* son nulas, pero la deflexión en el apoyo *B* no vale 1, sino tiene el valor:

$$\Delta_B = \Delta_{BB} + \Delta_{BC}R_C + \Delta_{BD}R_D \qquad (11.9)$$

De manera similar, la deflexión en cualquier sección de la viga será la suma de las deflexiones de las figuras 11.7-*a*, 11.7-*b* multiplicadas por $R_C$ y 11.7-*c* multiplicadas por $R_D$. En la figura 11.7-*d* se ilustra el caso de la sección 1 de la viga.

Es posible ahora obtener la línea de influencia de $R_B$ dividiendo las deflexiones de la figura 11.7-*d* entre el valor de la deflexión en *B* dado por la ecuación 11.9, ya que entonces la deflexión en *B* valdría 1 y la viga deformada sería igual a la de la figura 11.6-*b*. El método se ha ilustrado para el caso de la línea de influencia de una reacción de una viga continua, pero igual se puede aplicar para líneas de influencia de momento flexionante o de fuerza cortante. El cálculo de las deflexiones en varias secciones, figuras 11.7-*a*, 11.7-*b* y 11.7-*c*, se puede hacer por cualquier método. Para el caso de vigas de sección variable, el método de Newmark es el más conveniente.

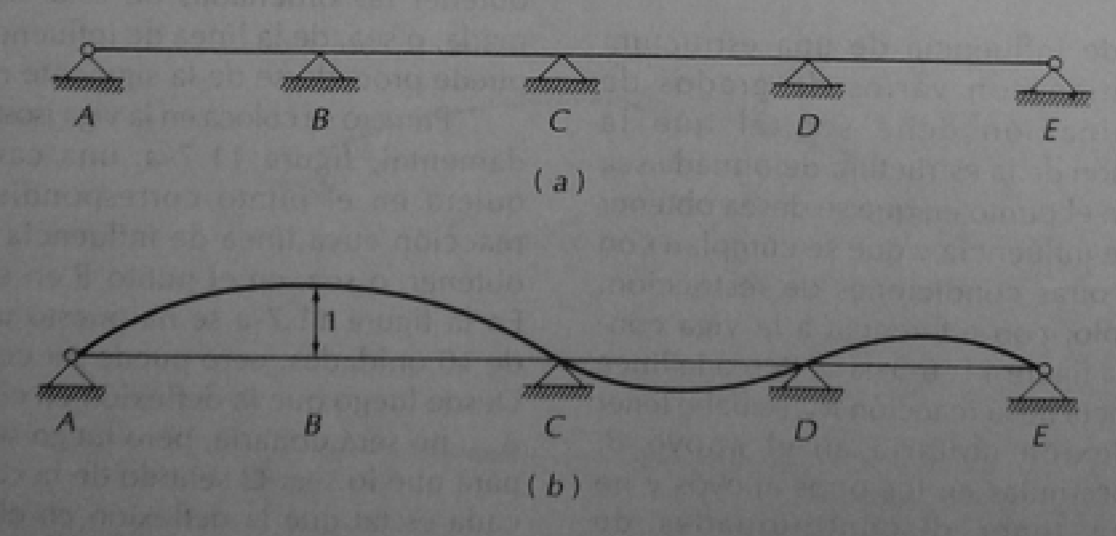



**Figura 11.6.** Línea de influencia de $R_B$ por el Principio de Müller-Breslau para una viga con tres grados de indeterminación

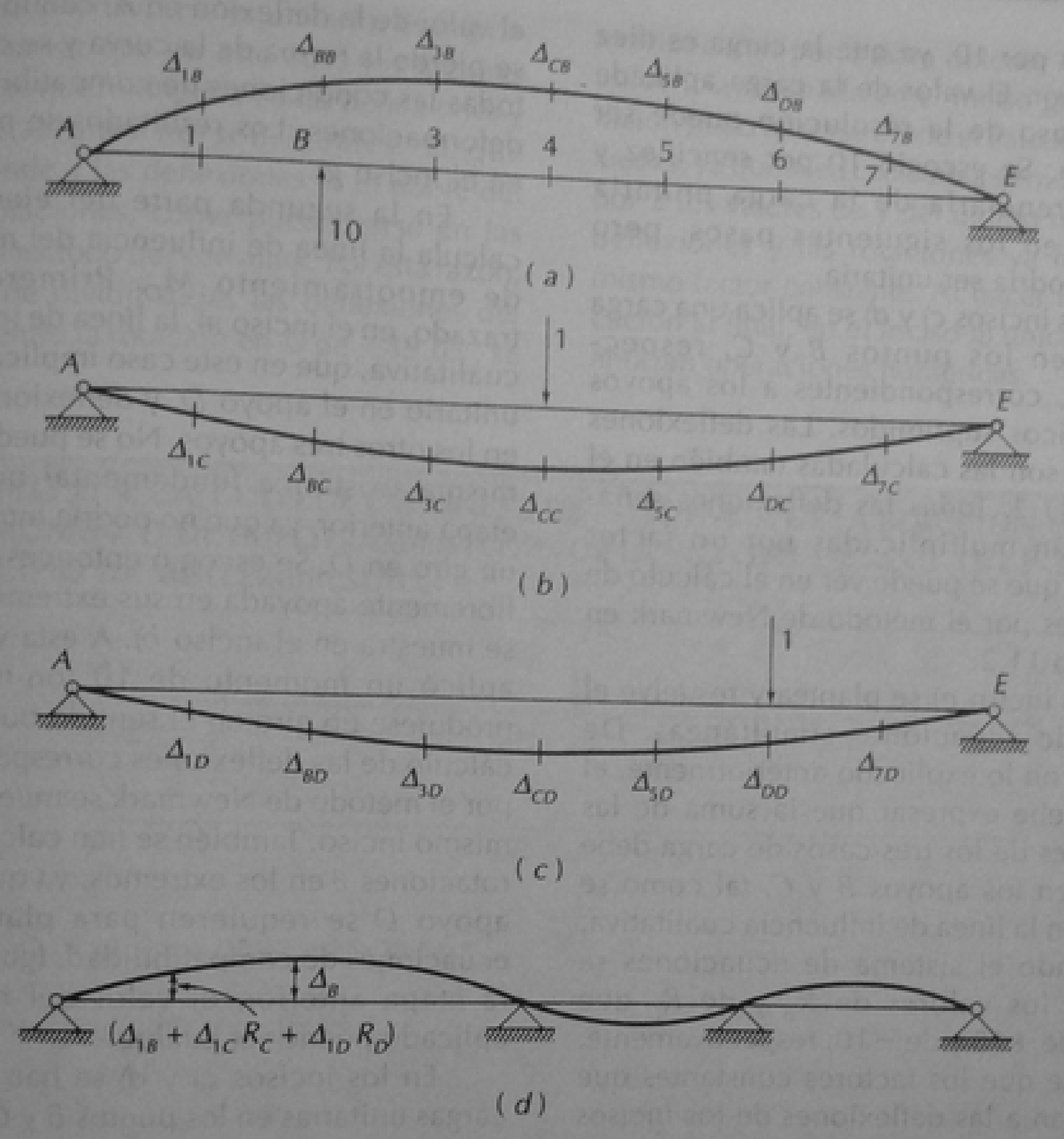



**Figura 11.7.** Obtención de la línea de influencia de $R_B$ de la viga de la figura 11.6

**Ejemplo 11.4** Se calculan en este ejemplo las líneas de influencia de la reacción en el apoyo *A* y del momento de empotramiento en *D* de la misma viga resuelta en el ejemplo 11.2, pero usando ahora el Principio de Müller-Breslau.

En la primera parte se calcula la línea de influencia de $R_A$. En el inciso *a*) se ha trazado esta línea de influencia en forma cualitativa para comprender mejor el desarrollo del ejemplo. En el inciso *b*) se ha escogido como viga isostática fundamental un voladizo empotrado en *D*, o sea, se han eliminado los tres apoyos hiperestáticos de la viga original. En este mismo inciso se indica que se ha aplicado a la isostática fundamental una carga de 10 unidades hacia arriba; se aplicó en este sentido porque la ordenada de la línea de influencia es positiva en el punto *A* como se muestra en la línea de influencia cualitativa. En la gráfica de este inciso se han incluido los valores de las deflexiones de la viga, tomados del inciso *a*) del ejemplo 11.2, pero cambiando el sentido de la carga, y por tanto de las deflexiones, y multiplicando las deflexiones

calculadas por 10, ya que la carga es diez veces mayor. El valor de la carga aplicada en este paso de la resolución puede ser cualquiera. Se escogió 10 por sencillez y para diferenciarla de la carga unitaria aplicada en los siguientes pasos, pero también podría ser unitaria.

En los incisos *c*) y *d*) se aplica una carga unitaria en los puntos *B* y *C*, respectivamente, correspondientes a los apoyos hiperestáticos suprimidos. Las deflexiones señaladas son las calculadas también en el ejemplo 11.2. Todas las deflexiones señaladas están multiplicadas por un factor constante que se puede ver en el cálculo de deflexiones por el método de Newmark en el ejemplo 11.2.

En el inciso *e*) se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas. De acuerdo con lo explicado anteriormente, el sistema debe expresar que la suma de las deflexiones de los tres casos de carga debe ser nula en los apoyos *B* y *C*, tal como se muestra en la línea de influencia cualitativa. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de $R_B$ y de $R_C$ que resultan de +18 y de −10, respectivamente. Obsérvese que los factores constantes que multiplican a las deflexiones de los incisos *b*), *c*) y *d*) se anulan ya que los segundos miembros de las ecuaciones simultáneas son ceros. El valor positivo de $R_B$ indica que tiene el mismo sentido que la carga unitaria aplicada en *B*, hacia abajo. Por lo tanto, la viga tiende a levantarse en el apoyo *B* por efecto de la carga de 10 unidades aplicada en *A*. Lo contrario sucede en el apoyo *C*.

En el inciso *f*) se muestran las deflexiones que resultan de sumar las correspondientes a los tres casos de carga anteriores, pero multiplicando las del inciso *c*) por el valor calculado de $R_B$ y las del inciso *d*) por el valor calculado de $R_C$. Esta viga ya tiene la forma de la línea de influencia, pero la deflexión en *A* no es unitaria. Para que lo sea, basta dividir todas las deflexiones entre el valor de la deflexión en *A*, con lo cual no se pierde la forma de la curva y se cumplen todas las condiciones de compatibilidad de deformaciones. Los resultados se muestran en el inciso *g*).

En la segunda parte del ejemplo se calcula la línea de influencia del momento de empotramiento $M_D$. Primero se ha trazado, en el inciso *a*), la línea de influencia cualitativa, que en este caso implica un giro unitario en el apoyo *D*, y deflexiones nulas en los otros tres apoyos. No se puede usar la misma isostática fundamental que en la etapa anterior, ya que no podría introducirse un giro en *D*. Se escogió entonces una viga libremente apoyada en sus extremos, como se muestra en el inciso *b*). A esta viga se le aplicó un momento de 10 ton-m que le produjese un giro en el sentido buscado. El cálculo de las deflexiones correspondientes por el método de Newmark se muestra en el mismo inciso. También se han calculado las rotaciones $\theta$ en los extremos, ya que las del apoyo *D* se requieren para plantear las ecuaciones de compatibilidad. Igual que en la etapa anterior, el valor del momento aplicado puede ser cualquiera.

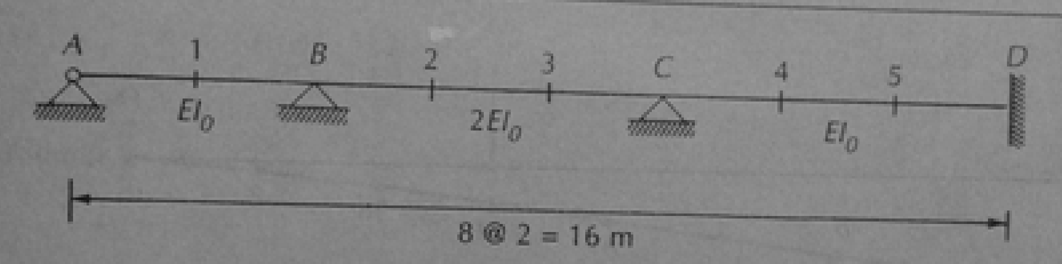
En los incisos *c*) y *d*) se han aplicado cargas unitarias en los puntos *B* y *C*, respectivamente, y se han calculado las deflexiones y rotaciones correspondientes, con el fin de eliminar las deflexiones en estos puntos producidas por el momento aplicado en *D*. El sistema de dos ecuaciones del inciso *e*) plantea que la suma de las deflexiones de los tres casos de carga sea nula en los apoyos *B* y *C*, después de multiplicar por $R_B$ y por $R_C$ las producidas por las cargas unitarias. Los factores constantes que aparecen en los cálculos de deflexiones se eliminan al plantear el sistema de ecuaciones.

Ya calculados los valores de $R_B$ y $R_C$, se suman las deflexiones de los tres casos de carga con lo que se obtiene la configuración de deflexiones mostrada en el inciso *f*). Las deflexiones ya son nulas en *B* y en *C*, pero

el giro en $D$ todavía no es unitario. Es importante observar que en este caso los factores constantes que multiplican a las deflexiones y a las rotaciones no son iguales. El que corresponde a las deflexiones es el doble del de las rotaciones, como puede verse en las tablas del método de Newmark. Por esta razón, después de dividir todas las deflexiones del inciso *f*) entre la rotación en $D$ de $-49.65$ , se multiplicaron por 2 para obtener la línea de influencia mostrada en el inciso *g*). Esta operación pudo hacerse desde el cálculo de deflexiones, ya que si en cada tabla se multiplicaban por 2 los valores de $y$ del último renglón, las deflexiones y las rotaciones ya tendrían el mismo factor constante. Al hacer la multiplicación al final, en el inciso *g*) únicamente, se ahorran operaciones numéricas.

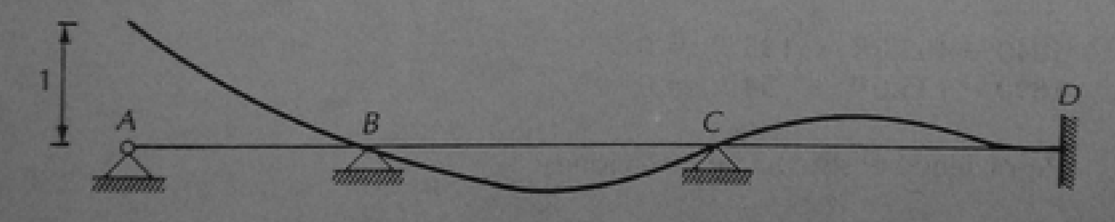
**EJEMPLO 11.4. CÁLCULO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LA REACCIÓN $R_A$ Y DEL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO $M_D$ DE LA VIGA DEL EJEMPLO 11.2 POR EL PRINCIPIO DE MÜLLER-BRESLAU**

DATOS:

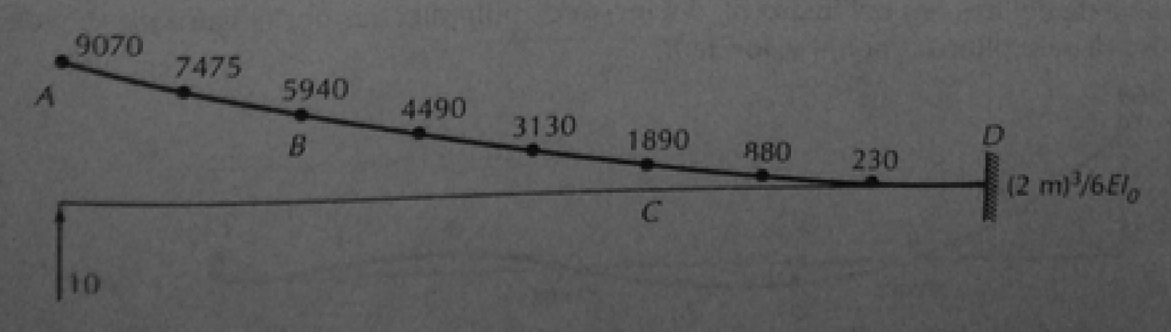



CÁLCULO DE LA LÍNEA DE INFLUENCIA DE $R_A$

*a*) Línea de influencia cualitativa.

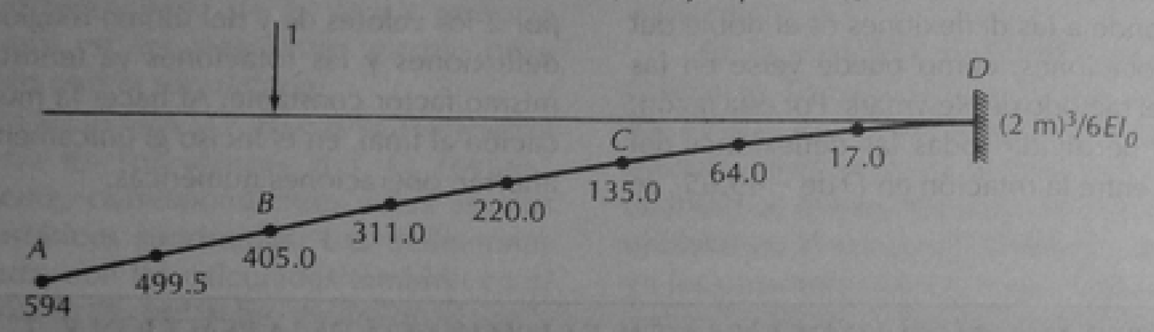



*b*) Viga isostática con una carga en $A$ (ver ejemplo 11.2).

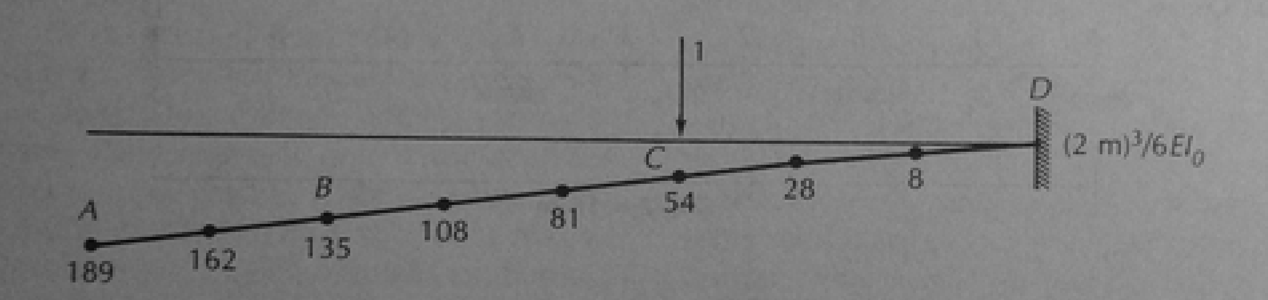


**EJEMPLO 11.4 (*continuación*)**

*c)* Viga isostática con una carga unitaria en *B* (ver ejemplo 11.2).




*d)* Viga isostática con una carga unitaria en *C* (ver ejemplo 11.2)



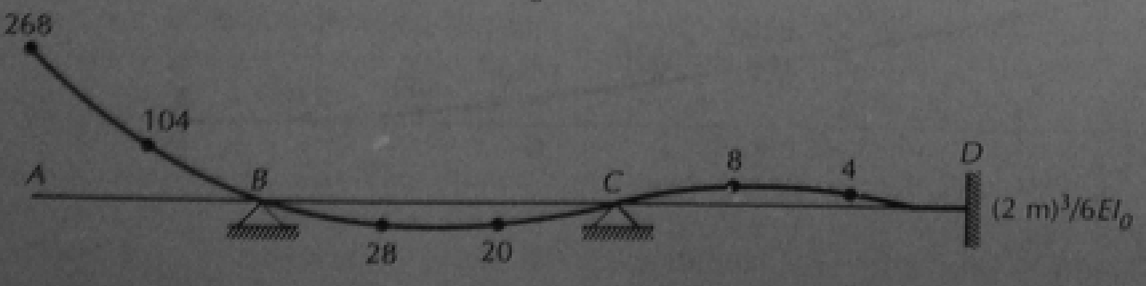

*e)* Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad (ecuaciones 11.8).

$$5940 - 405.0R_B - 135\ R_C = 0$$
$$1890 - 135.0R_B - \ 54\ R_C = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

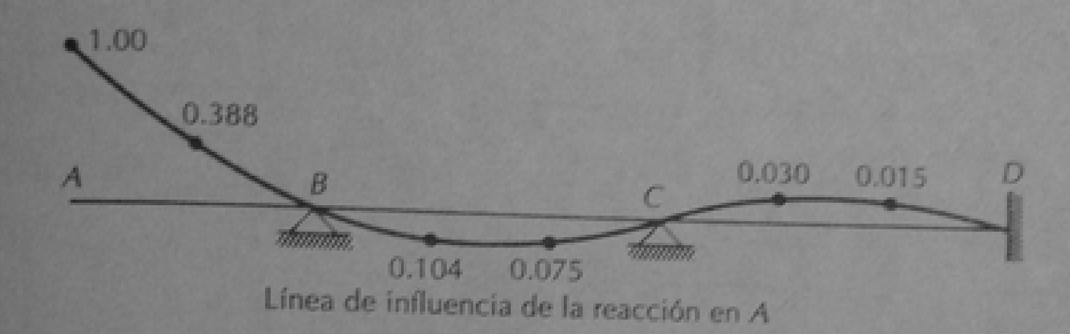
$$R_B = +\ 18$$
$$R_C = -\ 10$$

*f)* Suma de deflexiones del inciso *b*), del inciso *c*) multiplicadas por el valor de $R_B$ y del inciso *d*) multiplicadas por el valor de $R_C$.



**EJEMPLO 11.4 (*continuación*)**

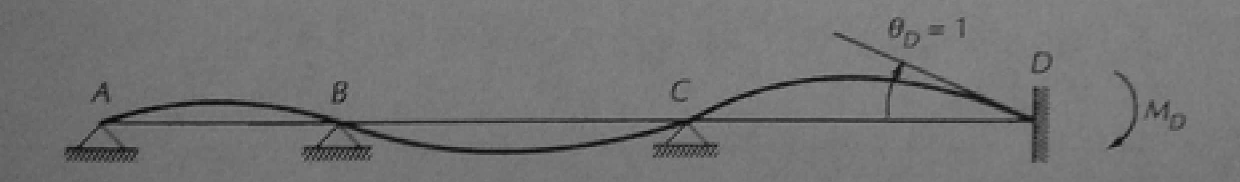
g) Ajuste de la viga deformada para que la deflexión en el apoyo $A$ sea igual a 1.



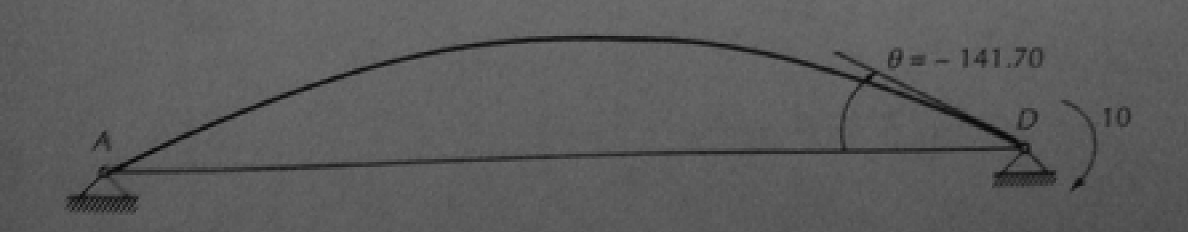

Línea de influencia de la reacción en $A$

CÁLCULO DE LA LÍNEA DE INFLUENCIA DE $M_D$

a) Línea de influencia cualitativa




b) Viga isostática con un momento en $D$



## EJEMPLO 11.4 (*continuación*)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_0$ |
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $M$ | 0 | | −1.25 | | −2.50 | | −3.75 | | −5.00 | | −6.25 | | −7.50 | | −8.75 | | −10 | ton-m |
| $\alpha$ | 0 | | −1.25 | | −2.50 −1.25 | | −1.87 | | −2.50 | | −3.12 −6.25 | | −7.50 | | −8.75 | | −10 | ton-m/$EI_0$ |
| $\overline{\alpha}$ | −1.25 | | −7.50 | | −6.25 −4.37 | | −11.23 | | −14.99 | | −8.74 −20.00 | | −45.00 | | −52.50 | | −28.75 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\theta'$ | | +7.50 | | 0 | | −10.62 | | −21.85 | | −36.84 | | −65.58 | | −110.58 | | −163.08 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y'$ | 0 | | +7.50 | | +7.50 | | −3.12 | | −24.97 | | −61.81 | | −127.39 | | −237.97 | | −401.05 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |
| $\theta c$ | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | +50.13 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\theta$ | +58.88 | | | | | | | | | | | | | | | | −141.70 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\overline{\theta}$ | | +57.63 | | +50.13 | | +39.51 | | +28.28 | | +13.29 | | −15.45 | | −60.45 | | −112.95 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y$ | 0 | | +57.63 | | +107.76 | | +147.27 | | +175.55 | | +188.84 | | +173.39 | | +112.94 | | 0 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |

**EJEMPLO 11.4 (*continuación*)**

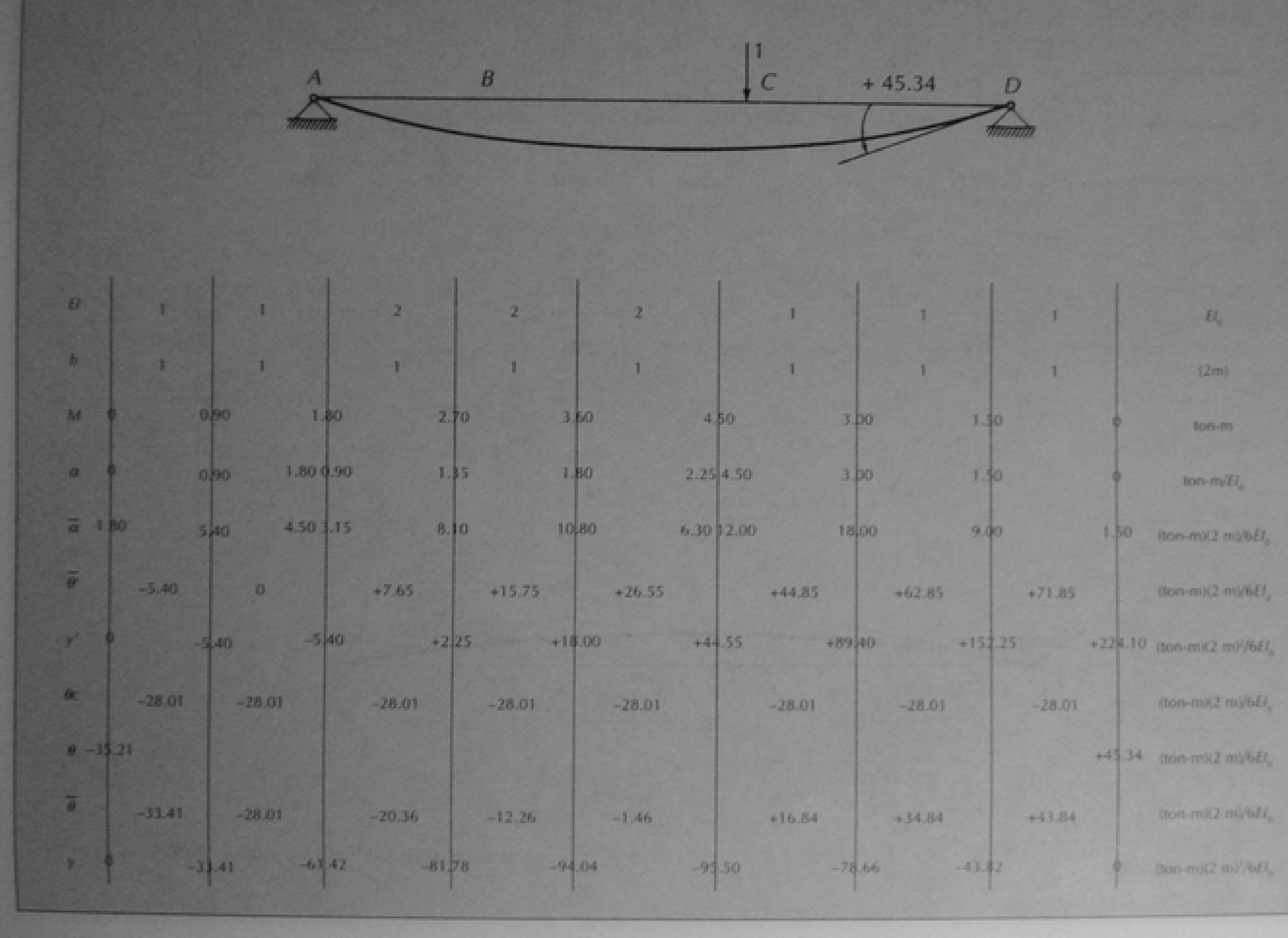
c) Viga isostática con una carga unitaria en *B*



| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_0$ |
| $h$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $M$ | 0 | | 1.50 | | 3.00 | | 2.50 | | 2.00 | | 1.50 | | 1.00 | | 0.50 | | 0 | ton-m |
| $\alpha$ | 0 | | 1.50 | | 3.00 1.50 | | 1.25 | | 1.00 | | 0.75 1.50 | | 1.00 | | 0.50 | | 0 | ton-m/$EI_0$ |
| $\bar{\alpha}$ | 1.50 | | 9.00 | | 7.50 4.25 | | 7.50 | | 6.00 | | 2.50 4.00 | | 6.00 | | 3.00 | | 0.50 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\bar{\theta}'$ | | −9.00 | | 0 | | +11.75 | | +19.25 | | +25.25 | | +31.75 | | +37.75 | | +40.75 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y'$ | 0 | | −9.00 | | −9.00 | | +2.75 | | +22.00 | | +47.25 | | +79.00 | | +116.75 | | +157.50 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |
| $\theta_C$ | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | −19.69 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\theta$ | −30.19 | | | | | | | | | | | | | | | | +21.56 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\bar{\theta}$ | | −28.69 | | −19.69 | | −7.94 | | −0.44 | | +5.56 | | +12.06 | | +18.06 | | +21.06 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y$ | 0 | | −28.69 | | −48.38 | | −56.32 | | −56.76 | | −51.12 | | −39.14 | | −21.08 | | 0 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |

**EJEMPLO 11.4 (*continuación*)**

d) Viga isostática con una carga unitaria *C*




| | A | | | | | | | | | | C | | | | | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EI$ | | 1 | | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | $EI_0$ |
| $b$ | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | (2m) |
| $M$ | 0 | | 0.90 | | 1.80 | | 2.70 | | 3.60 | | 4.50 | | 3.00 | | 1.50 | | 0 | ton-m |
| $\alpha$ | 0 | | 0.90 | | 1.80 0.90 | | 1.35 | | 1.80 | | 2.25 4.50 | | 3.00 | | 1.50 | | 0 | ton-m/$EI_0$ |
| $\overline{\alpha}$ | 1.80 | | 5.40 | | 4.50 3.15 | | 8.10 | | 10.80 | | 6.30 12.00 | | 18.00 | | 9.00 | | 1.50 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\overline{\theta}'$ | | −5.40 | | 0 | | +7.65 | | +15.75 | | +26.55 | | +44.85 | | +62.85 | | +71.85 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y'$ | 0 | | −5.40 | | −5.40 | | +2.25 | | +18.00 | | +44.55 | | +89.40 | | +152.25 | | +224.10 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |
| $\theta c$ | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | −28.01 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\theta$ | −35.21 | | | | | | | | | | | | | | | | +45.34 | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $\overline{\theta}$ | | −33.41 | | −28.01 | | −20.36 | | −12.26 | | −1.46 | | +16.84 | | +34.84 | | +43.84 | | (ton-m)(2 m)/6$EI_0$ |
| $y$ | 0 | | −33.41 | | −61.42 | | −81.78 | | −94.04 | | −95.50 | | −78.66 | | −43.82 | | 0 | (ton-m)(2 m)²/6$EI_0$ |

**EJEMPLO 11.4 (*continuación*)**

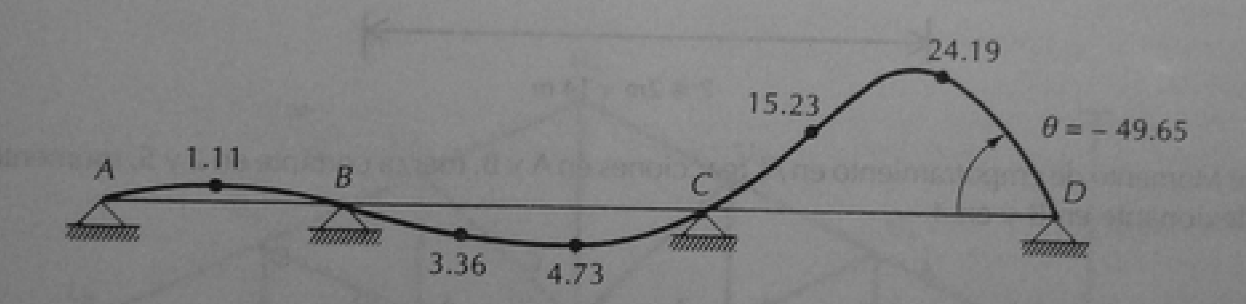
*e*) Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad (ecuaciones 11.8)

$$107.76 - 48.38\,R_B - 61.42\,R_C = 0$$
$$188.84 - 51.12\,R_B - 95.50\,R_C = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$R_B = -\,0.883$$
$$R_C = +\,2.450$$

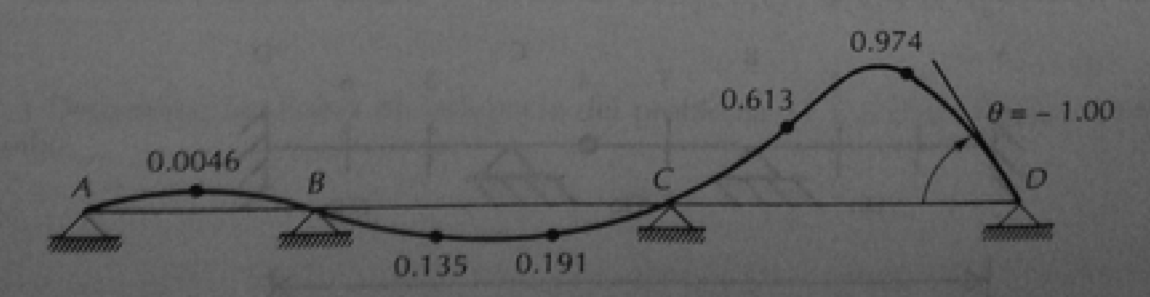
*f*) Suma de deflexiones del inciso *b*), del inciso *c*) multiplicadas por el valor de $R_B$ y del inciso *d*) multiplicadas por el valor de $R_C$.




Rotación en el apoyo *D*:

$$\theta = -\,141.70 + 21.56(-0.883) + 45.34(2.450) = -\,49.65$$

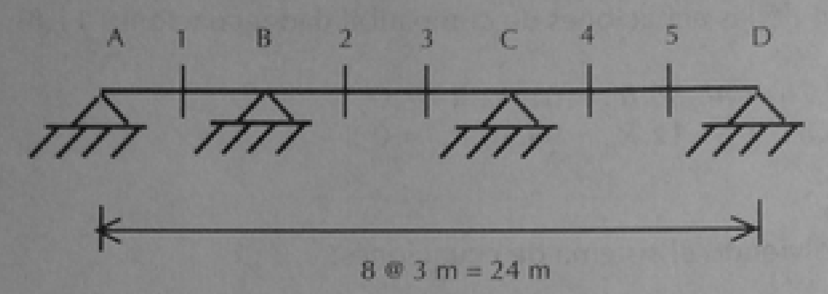
*g*) Ajuste de la viga deformada para que la rotación en el apoyo *D* sea igual a 1.



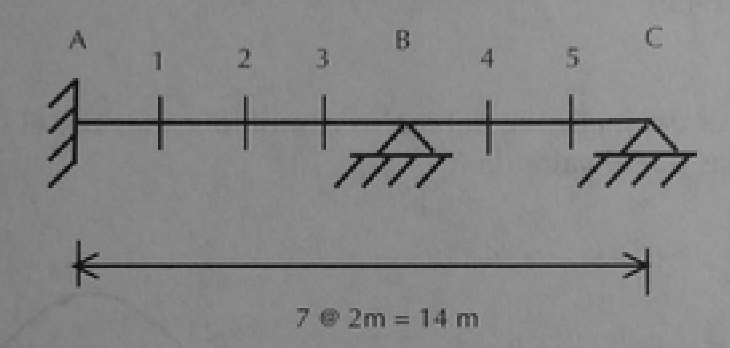

Línea de influencia del momento de empotramiento *D*

**PROBLEMAS**

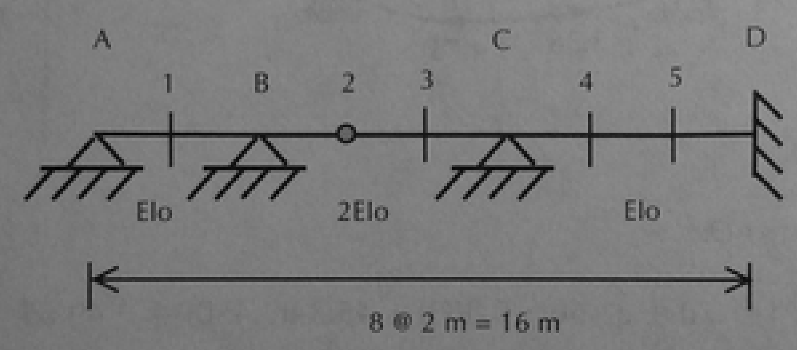
11.1 Determinar las siguientes líneas de influencia en vigas por el método directo.



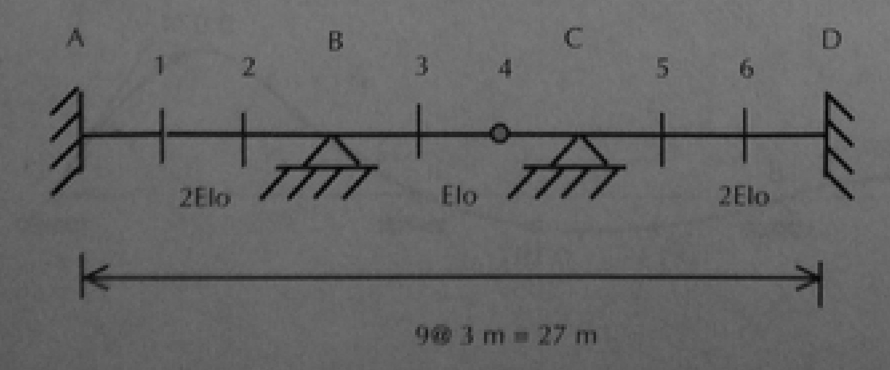

a) Reacciones en B y D, fuerza cortante en 2 y en 5, momento flexionante en 1 y en 3.




b) Momento de empotramiento en A, reacciones en A y B, fuerza cortante en 2 y 5, momento flexionante en B y en 4.

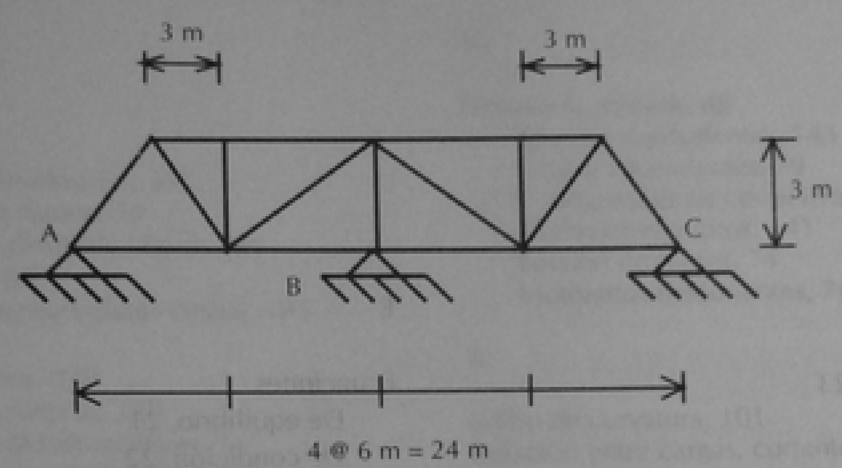



c) Reacciones en A y D, fuerza cortante inmediatamente a la izquierda y a la derecha de B, momento flexionante en C y 5.

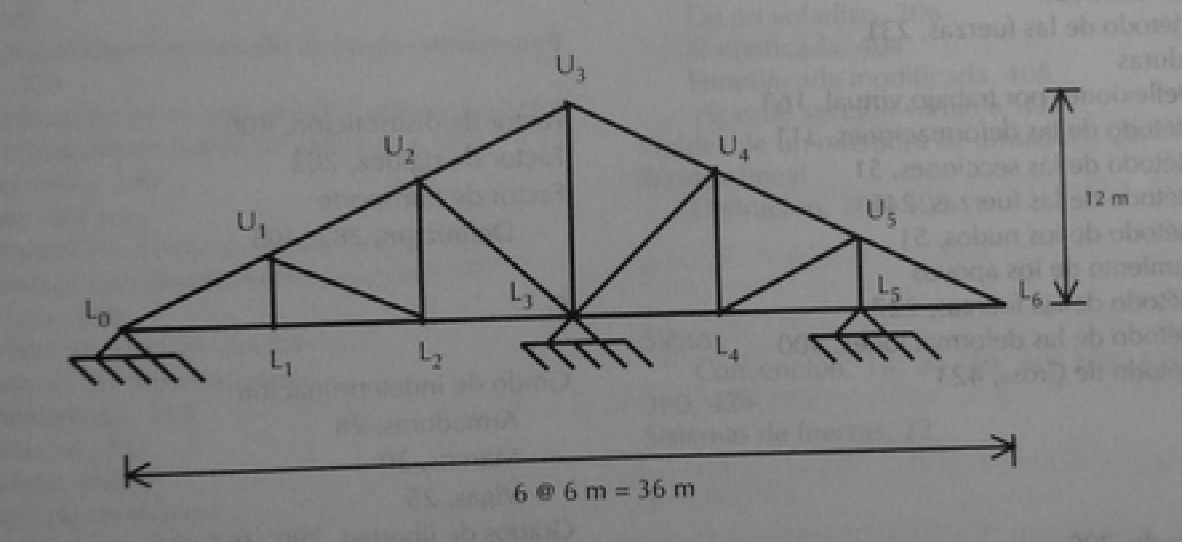



d) Reacciones en B y D, fuerza cortante en 2 y 4, momento flexionante en B y 5.

11.2 Determinar las siguientes líneas de influencia en armaduras por el método directo.




a) Reacciones en A, B y C, y fuerzas axiales en las barras de la cuerda inferior.




b) Reacciones y fuerzas axiales en las barras $U_1U_2$, $L_1L_2$, $U_1L_2$ y $U_5L_6$

11.3 Determinar las líneas de influencia del problema 11.1 por el método de Müller-Breslau.

# Índice alfabético

# Bibliografía


Au, T. y Christiano, P. (1993) *"Fundamentals of Structural Analysis"*. Prentice-Hall, Nueva Jersey.

Colindres, R. (1984) *"Estructuras Hiperestáticas"* LIMUSA, México.

Cross, H. y Morgan, N. (1953) *"Estructuras Continuas de Hormigón Armado"*. Editora Nacional, México.

Ghali, A. y Neville, A. M. (1990) *"Structural Analysis: a Unified Classical and Matrix Approach"*. Chapman and Hall.

Hibbeler, R. C. (1997) *"Structural Analysis"*. Prentice-Hall, Nueva Jersey.

Hool, G. y Kinne, B. (1942) *"Stresses in Framed Structures"*. McGraw-Hill, Nueva York.

Hsie, Y. Y. y Mau, S. T. (1998) *"Elementary Theory of Structures"*. Prentice-Hall, Nueva York.

Kassimali, A. (1999) *"Análisis Estructural"*. Thomson Learning, México.

Kinney, J. (1960) *"Análisis de Estructuras Indeterminadas"*. CECSA, México.

McCormac, J. y Elling, R. (1994) *"Análisis de Estructuras"*. Alfaomega, México.

Michalos, J. y Wilson, E. (1965) *"Structural Mechanics & Analysis"*. Macmillan, Nueva York.

Parcel, J. y Moorman, R. (1959) *"Analysis of Statically Indeterminate Structures"*. John Wiley, Nueva York.

Timoshenko, S. y Young, D. H. (1965) *"Theory of Structures"*. McGraw-Hill, Nueva York.

Tuma, J. J. (1969) *"Structural Analysis"*. Schaum's, Nueva York.

West, H. H. (1993) *"Fundamentals of Structural Analysis"*. John Wiley, Nueva York.

White, R.; Gergely, P. y Sexsmith, R. (1972) *"Structural Engineering"*. John Wiley, Nueva York.

**Obras afines:**

## ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CONCRETO REFORZADO

**Óscar M. González Cuevas**

El objetivo principal de esta obra es presentar, tanto al medio académico como a los ingenieros que ejercen la práctica profesional en el campo del diseño estructural, un compendio de las investigaciones más recientes en lo que al concreto reforzado atañe. La obra se ha enriquecido notablemente con la incorporación de las normas establecidas en los reglamentos de construcción más usados en países de habla hispana, el del American Concrete Institute y las Normas técnicas complementarias para estructuras de concreto reforzado del Reglamento del Distrito Federal. Asimismo, incluye el Reglamento ACI 318-89 y las NTC-87. Todas estas características la convierten en una de las obras más completas y actualizadas en el mercado.

## DISEÑO SIMPLIFICADO DE EDIFICIOS PARA CARGAS DE VIENTO Y SISMO

**Ambrose • Vergun**

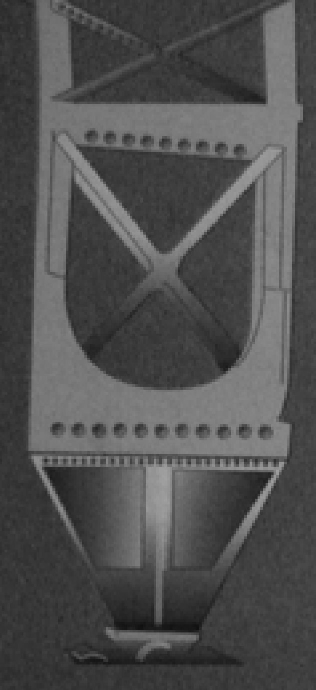
En esta obra se explica la naturaleza de las cargas de viento y sismo en las construcciones y se presentan las soluciones típicas actuales para edificios simples. Incluye un análisis de los efectos de las fuerzas dinámicas, un resumen de los requerimientos de diseño para viento y sismo del Código Unificado de la Construcción más reciente, así como un estudio de los elementos y sistemas de estructuras comunes resistentes a cargas laterales para edificios. Contiene un glosario de términos que se emplean en esta área.

## DISEÑO SIMPLIFICADO DE CONCRETO REFORZADO

**Parker, *et al.***

Esta obra presenta, de manera clara y sencilla, los métodos de análisis de los principales elementos estructurales que se construyen en concreto reforzado. De la misma forma, se explican los diferentes procesos de construcción con este material, así como las consideraciones necesarias para el diseño de las estructuras (especificaciones de los reglamentos, fuerzas aplicadas sobre las estructuras, planificación estructural, integración de los sistemas y costos de la construcción).

Esta obra se dirige principalmente a los arquitectos y constructores, pero es una valiosa guía para los estudiantes y profesores que se interesan en el tema, aunque no tengan conocimientos amplios sobre éste.



Este libro ha sido escrito con el propósito fundamental de ayudar a profesores y alumnos en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural. Esta disciplina constituye uno de los pilares de la carrera de ingeniería civil y es también importante en algunas otras licenciaturas, como ingeniería mecánica y arquitectura. Su dominio es indispensable para los profesionales que se dedican al diseño de algunas de las obras más espectaculares que construye el ser humano: rascacielos, puentes, presas, plantas industriales, plataformas marítimas, etc. El análisis estructural es, asimismo, una de las asignaturas que más contribuyen a la formación de los alumnos, a su entrenamiento en el manejo de conceptos abstractos y a la adquisición de habilidades intelectuales requeridas para el ejercicio profesional de la ingeniería. Por estas razones ha ocupado, desde hace mucho tiempo, un lugar destacado en los planes de estudio.

El enfoque seguido en este libro es el siguiente. En el primer capítulo se hace una revisión del proceso general de diseño y se ubica a la etapa del análisis estructural dentro de este proceso. El capítulo 2 comprende una revisión del tema de estructuras isostáticas, estudiado generalmente en cursos previos a los de análisis estructural. La resolución de estructuras hiperestáticas, campo de estudio del análisis estructural, requiere del cálculo de deformaciones de estructuras isostáticas; en el capítulo 3 se estudia este tema en forma completa. Los capítulos 4 y 5 presentan los métodos básicos o fundamentales del análisis estructural: el de las fuerzas y el de las deformaciones, respectivamente. El método pendiente-deflexión, que es el mismo de las deformaciones en sus principios básicos, se incluye en el capítulo 6. El método de Cross se presenta en los capítulos 7, 8 y 9, tratando por separado los casos de vigas continuas, marcos sin desplazamiento lateral y marcos con desplazamiento lateral; su inclusión obedece a que todavía es utilizado con frecuencia para la resolución de estructuras sencillas y a que presenta con claridad principios básicos del análisis estructural. Finalmente, en los capítulos 10 y 11, se estudia el tema de las líneas de influencia para estructuras isostáticas e hiperestáticas, respectivamente.

En todo el libro se hace énfasis en los principios básicos más que en aplicaciones específicas, ya que el autor considera que el dominio de estos principios es necesario para el estudio de métodos más avanzados o para la utilización de los excelentes programas de cómputo disponibles actualmente. Por el contrario, la utilización de programas sin dicho conocimiento no sólo es inconveniente, sino peligrosa.

ÁREA: INGENIERÍA CIVIL
ISBN-10 968-18-6003-9
ISBN-13 978-968-18-6003-5
9 789681 860035



e-mail: limusa@noriega.com.mx



www.noriega.com.mx